This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

**Über dieses Buch**

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

**Nutzungsrichtlinien**

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

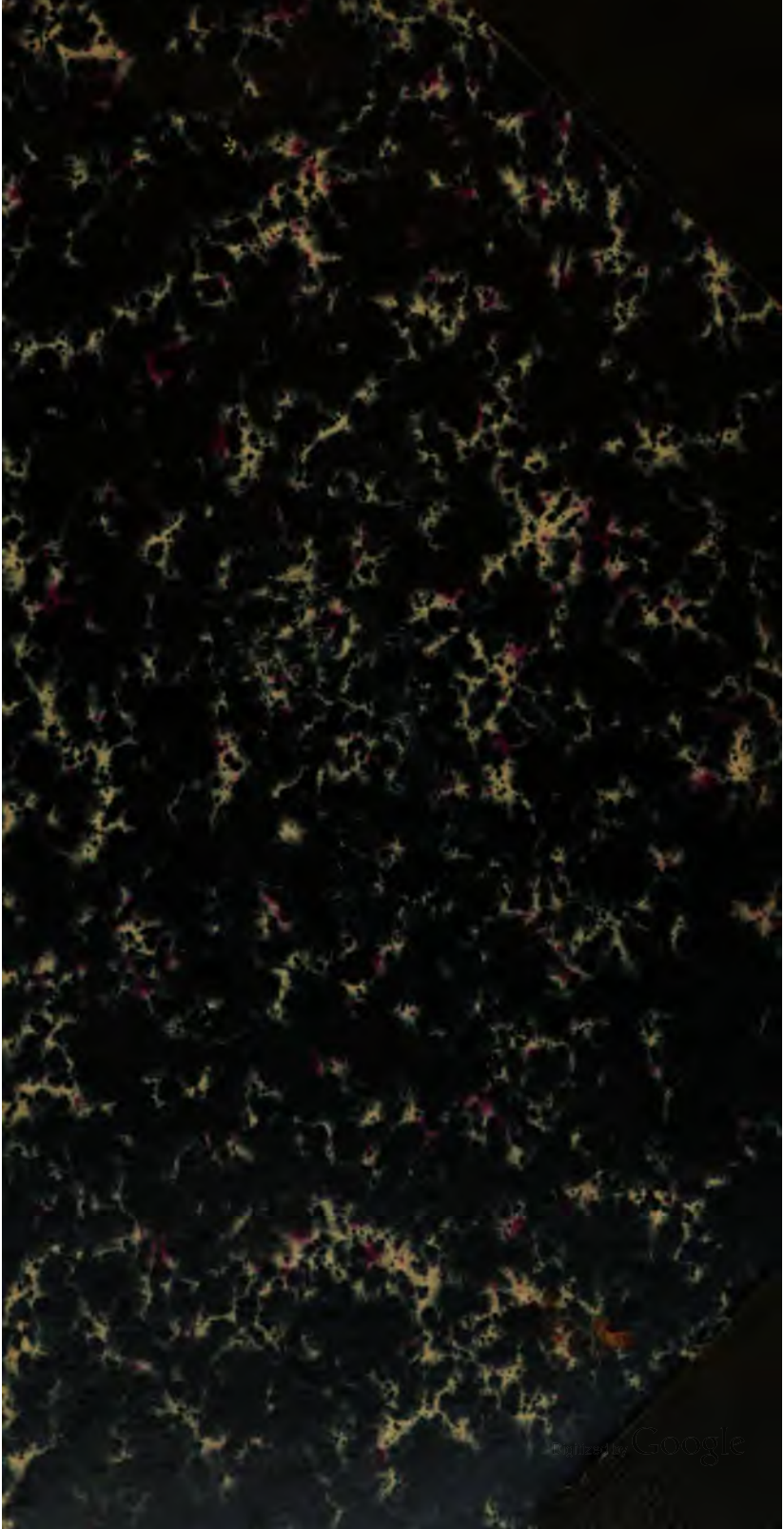
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

**Über Google Buchsuche**

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


Digitized by Google

LSoc 1726.9

Harvard College Library

FROM THE BEQUEST OF

JOHN AMORY LOWELL,

(Class of 1815).

This fund is $50,000, and of its income three quarters shall be spent for books and one quarter be added to the principal.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

## GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHSUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1904.

MIT 6 FIGUREN IM TEXT, 6 TAFELN NEBST 5 TABELLEN.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.

Digitized by Google

LSoc 1726.9

17-1

Digitized by Google

# INHALT.


Seite

W. His, Protokoll der von der internationalen Association der Akademien niedergesetzten Centralkommission für Gehirnforschung . . . . . 2

C. Neumann, Über Funktionen, die von drei reellen Argumenten abhängen . . . . . 5

C. Neumann, Über die Hervorbringung der Kettenlinie durch Biegung einer Kreisfläche . . . . . 13

G. Noth, Differentialinvarianten und invariante Differentialgleichungen zweier zehngliedriger Gruppen . . . . . 19

Paul Flechsig, Einige Bemerkungen über die Untersuchungsmethoden der Großhirnrinde, insbesondere des Menschen. Dem Zentralkomitee für Hirnforschung vorgelegt. Mit 4 Tafeln . 50

G. Scheffers, Ein Beitrag zur Geometrie der Berührungstransformationen in der Ebene. Mit 6 Figuren . . . . . 105

M. Siegfried, Über Protokyrine. . . . . 117

Felix Kämpf, Doppelbrechung in Kundtschen Spiegeln und Doppelbrechung von Metallspiegeln durch Zug . . . . . 123

Martin Krause, Zur Transformation der Thetafunktionen . . 126

W. Scheibner, Beiträge zur linearen Transformation, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. Dritter Teil. Über Gleichungen fünften und sechsten Grades . . . . . 139

Paul Flechsig, Einige Bemerkungen über die Untersuchungsmethoden der Großhirnrinde, insbesondere des Menschen. Dem Zentralkomitee für Hirnforschung vorgelegt. (Forts. u. Schluß) 177

Eduard Riecke, Ergebnisse der von Dr. Cuomo auf Capri ausgeführten Messungen der Elektrizitätszerstreuung in der freien Luft . . . . . 250

J. Thomae, Parameterdarstellung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung . . . . . 257

M. Krause, Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Kurbelbewegung . . . . . 273


Digitized by Google

Seite

F. Etzold, Vierter Bericht der Erdbebenstation Leipzig. Die in Leipzig vom 1. Juli 1903 bis 30. April 1904 von Wiecherts Pendelseismometer registrierten Erdbeben und Pulsationen. Mit einer Tafel und drei Tabellen . . . . . 289

F. Zirkel, Zur Erinnerung an Leibniz . . . . . 298

Franz Etzold, Fünfter Bericht der Erdbebenstation Leipzig. 51° 20′ 6″ nördl. Br., 49m 34s östlich von Greenwich. I. Die in Leipzig vom 1. Mai bis 31. Oktober 1904 registrierten Erdbeben und Pulsationen. II. Über die Aufzeichnung der infolge des Läutens der Kirchenglocken zu Leipzig erzeugten Bodenschwingungen. Mit einer Tafel und zwei Tabellen. . . . . 302

W. Scheibner, Zusatz zu Art. 10* S. 163 dieses Bandes . . . . 311

F. Marchand, Nekrolog auf Wilhelm His . . . . . 323

Ernst Beckmann, Nekrolog auf Clemens Winkler . . . . . 341

---

Verzeichnis der Mitglieder der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften . . . . . I

Verzeichnis der eingegangenen Schriften . . . . . VI

Digitized by Google

1

2 Soc. 1726.9

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

## GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHSUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1904.

# I.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1904.

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JUN 24 1904
CAMBRIDGE, MASS.

Digitized by Google

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
JUN 24 1904
CAMBRIDGE, MASS.

# SITZUNG VOM 11. JANUAR 1904.

1. Der Sekretär berichtet über die nach St. Louis zur internationalen Ausstellung einzusendenden Schriften.
2. Auf die Einladung des „Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik" hin wird beschlossen, ein Mitglied in den Vorstandsrat abzuordnen und als solches Herr Bruns gewählt.
3. Es wird beschlossen, der Gesamtgesellschaft Herrn Hantsch als ordentliches Mitglied zu präsentieren.
4. Herr zur Strassen wird zum außerordentlichen Mitglied der Klasse ernannt.
5. Zwei Schreiben der Kais. Akad. d. Wissensch. in Wien a) betreffend den Abänderungsvorschlag der Statuten der internationalen Assoziation der Akademien und b) den nächsten Kartelltag werden vorgelegt.

Vorträge halten:

Herr Neumann: 1. „Über Funktionen, die von drei Argumenten abhängen".

2. „Über die Hervorbringung der Kettenlinie durch Biegung einer Kreisfläche".

Herr His erstattet Bericht über die am 3. Januar abgehaltene Sitzung der von der internationalen Assoziation der Akademien niedergesetzten Kommission für Gehirnforschung und bittet, diesen Bericht in den Gesellschaftsberichten abdrucken zu dürfen, 2. spricht er über Form und Lagerung des menschlichen Magens.

Herr Flechsig legt einen Aufsatz vor: „Einige Bemerkungen über die Untersuchungsmethoden der Großhirnhemisphären, besonders des Menschen".

Herr O. Fischer legt seine VI. Abhandlung vor: „Über den Gang des Menschen. Über den Einfluß der Schwere und der Muskeln auf die Schwingungsbewegung des Beines".

Herr Engel teilt eine Arbeit von Herrn Noth mit: „Über Differentialinvarianten und invariante Differentialgleichungen zweier zehngliedriger Gruppen".

---



Digitized by Google

W. His gibt der math.-phys. Klasse der K. S. Gesellsch. d. Wissensch. Kenntnis vom:

# Protokoll der von der internationalen Association der Akademien niedergesetzten Centralkommission für Gehirnforschung.

Sitzung vom 3. Januar 1904 in der anatomischen Anstalt zu Leipzig. Morgens 10 Uhr.

Anwesend: die Herren Flechsig, Munk, Obersteiner, Waldeyer und His, brieflich entschuldigt: die Herren Ehlers und Golgi.

I. Der Vorsitzende (His) begrüßt die Anwesenden und berichtet mit einigen einleitenden Worten über den gegenwärtigen Stand der Angelegenheit. Er teilt mit, daß der Präsident der internationalen Association, Sir Michael Foster, ihn durch Schreiben vom 30. Juli 1903 zum Vorsitzenden der Kommission ernannt, und daß er ihn durch Schreiben vom 13. November beauftragt hat, die Arbeiten der Kommission in Gang zu setzen. Bis zum angegebenen Termin hatten acht Akademien ihre Zustimmung zu der Zusammensetzung der Centralkommission ausgesprochen, die Antworten der übrigen standen damals noch aus. Um, dem erteilten Auftrage gemäß, die Arbeiten der Kommission in Gang zu setzen, ist die heutige Sitzung anberaumt worden. Vorbereitende Schritte waren durch vorläufige Verständigung mit den Herren Flechsig und Waldeyer in betreff der Zusammensetzung der Specialkommissionen erfolgt.

II. Herr Flechsig erhält das Wort zu einer eingehenden Berichterstattung über die der Hirnforschung und speziell der Erforschung der Großhirnhemisphären gestellten Aufgaben.

Der Bericht des Herrn Flechsig wird gedruckt werden, und es wird beschlossen, ihn sämtlichen Mitgliedern der Special-

Digitized by Google

kommissionen mitzuteilen und ihn außerdem den an die Association zu stellenden Anträgen als Material beizulegen. Im übrigen soll der Bericht, nach dem Wunsche des Herrn Flechsig sowohl, als nach der Auffassung der Centralkommission, als eine Darlegung des persönlichen Standpunktes von seinem Verfasser gelten und keinerlei die Kommissionsmitglieder bindende Verpflichtung enthalten.

III. Gemäß dem schon in London am 8. Juni 1903 gefaßten Beschluß stellt die Centralkommission an die internationale Assoziation den Antrag, *es möge die Association die in ihr vertretenen Akademien und Gesellschaften veranlassen, daß sie bei ihren betreffenden Regierungen oder sonstigen zustehenden Instanzen den Antrag stellen, Specialinstitute oder Institutsabteilungen für die Erforschung des Centralnervensystems zu begründen, soweit solche nicht vorhanden oder auf andere Weise zu beschaffen sind.*

Die Aufgaben der zu begründenden Institute sind:

A. Die Aufspeicherung und Zugänglichmachung von wissenschaftlichem (normalem) Material an Präparaten, Modellen, Photogrammen, Zeichnungen usw.

B. Die technische Hilfeleistung bei wissenschaftlichen Untersuchungen.

C. Die Aufbewahrung von wertvollem experimentell physiologischem und pathologischem, bereits bearbeitetem oder noch zu bearbeitendem Material.

D. Die Bewältigung größerer, über die Kräfte einzelner hinausgehender Aufgaben, soweit solche zur Kooperation sich eignen.

IV. Obiger Antrag ist unter Vorbehalt späterer ausführlicher Begründung sofort an den Präsidenten der Association, Sir M. Foster, nach London einzusenden, damit er in der Tagesordnung der allgemeinen Versammlung vom 25. Mai 1904 Aufnahme finde.

V. Die Centralkommission revidiert die Liste der für die Specialkommissionen vorgeschlagenen Gelehrten, und sie einigt sich über folgende Namen. Dabei wird angenommen, daß jeder Specialkommission ein Mitglied der Centralkommission vorsteht und deren Arbeiten leitet.

1. Waldeyer, Cunningham, Mall, Manouvrier, Zuckerkandl.
2. Ehlers, Edinger, Giard, Guldberg, Elliot Smith.
3. Golgi, Ramon y Cajal, Dogiel, van Gehuchten, Retzius.
4. His, Bechterew, v. Kölliker, v. Lenhossek, Minot.



Digitized by Google

5. H. Munk, Horsley, Luciani, Mosso, Sherrington.

6. Obersteiner, Dejerine, Monakow, Langley, Weigert.

7. Flechsig, Hentschen, Ferrier, Lannelongue, Reymond.

VI. Der Vorsitzende der Centralkommission hat den Mitgliedern der Specialkommissionen ihre Ernennung sowohl, als die Liste der sämtlichen Namen mitzuteilen und ihnen zu melden, daß der Vorsitzende der Specialkommission demnächst weitere Mitteilungen wird folgen lassen.

VII. Die Mitteilung der Vorsitzenden der Specialkommissionen an ihre Mitglieder hat sich auf die Motivierung der bei der Association gestellten Anträge (s. III. A—D) zu beziehen. Es sollen die Mitglieder eingeladen werden, hierzu ihre Bemerkungen und Zusätze einzusenden.

VIII. Aus den von den Mitgliedern der Specialkommissionen gelieferten Eingaben hat die Centralkommission die Motivierung des in London einzureichenden Antrages zusammenzustellen.

IX. Im Anschluß an die am 25. Mai 1904 zusammentretende Generalversammlung der Association sind die Mitglieder der Specialkommissionen zu einer gemeinsamen Sitzung nach London einzuladen.

---

Druckfertig erklärt 16. I. 1904.]

Digitized by Google

# Über Funktionen, die von drei reellen Argumenten abhängen.

Von

C. Neumann.

Im Jahre 1893 ist von mir ein gewisser sehr allgemeiner funktionentheoretischer Satz aufgestellt worden, dessen Ableitung auf Betrachtungen beruht, die an das *Newtonsche Gesetz* sich anschließen.*) Im folgenden werde ich nun zeigen, daß man zu einem analogen Satze gelangt, wenn man, statt des Newtonschen Gesetzes, das sogenannte *Exponentialgesetz* (und zwar das *eingliedrige* Exponentialgesetz) der Betrachtung zugrunde legt.

## § 1.

### Das Newtonsche Gesetz und das Exponentialgesetz.

Wir wollen uns den ganzen unendlichen Raum mit irgend welcher Masse erfüllt denken, und die Dichtigkeit dieser Masse im Punkte $(x, y, z)$ mit $\varepsilon$ bezeichnen. Auch wollen wir annehmen, daß diese Funktion $\varepsilon = \varepsilon(x, y, z)$, samt ihren Ableitungen, überall *stetig* sei.

Bezeichnen wir nun, unter Zugrundelegung des *Newtonschen Gesetzes*, das Potential der genannten Masse in bezug auf irgend einen Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ mit $P_1$, und den Wert von $\varepsilon$ in diesem Punkte mit $\varepsilon_1$, so ist bekanntlich:

$$(1) \qquad P_1 = \int \frac{\varepsilon D\mathfrak{v}}{r} \quad \text{und} \quad \Delta_1 P_1 = -4\pi\varepsilon_1,$$

die Integration ausgedehnt gedacht über alle Volumelemente $D\mathfrak{v}(x, y, z)$ des ganzen unendlichen Raumes; dabei bezeichnet $\varepsilon$ die in $D\mathfrak{v}$ vorhandene Dichtigkeit und $r$ den Abstand eines solchen Elementes $D\mathfrak{v}$ von jenem Punkte $(x_1, y_1, z_1)$. Und

*) *C. Neumann: Beiträge zu einzelnen Teilen der mathematischen Physik*, Leipzig, bei Teubner, 1893. Daselbst Seite 232—235.

Digitized by Google

ebenso, wie man den LAPLACEschen Differentialausdruck für einen Punkt $(x, y, z)$ mit $\Delta$ zu bezeichnen pflegt, ebenso soll hier unter $\Delta_1$ der LAPLACEsche Differentialausdruck für den Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ verstanden werden.

Vor längerer Zeit ist von mir (namentlich mit Rücksicht auf die Probleme der Astronomie) an Stelle des *NEWTONschen Gesetzes* ein gewisses anderes Gesetz in Vorschlag gebracht worden, welches ich kurzweg das *Exponentialgesetz* genannt habe. Nach diesem Exponentialgesetze würde das Potential jener gegebenen Masse auf den Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ nicht den in (1) angegebenen Wert $P_1$, sondern einen gewissen anderen Wert $Q_1$ besitzen, der folgendermaßen lautet:

$$(2) \qquad Q_1 = \int \frac{\varepsilon D\mathfrak{v}}{re^{\alpha r}} = \int \frac{\varepsilon D\mathfrak{v}}{R},$$

wo $R$ bloße *Abbreviatur* sein soll für das Produkt $re^{\alpha r}$; während $\alpha$ eine *positive Konstante* vorstellt. Ebenso wie nun $\Delta_1 P_1$ den in (1) angegebenen einfachen Wert besitzt, ebenso ist auch der Wert von $\Delta_1 Q_1$ leicht angebbar. Man gelangt in solcher Weise zu folgenden mit (1) parallel stehenden Formeln*):

$$(3) \qquad Q_1 = \int \frac{\varepsilon D\mathfrak{v}}{R} \quad \text{und} \quad \Delta_1 Q_1 = -4\pi\varepsilon_1 + \alpha^2 Q_1,$$

die für $\alpha = 0$ zurückfallen in jene Formeln (1); denn es ist $R = re^{\alpha r}$. Auch würde man, falls es beliebt, die positive Konstante $\alpha$ so klein sich denken können, daß der Unterschied zwischen den Formeln (1) und (3), d. i. zwischen dem NEWTONschen Gesetze und dem Exponentialgesetze für alle überhaupt meßbaren Entfernungen der Beobachtung unzugänglich ist.

## § 2.

### Aufstellung eines sehr allgemeinen funktionentheoretischen Satzes.

Es seien

$$(4) \qquad u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

drei beliebig gegebene Funktionen, die aber, samt ihren Ableitungen, allenthalben *stetig* sein sollen. Nimmt man nun für $\varepsilon$

*) *C. NEUMANN: Allg. Untersuchungen über das NEWTONsche Prinzip der Fernwirkungen. Leipzig bei Teubner, 1896.* Daselbst Seite 81. Die dortigen Buchstaben $V$, $d\tau$ und $A$ sind hier ersetzt durch $Q$, $D\mathfrak{v}$ und 1.

Digitized by Google

der Reihe nach $u$, $v$, $w$, und bezeichnet man die in solcher Weise sich ergebenden Potentiale $Q$ respektive mit $U$, $V$, $W$, so erhält man folgende zu (3) analoge Formeln:

$$(5)\quad \begin{cases} U_1 = \int \frac{u\,D\mathfrak{v}}{R} & \text{und} \quad \Delta_1 U_1 = -4\pi u_1 + \alpha^2 U_1, \\ V_1 = \int \frac{v\,D\mathfrak{v}}{R} & \text{und} \quad \Delta_1 V_1 = -4\pi v_1 + \alpha^2 V_1, \\ W_1 = \int \frac{w\,D\mathfrak{v}}{R} & \text{und} \quad \Delta_1 W_1 = -4\pi w_1 + \alpha^2 W_1. \end{cases}$$

Wir wollen jetzt folgende vier Ausdrücke bilden:

$$(6)\quad S_1 = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1},$$

$$(7)\quad F_1 = \frac{\partial W_1}{\partial y_1} - \frac{\partial V_1}{\partial z_1}, \quad G_1 = \frac{\partial U_1}{\partial z_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_1}, \quad H_1 = \frac{\partial V_1}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial y_1},$$

und die Werte dieser Ausdrücke einer näheren Untersuchung unterwerfen. — Nach (5) ist:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = \int \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x_1} u\,D\mathfrak{v} = -\int \frac{\partial \frac{1}{R}}{\partial x} u\,D\mathfrak{v},$$

wo $x$, $y$, $z$ die Koordinaten des Elementes $D\mathfrak{v}$ sein sollen; so daß also das in $R$ enthaltene $r$ den Wert hat: $r^2 = (x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (z-z_1)^2$. Aus der letzten Formel ergibt sich nun sofort:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = -\int \frac{\partial \frac{u}{R}}{\partial x} D\mathfrak{v} + \int \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} D\mathfrak{v},$$

und sodann weiter:

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_1} = +\int \frac{u}{R} \cos(\mathfrak{N}, x)\,Do + \int \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial x} D\mathfrak{v},$$

das erste Integral ausgedehnt gedacht über alle Elemente $Do$ einer den ganzen unendlichen Raum umschließenden (unendlich fernen) Kugelfläche; dabei bezeichnet $\mathfrak{N}$ die auf $Do$ errichtete *innere* Normale. Setzt man nun endlich:

$$\cos(\mathfrak{N}, x) = \mathfrak{A}, \quad \cos(\mathfrak{N}, y) = \mathfrak{B}, \quad \cos(\mathfrak{N}, z) = \mathfrak{C},$$

so geht die letzte Formel über in die erste Gleichung folgenden Systems:

Digitized by Google

$$(8)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial U_1}{\partial x_1} = \int u\mathfrak{A}\dfrac{Do}{R} + \int \dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{D\mathrm{v}}{R}, \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial y_1} = \int u\mathfrak{B}\dfrac{Do}{R} + \int \dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{D\mathrm{v}}{R}, \\ \dfrac{\partial U_1}{\partial z_1} = \int u\mathfrak{C}\dfrac{Do}{R} + \int \dfrac{\partial u}{\partial z}\dfrac{D\mathrm{v}}{R}, \end{cases}$$

dessen übrige Gleichungen in ähnlicher Weise zu erhalten sind. Auch werden offenbar mit (8) analoge Formeln sich ergeben für die Ableitungen von $V_1$ und $W_1$. — Auf Grund all dieser Formeln (8) etc. gewinnen nun unsere Ausdrücke (6), (7) folgende Gestalt:

$$(9)\quad S_1 = \int (u\mathfrak{A} + v\mathfrak{B} + w\mathfrak{C})\frac{Do}{R} + \int \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{D\mathrm{v}}{R},$$

$$(10)\qquad \begin{cases} F_1 = \int (w\mathfrak{B} - v\mathfrak{C})\dfrac{Do}{R} + \int \left(\dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}\right)\dfrac{D\mathrm{v}}{R}, \\ G_1 = \int (u\mathfrak{C} - w\mathfrak{A})\dfrac{Do}{R} + \int \left(\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{D\mathrm{v}}{R}, \\ H_1 = \int (v\mathfrak{A} - u\mathfrak{B})\dfrac{Do}{R} + \int \left(\dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{D\mathrm{v}}{R}. \end{cases}$$

Dies vorangeschickt, bedienen wir uns jetzt der *identischen Gleichung:*

$$(11)\quad \Delta_1 U_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_1}{\partial y_1} + \frac{\partial W_1}{\partial z_1}\right) + \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial y_1} - \frac{\partial V_1}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial z_1} - \frac{\partial W_1}{\partial x_1}\right).$$

Hieraus folgt, mit Hinblick auf (5), (6), (7), sofort:

$$-4\pi u_1 + \alpha^2 U_1 = \frac{\partial S_1}{\partial x_1} - \frac{\partial H_1}{\partial y_1} + \frac{\partial G_1}{\partial z_1},$$

oder, was dasselbe ist:

$$4\pi u_1 = -\frac{\partial S_1}{\partial x_1} + \left[\frac{\partial H_1}{\partial y_1} - \frac{\partial G_1}{\partial z_1}\right] + \alpha^2 U_1,$$

oder, falls man für $S_1$, $H_1$, $G_1$ und $U_1$ die in (9), (10) und (5) angegebenen Integralausdrücke substituiert:

Digitized by Google

(12) $$4\pi u_1 =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\int\dfrac{(u\mathfrak{A}+\cdot\cdot)Do}{R} + \left[\dfrac{\partial}{\partial y_1}\int\dfrac{(v\mathfrak{A}-u\mathfrak{B})Do}{R} - \dfrac{\partial}{\partial z_1}\int\dfrac{(u\mathfrak{C}-w\mathfrak{A})Do}{R}\right] \\ -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cdot\cdot\right)\dfrac{Dv}{R} + \left[\dfrac{\partial}{\partial y_1}\int\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{Dv}{R} - \dfrac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{Dv}{R}\right] \\ +\alpha^2\int\dfrac{uDv}{R}, \end{cases}$$

wo zur augenblicklichen Abkürzung:

$$(u\mathfrak{A}+\cdot\cdot) \quad \text{für} \quad (u\mathfrak{A}+v\mathfrak{B}+w\mathfrak{C})$$

und

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\cdot\cdot\right) \quad \text{für} \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

gesetzt ist.

Beachtet man, daß in der Formel (12) die Integrale der *drittletzten Zeile* über die Elemente $Do$ einer *unendlich fernen* Kugelfläche*) sich ausdehnen, und beachtet man ferner, daß $R = re^{\alpha r}$ ist, wo $\alpha$ eine *positive* Konstante vorstellt, so erkennt man leicht, daß diese drittletzte Zeile *verschwinden* wird für jedwede Lage des gegebenen Punktes $(x_1, y_1, z_1)$, — falls man nur voraussetzt, daß $\alpha$ *von Null verschieden* ist, und daß überdies die $u$, $v$, $w$ im Unendlichen *endlich* bleiben. Unter diesen Voraussetzungen reduziert sich also die Formel (12) auf:

(13) $$4\pi u_1 =$$

$$= \begin{cases} -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\int\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\cdot\cdot\right)\dfrac{Dv}{R} + \left[\dfrac{\partial}{\partial y_1}\int\left(\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\dfrac{Dv}{R} - \dfrac{\partial}{\partial z_1}\int\left(\dfrac{\partial u}{\partial z}-\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)\dfrac{Dv}{R}\right] \\ +\alpha^2\int\dfrac{uDv}{R}. \end{cases}$$

Analoge Ausdrücke wird man offenbar erhalten für $4\pi v_1$ und $4\pi w_1$; so daß man also schließlich zu folgendem Resultate gelangt:

**Allgemeiner Satz.** — *Es seien $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$ und $w = w(x, y, z)$ drei beliebig gegebene Funktionen, die, samt ihren Ableitungen, allenthalben stetig sind. Auch sei voraus-*

*) Die etwa um den Anfangspunkt des Koordinatensystems mit unendlich großem Radius beschrieben ist.

Digitized by Google

*gesetzt, daß diese drei Funktionen im Unendlichen endlich bleiben. Ferner sei gesetzt:*

$$\sigma = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \tag{14}$$

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \psi = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \chi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{15}$$

*Denkt man sich alsdann irgendwo im Raume einen Punkt $(x_1, y_1, z_1)$ markiert, und die Werte von $u$, $v$, $w$ in diesem Punkte mit $u_1$, $v_1$, $w_1$ bezeichnet, so sind diese Werte $u_1$, $v_1$, $w_1$ folgendermaßen darstellbar:*

$$(16)\quad \begin{cases} 4\pi u_1 = -\dfrac{\partial}{\partial x_1}\displaystyle\int \frac{\sigma D\mathrm{v}}{R} + \left[\frac{\partial}{\partial y_1}\int \frac{\chi D\mathrm{v}}{R} - \frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{\psi D\mathrm{v}}{R}\right] + \alpha^2 \int \frac{u D\mathrm{v}}{R}, \\ 4\pi v_1 = -\dfrac{\partial}{\partial y_1}\displaystyle\int \frac{\sigma D\mathrm{v}}{R} + \left[\frac{\partial}{\partial z_1}\int \frac{\varphi D\mathrm{v}}{R} - \frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{\chi D\mathrm{v}}{R}\right] + \alpha^2 \int \frac{v D\mathrm{v}}{R}, \\ 4\pi w_1 = -\dfrac{\partial}{\partial z_1}\displaystyle\int \frac{\sigma D\mathrm{v}}{R} + \left[\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{\psi D\mathrm{v}}{R} - \frac{\partial}{\partial y_1}\int \frac{\varphi D\mathrm{v}}{R}\right] + \alpha^2 \int \frac{w D\mathrm{v}}{R}. \end{cases}$$

*Hier sind die Integrationen ausgedehnt zu denken über alle Volumelemente $D\mathrm{v}(x, y, z)$ des ganzen unendlichen Raumes. Dabei ist $R = re^{\alpha r}$; und zwar ist in diesem Ausdruck:*

$$R = re^{\alpha r} \tag{17}$$

*unter $r$ der Abstand jener Elemente $D\mathrm{v}(x, y, z)$ von dem markierten Punkte $(x_1, y_1, z_1)$ zu verstehen; während $\alpha$ eine willkürlich zu wählende positive Konstante vorstellt, die aber verschieden sein muß von Null.*

**Erste Bemerkung.** — Auf den Fall $\alpha = 0$ (in welchem $R$ in $r$ übergeht) sind die Formeln (16) *nicht* anwendbar. Denn in diesem Falle würde in der von uns benutzten Formel (12) die drittletzte Zeile *nicht* verschwinden; — es sei denn, daß man etwa die Voraussetzung hinzufügen wollte, daß die Funktionen $u$, $v$, $w$ für *unendlich ferne* Punkte $(x, y, z)$ von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ seien, wo $\varrho$ den Abstand eines solchen unendlich fernen Punktes $(x, y, z)$ von irgend einem *festen* Punkt, z. B. vom Anfangspunkt des Koordinatensystems vorstellt.*)

*) Für $\alpha = 0$, d. i. $R = r$, lautet z. B. das erste Glied jener drittletzten Zeile folgendermaßen:

Digitized by Google

**Zweite Bemerkung.** — Sind $u$, $v$, $w$ *Konstanten*, etwa $u = A$, $v = B$, $w = C$, so sind die $\sigma$, $\varphi$, $\psi$, $\chi$ (14), (15) sämtlich gleich *Null*; so daß in diesem Falle die Formeln (16) sich verwandeln in:

$$(18)\qquad \begin{cases} 4\pi A = \alpha^2 \int \dfrac{A D\mathfrak{v}}{R}, \\ 4\pi B = \alpha^2 \int \dfrac{B D\mathfrak{v}}{R}, \\ 4\pi C = \alpha^2 \int \dfrac{C D\mathfrak{v}}{R}; \end{cases}$$

und diese drei Formeln reduzieren sich, falls man sie durch $A$, $B$, $C$ dividiert, auf die *eine* Formel:

$$(19)\qquad 4\pi = \alpha^2 \int \frac{D\mathfrak{v}}{R}.$$

Als *Kontrolle* unserer Untersuchungen dürfte es nun angemessen sein, diese Formel (19) einer *Prüfung* zu unterwerfen.

Führt man ein Polarkoordinatensystem ein, dessen Anfangspunkt in $(x_1, y_1, z_1)$ liegt, setzt man also:

$$x - x_1 = r\mu, \quad y - y_1 = r\sqrt{1-\mu^2}\cdot\cos\varphi, \quad z - z_1 = r\sqrt{1-\mu^2}\cdot\sin\varphi,$$

so verwandelt sich $D\mathfrak{v}$ in $r^2\, dr\, d\mu\, d\varphi$; wodurch alsdann das in (19) auftretende Integral die Gestalt erhält:

$$\int \frac{D\mathfrak{v}}{R} = \int \frac{D\mathfrak{v}}{r} e^{-\alpha r} = \int\int\int \frac{r^2\, dr\, d\mu\, d\varphi}{r} e^{-\alpha r},$$

die Integrationen ausgedehnt gedacht über $r = 0 \cdots \infty$, über $\mu = -1 \cdots +1$ und über $\varphi = 0 \cdots 2\pi$. Somit folgt:

---

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\int \frac{u\mathfrak{A} D o}{r} \quad \text{d. i.} \quad \int \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{r}\right)\cdot u\mathfrak{A} D o,$$

wofür man auch schreiben kann:

$$\int \left(\frac{x - x_1}{r}\right)\left[\frac{u}{r^2}\right]\mathfrak{A} D o.$$

Dieses Glied wird aber in der Tat verschwinden, falls $u$ im Unendlichen von der Ordnung $\frac{1}{\varrho}$ ist; denn alsdann ist der in den eckigen Klammern enthaltene Faktor im Unendlichen von der Ordnung $\left(\frac{1}{\varrho}\right)^3$. Usw.

Digitized by Google

$$\int \frac{D\mathfrak{v}}{R} = 4\pi \int_0^\infty e^{-ar} r\, dr.$$

Dies aber ist ein *Eulersches Integral.* Und man erhält also nach der bekannten Theorie der Eulerschen Integrale:

$$\int \frac{D\mathfrak{v}}{R} = 4\pi \left(\frac{1}{a}\right)^2.$$

Somit zeigt sich, daß die Formel (19) in der Tat richtig ist. — Q. e. d.

**Dritte Bemerkung.** — Mittels des allgemeinen Satzes (16) kann man die *Differentialgleichungen der Maxwell-Hertzschen Theorie* einer gewissen Transformation unterwerfen. Und es wäre wohl möglich, daß diese Transformation für jene Theorie von einigem Nutzen sein könnte. Ich beabsichtige, später hierauf näher einzugehen.

---

Druckfertig erklärt 10. II. 1904.]

Digitized by Google

# Über die Hervorbringung der Kettenlinie durch Biegung einer Kreisfläche.

Von

C. Neumann.

Ist auf einer ebenen Fläche eine gerade Linie $L$ gezogen, so wird man die Fläche *einer mit $L$ parallelen Biegung* unterwerfen können; — d. h. man wird die Fläche durch Biegung in eine Zylinderfläche (von irgend welchem Querschnitt) verwandeln können, deren Kanten sämtlich parallel mit $L$ sind.

Es sei nun gegeben eine nach beiden Seiten ins Unendliche fortlaufende *Rotationszylinderfläche* vom Radius $R$. Im Innenraume derselben denke man sich eine *gewöhnliche ebene Kreisfläche* vom Radius $r < R$, auf welcher zwei zueinander senkrechte Durchmesser $aa$ und $bb$ markiert sind; und zwar denke man sich diese Kreisfläche $(r)$ so plaziert, daß sie mit den beiden Endpunkten des Durchmessers $bb$ die gegebene Zylinderfläche $(R)$ *berührt*, während der Durchmesser $aa$ der Achse dieser Zylinderfläche $(R)$ parallel sein soll.

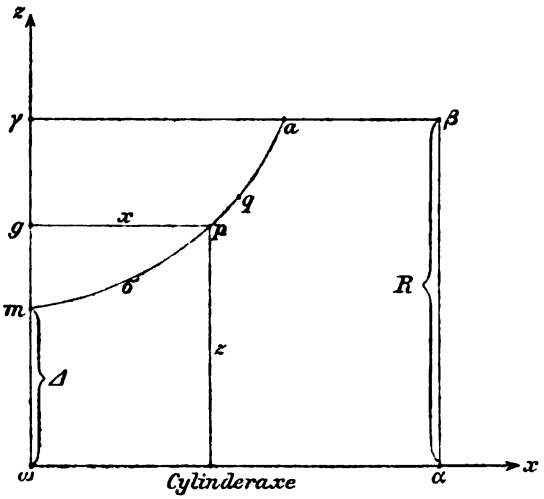
Alsdann werden wir, wie leicht zu übersehen ist, durch eine mit $bb$ parallele Biegung der Kreisfläche $(r)$, dafür sorgen können, daß ihre Randpunkte samt und sonders auf die Zylinderfläche $(R)$ zu liegen kommen. Und nach Ausführung dieser Biegung wird alsdann der Durchmesser $aa$ die Gestalt einer *Kettenlinie* besitzen; so daß wir also sagen können:

> *Denkt man sich eine Kreisfläche in solcher Weise gebogen, daß all ihre Randpunkte auf eine Rotationszylinderfläche zu liegen kommen, so wird jene Biegung stets stattgefunden haben nach Maaßgabe einer Kettenlinie.*

Zu diesem merkwürdigen Satze bin ich vor einiger Zeit durch Zufall gelangt, oder vielmehr durch Untersuchungen über ein gewisses Problem der Mechanik. Ohne hierauf näher einzugehen, will ich sofort zum Beweise des Satzes mich hinwenden.

Digitized by Google

**Beweis des Satzes.** — Die gegebene *Rotationszylinderfläche* $(R)$ mag [vgl. die folgende Figur] diejenige sein, welche von der Linie $\gamma\beta$ beschrieben wird, wenn man das Rechteck $\omega\alpha\beta\gamma$ um die $x$-Achse, d. i. um die Linie $\omega\alpha$ rotieren läßt. Demgemäß soll also $(\omega\gamma) = (\alpha\beta) = R$ sein.




Was nun ferner die beiden aufeinander senkrechten Durchmesser $aa$ und $bb$ der gegebenen *Kreisfläche* $(r)$ anbelangt, so sei $m$ [vgl. die Figur] ein auf der $z$-Achse zwischen $\omega$ und $\gamma$ gelegener Punkt; und in diesem Punkte $m$ mag der Durchmesser $bb$ senkrecht stehen gegen die Ebene der Zeichnung, d. i. gegen die $xz$-Ebene; der Art, daß $m$ selber den Mittelpunkt dieses Durchmessers $bb$ repräsentiert. Endlich mag die eine Hälfte $ma$ des Durchmessers $aa$, nach Ausführung der vorhin besprochenen zylindrischen Biegung der Kreisfläche $(r)$, dargestellt sein durch die in der $xz$-Ebene liegende Kurve $mpqa$.

*Es handelt sich nun um die nähere Untersuchung dieser einstweilen noch ganz unbekannten Kurve $mpqa$.* Dabei mögen die Koordinaten der Punkte $m$, $p$, $q$ und $a$ folgendermaßen bezeichnet werden [vgl. die Figur]:

$$(1)\qquad \underbrace{\begin{cases} x = 0, \\ z = \Delta, \end{cases}}_{m} \quad \underbrace{\begin{cases} x, \\ z, \end{cases}}_{p} \quad \underbrace{\begin{cases} x + dx, \\ z + dz, \end{cases}}_{q} \quad \underbrace{\begin{cases} x = (ya), \\ z = R; \end{cases}}_{a}$$

Digitized by Google

ferner mögen die Bogenlängen $(mp)$ und $(pq)$ mit $\sigma$ und $d\sigma$ bezeichnet werden:

$$(2) \qquad (mp) = \sigma, \quad (pq) = d\sigma.$$

Dabei ist hinzuzufügen, daß die ganze Bogenlänge

$$(3) \qquad (mpqa) = r$$

ist; denn $(mpqa)$ ist ja nichts anderes als der gebogene Kreisflächenradius, und die Länge dieses Radius ist von uns mit $r$ bezeichnet worden.

Ein in $p$ auf der Ebene der Zeichnung, d. i. auf der $x\varepsilon$-Ebene errichtetes Perpendikel wird die gegebene Zylinderfläche $(R)$ in einem gewissen Punkte $P$ treffen. Setzt man nun die Länge

$$(4) \qquad (pP) = y,$$

und beachtet man, daß $P$ auf jener Zylinderfläche $(R)$ liegt, so ergibt sich sofort die Gleichung:

$$(5) \qquad y^2 + \varepsilon^2 = R^2.$$

Eine *zweite* Gleichung für $y$ ergibt sich, wenn man für den Augenblick die gebogene Kreisfläche zu ihrer ursprünglichen ebenen Gestalt zurückkehren läßt, und in solcher Weise die Kurve $mpqa$ rektifiziert. Alsdann nämlich erkennt man, daß zwischen dem Perpendikel $(pP) = y$ und zwischen der Bogenlänge $(mp) = \sigma$ die Beziehung stattfindet:

$$(6) \qquad y^2 + \sigma^2 = r^2.$$

Nunmehr folgt aus (5) und (6) durch Subtraktion:

$$(7) \qquad \varepsilon^2 - \sigma^2 = R^2 - r^2.$$

Bringt man diese für jedweden Punkt $p$ der Kurve geltende Formel (7) insbesondere in Anwendung auf den Ausgangspunkt der Kurve, d. i. auf den Punkt $m$, so erhält man sofort:

$$(8) \qquad \Delta^2 = R^2 - r^2;$$

wodurch die allgemeine Formel (7) die einfachere Gestalt gewinnt: $\varepsilon^2 - \sigma^2 = \Delta^2$, d. i.:

$$(9) \qquad \sigma^2 = \varepsilon^2 - \Delta^2.$$

Hieraus folgt, wenn man den Punkt $p$ nach $q$ wandern läßt [unter Benutzung der in (1), (2) eingeführten Bezeichnungen]: $\sigma d\sigma = \varepsilon d\varepsilon$, mithin:

$$\sigma^2 (d\sigma)^2 = \varepsilon^2 (d\varepsilon)^2,$$

Digitized by Google

oder, falls man hier für $\sigma^2$ den Wert (9) substituiert:

$$(10) \qquad (d\sigma)^2 = \frac{z^2(dz)^2}{z^2 - \Delta^2}.$$

Nach (1), (2) ist aber $(d\sigma)^2 = (dx)^2 + (dz)^2$; wodurch die Formel (10) übergeht in:

$$(dx)^2 + (dz)^2 = \frac{z^2(dz)^2}{z^2 - \Delta^2}.$$

Hierfür kann man schreiben:

$$(11) \qquad (dx)^2 = \frac{\Delta^2(dz)^2}{z^2 - \Delta^2};$$

*und dies ist also die Differentialgleichung der Kurve mpqa.*

Im Vorbeigehen sei bemerkt, daß für den *extremen Fall:* $r = R$ die Konstante $\Delta$ (8) zu *Null* wird; so daß also in diesem besonderen Falle die Differentialgleichung (11) übergehen wird in $dx = 0$, d. i. in

$$x = \text{const.}$$

Für den Fall: $r = R$ wird also die Kurve $mpqa$ eine *gerade Linie* sein; — was allerdings *a priori* zu erkennen gewesen wäre, direkt auf Grund der geometrischen Anschauung.

Zum allgemeinen Falle: $r < R$ zurückkehrend, erhalten wir aus (11)

$$dx = \frac{\Delta\, dz}{\sqrt{z^2 - \Delta^2}},$$

und hieraus durch Integration:

$$(12) \qquad x + C = \Delta \log\left(z + \sqrt{z^2 - \Delta^2}\right),$$

wo $C$ eine Konstante ist. Bringt man diese für jedweden Punkt $p$ der Kurve $mpqa$ geltende Gleichung (12) in Anwendung auf ihren Ausgangspunkt $m$, so folgt: $C = \Delta \log \Delta$. Und substituiert man diesen Wert von $C$ in (12), so erhält man sofort:

$$(13) \qquad x = \Delta \log\left(\frac{z + \sqrt{z^2 - \Delta^2}}{\Delta}\right).$$

*Dies also ist die eigentlich gesuchte Gleichung der Kurve mpqa.* Offenbar kann man dieselbe auch so schreiben:

$$(14) \qquad z + \sqrt{z^2 - \Delta^2} = \Delta\eta, \quad \text{wo} \quad \eta = e^{\frac{x}{\Delta}}.$$

Diese Formel (14) kann man auflösen nach der Wurzelgröße, und sodann zum Quadrat erheben. So ergibt sich:

$$z^2 - \Delta^2 = (\Delta\eta - z)^2,$$

Digitized by Google

d. i.

$$-\Delta^2 = \Delta^2\eta^2 - 2\Delta\eta z,$$

d. i.

$$z = \frac{\Delta}{2}(\eta + \eta^{-1}),$$

oder, falls man für $\eta$ seine in (14) angegebene Bedeutung substituiert:

$$z = \frac{\Delta}{2}\left(e^{\frac{x}{\Delta}} + e^{-\frac{x}{\Delta}}\right). \tag{15}$$

*Folglich ist die Kurve mpqa eine Kettenlinie.* — Q. e. d.

**Sich anschließende Betrachtung.** — Man kann dasjenige Flächenstück $F$ in Betracht ziehen, welches vom Rande der gebogenen Kreisfläche $(r)$ auf der Zylinderfläche $(R)$ umgrenzt ist. Insbesondere kann man nach derjenigen Gestalt fragen, welche dieses Flächenstück $F$ annehmen wird, sobald man dasselbe in einer Ebene ausbreitet.

Um hierauf näher einzugehen, wollen wir [vgl. die Figur] die Linie $(gp) = x$ ins Auge fassen, und auf der $xz$-Ebene, nicht nur in $p$ das schon genannte Perpendikel $pP$, sondern ebenso auch in $g$ ein Perpendikel $gG$ errichten, der Art, daß die Endpunkte $G$ und $P$ dieser Perpendikel beide auf der gegebenen Zylinderfläche $(R)$ gelegen sind. Alsdann ist $(GP) = (gp)$, und $(gp) = x$, mithin auch:

$$(GP) = x. \tag{16}$$

Wir setzen nun:

$$(\gamma G) = s, \tag{17}$$

indem wir dabei unter $(\gamma G)$ den *gegenseitigen geodätischen Abstand* der beiden Punkte $\gamma$ und $G$ auf der Zylinderfläche $(R)$ verstehen. Dabei soll $\gamma$ der in der vorigen Figur angegebene Punkt sein.

$P$ ist offenbar ein beliebiger Punkt auf der *Randkurve des Flächenstückes* $F$; und die in (16), (17) angegebenen Größen $x$, $s$ sind diejenigen rechtwinkligen Koordinaten, welche der Punkt $P$ besitzen wird, sobald man das Flächenstück $F$ in einer Ebene ausgebreitet hat. Will man also die Gleichung der Randkurve des Flächenstückes $F$ zur Zeit seines komplanierten Zustandes haben, so hat man nur nach derjenigen Gleichung zu suchen, welche zwischen den beiden Variablen $x$ und $s$ stattfindet.



Digitized by Google

Nun ergibt sich, unmittelbar aus der geometrischen Anschauung, daß

$$\cos\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{z}{R} \tag{18}$$

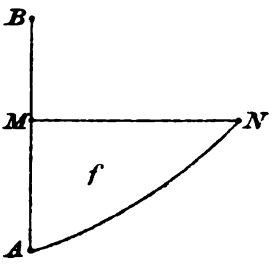
ist. Substituiert man aber hier für $s$ seinen Wert (15), so erhält man sofort:

$$\cos\left(\frac{s}{R}\right) = \frac{\Delta}{2R}\left(e^{\frac{z}{\Delta}} + e^{-\frac{z}{\Delta}}\right). \tag{19}$$

Diese Formel (19) repräsentiert also die gesuchte Gleichung zwischen $x$ und $s$. Mit anderen Worten: Die Formel (19) repräsentiert die Gleichung der Randkurve des Flächenstückes $F$ zur Zeit seines komplanierten Zustandes.

**Bemerkung.** — Ich habe versucht andere Aufgaben von ähnlicher Art zu behandeln, ohne dabei zu einfachen Resultaten zu gelangen. Die allgemeinste Aufgabe dieser Art würde etwa folgende sein.

In einer *gegebenen Oberfläche* ist irgend eine Sehne $AB$ konstruiert. An die Sehne $AB$ ist angesetzt ein *ebenes Flächenstück* $f$ oder $AMN$, welches begrenzt ist von einem Segment $AM$ jener Sehne, ferner von einer auf $AM$ senkrechten geraden Linie $MN$ und endlich von einer *gegebenen Kurve* $AN$. — Es soll diejenige Gestalt ermittelt werden, welche die Linie $MN$ annehmen wird, sobald man das Flächenstück $f$ einer mit $AB$ parallelen Biegung unterwirft, und in solcher Weise dafür sorgt, daß alle Punkte der Kurve $AN$ auf jene gegebene Oberfläche zu liegen kommen.




Ob eine solche Biegung der Fläche $f$ überhaupt möglich ist, wird selbstverständlich abhängig sein von der Beschaffenheit der gegebenen Oberfläche, sowie auch von der Beschaffenheit der gegebenen Kurve $AN$.

Eines der einfachsten Beispiele würde darin bestehen, daß man für die gegebene Oberfläche eine *Kugelfläche*, und für die Kurve $AN$ eine *gerade Linie* nimmt.

---

Druckfertig erklärt 10. II. 1904.]

Digitized by Google

# Differentialinvarianten und invariante Differentialgleichungen zweier zehngliedriger Gruppen.

Von

G. Noth.

## I.

### Bestimmung der Differentialinvarianten der $G_{10}$.

Es ist vorgelegt die größte irreduzible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene, welche zehngliedrig ist und (nach Lie, Transformationsgruppen II p. 433) folgendermaßen lautet:

$$G_{10}=\begin{vmatrix} p & xq+q' & q & \frac{1}{2}x^2q+xq' & xp-y'q' & y'p+\frac{1}{2}y'^2q & xp+2yq+y'q' \\ (y-xy')p-\frac{1}{2}xy'^2q-\frac{1}{2}y'^2q' & & & \frac{1}{2}x^2p+xyq+yq' & & & \\ (xy-\frac{1}{2}x^2y')p+(y^2-\frac{1}{4}x^2y'^2)q+(yy'-\frac{1}{2}xy'^2)q' & & & & & & \end{vmatrix}$$

und zwar ist für das daselbst stehende $z$ hier $y$ und für $y$ hier $y'$ gesetzt worden. Es bedeutet nun:

$$p=\frac{\partial f}{\partial x} \quad q=\frac{\partial f}{\partial y} \quad q'=\frac{\partial f}{\partial y'} \quad y'=\frac{dy}{dx}.$$

Die charakteristischen Funktionen dieser 10 infinitesimalen Transformationen berechnen wir nach der Formel:

$$U_i=y'\xi_i-\eta_i.$$

Da es auf einen Zahlenfaktor nicht ankommt, so lauten sie:

$$\begin{vmatrix} y' & x & 1 & x^2 & xy' & y'^2 & xy'-2y \\ y'(y-\frac{1}{2}xy') & & & x(y-\frac{1}{2}xy') & & (y-\frac{1}{2}xy')^2 & \end{vmatrix}.$$

Daß unsere zehn infinitesimalen Transformationen in der Tat eine Gruppe bilden, zeigt sich darin, daß allgemein gilt:

$$(X_iX_k)=\sum_1^{10}{}_s c_{iks}X_s(f).$$



Digitized by Google

Wir finden:

| | $X_1$ | $X_2$ | $X_3$ | $X_4$ | $X_5$ | $X_6$ | $X_7$ | $X_8$ | $X_9$ | $X_{10}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X_1$ | 0 | $X_3$ | 0 | $X_2$ | $X_1$ | 0 | $X_1$ | $-X_6$ | $\frac{1}{2}(X_5+X_7)$ | $X_6$ |
| $X_2$ | $-X_3$ | 0 | 0 | 0 | $-X_2$ | $X_1$ | $X_2$ | $\frac{1}{2}(X_5-X_7)$ | $X_4$ | $X_9$ |
| $X_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | $2X_3$ | $X_1$ | $X_3$ | $X_7$ |
| $X_4$ | $-X_2$ | 0 | 0 | 0 | $-2X_4$ | $X_5$ | 0 | $-X_9$ | 0 | 0 |
| $X_5$ | $-X_1$ | $X_2$ | 0 | $2X_4$ | 0 | $-2X_6$ | 0 | $-X_8$ | $X_9$ | 0 |
| $X_6$ | 0 | $-X_1$ | 0 | $-X_5$ | $2X_6$ | 0 | 0 | 0 | $-X_8$ | 0 |
| $X_7$ | $-X_1$ | $-X_2$ | $-2X_3$ | 0 | 0 | 0 | 0 | $X_8$ | $X_9$ | $2X_{10}$ |
| $X_8$ | $X_6$ | $\frac{1}{2}(X_7-X_5)$ | $-X_1$ | $X_9$ | $X_8$ | 0 | $-X_8$ | 0 | $X_{10}$ | 0 |
| $X_9$ | $-\frac{1}{2}(X_5+X_7)$ | $-X_4$ | $-X_2$ | 0 | $-X_9$ | $X_6$ | $-X_9$ | $-X_{10}$ | 0 | 0 |
| $X_{10}$ | $-X_6$ | $-X_9$ | $-X_7$ | 0 | 0 | 0 | $-2X_{10}$ | 0 | 0 | 0 |

Wenn wir nun die Differentialinvarianten der Gruppe $G_{10}$ be-

Digitized by Google

stimmen wollen, so müssen wir die Transformationen erweitern. Dies geschieht bekanntlich nach der Formel:

$$\eta_n = \frac{\delta y^{(n)}}{\delta t} = -\frac{d^n U}{dx^n} + y^{(n+1)} \cdot \frac{\partial U}{\partial y'}.$$

Hierbei stellt $\eta_n$ den Faktor von $q^{(n)}$ dar, oder von $\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}$. Wir werden nun aber nicht gleich unsere ganze zehngliedrige Gruppe erweitern, und dann die Differentialinvarianten zu bestimmen suchen, sondern wir gehen zunächst von einer Untergruppe aus, suchen deren Invarianten, und benutzen dann den Satz, daß die Differentialinvarianten der ganzen Gruppe Funktionen sein müssen der Differentialinvarianten der Untergruppe. Das Schema der Klammeroperation zeigt uns aber, daß wir folgende Untergruppen benutzen können:

$G_1 : p$

$G_2 : p \quad xq + q' \quad q$

$G_4 : p \quad xq + q' \quad q \quad \frac{1}{2}x^2 q + xq'$

$G_5 : p \quad xq + q' \quad q \quad \frac{1}{2}x^2 q + xq'' \quad xp - y'q'$

$G_6 : p \quad xq + q' \quad q \quad \frac{1}{2}x^2 q + xq' \quad xp - y'q' \quad y'p + \frac{1}{2}y'^2 q$

$G_7 : p \quad xq + q' \quad q \quad \frac{1}{2}x^2 q + xq' \quad xp - y'q' \quad y'p + \frac{1}{2}y'^2 q \quad xp + 2yq + y'q'.$

Außerdem überlegen wir, daß, wenn wir eine Differentialinvariante und ein invariantes Bogenelement gefunden haben, die übrigen Differentialinvarianten der Gruppe damit bestimmt sind. Das invariante Bogenelement finden wir aber, indem wir bei der Erweiterung auch $dx = \alpha$ mit berücksichtigen. Es wird dann:

$$\frac{\delta \alpha}{\delta t} = d\xi.$$

Ist $I$ die gefundene Differentialinvariante der Gruppe, und $d\omega$ das resultierende Bogenelement, dann ist:

$$\frac{d^n I}{d\omega^n} = I_n$$

auch eine Differentialinvariante der gegebenen Gruppe. Natürlich wählen wir als $I$ die niedrigste Differentialinvariante, die vorhanden ist, um die Rechnung so einfach wie möglich zu gestalten.

Wir schreiten jetzt zur Bestimmung der Invarianten.

Digitized by Google

Die *eingliedrige* Untergruppe:

$$p$$

liefert bei der Erweiterung nichts, und die Gleichung:

$$p = 0 \tag{1}$$

sagt nur aus, daß unsere gesuchte Invariante frei von $x$ sein muß.

Die *dreigliedrige* Untergruppe:

$$p \quad xq + q' \quad q$$

liefert bei der Erweiterung auch nichts, und die beiden neuen Gleichungen:

$$q = 0, \tag{2}$$

$$q' = 0, \tag{3}$$

die sich daraus ergeben, sagen nur aus, daß die gesuchte Invariante auch von $y$ und $y'$ frei sein muß.

Die *viergliedrige* Untergruppe:

$$p \quad xq + q' \quad q \quad \tfrac{1}{2}x^2q + xq'$$

liefert als neue Gleichung:

$$\tfrac{1}{2}x^2q + xq' + q'' = 0,$$

oder wegen der Gleichungen (2) und (3):

$$q'' = 0. \tag{4}$$

Die gesuchte Differentialinvariante ist also auch frei von $y''$.

Die *fünfgliedrige* Untergruppe:

$$p \quad xq + q' \quad q \quad \tfrac{1}{2}x^2q + xq' \quad xp - y'q'$$

muß bis zur vierten Ordnung erweitert werden; dann können wir $2 + 4 - 5 = 1$ Invarianten erwarten. Wir erweitern zugleich in bezug auf $\alpha$ und erhalten die neue Gleichung:

$$xp - y'q' - 2y''q'' - 3y'''q''' - 4y^{IV}q^{IV} + \alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

oder wegen der Gleichungen (1) (3) (4):

$$3y'''q''' + 4y^{IV}q^{IV} - \alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0. \tag{5}$$

Wir bekommen das simultane System:

$$\frac{dy'''}{3y'''} = \frac{dy^{IV}}{4y^{IV}} = -\frac{d\alpha}{\alpha}.$$

Digitized by Google

Unsere Invariante lautet daher:

$$K_4 = \frac{y^{IV}}{y'''^{5/3}},$$

und als invariantes Bogenelement finden wir:

$$d\omega = y'''^{1/3} \cdot dx.$$

Nun haben wir aber oben gesehen, daß sich aus $K_4$ und $d\omega$ alle übrigen Invarianten unsrer fünfgliedrigen Gruppe berechnen lassen. Es ist:

$$K_{i+4} = \frac{d^i K_4}{d\omega^i} \qquad i = 1 \cdots n$$

$$\frac{dK_4}{d\omega} = \frac{y^V}{y'''^{5/3}} - \frac{4}{3} K_4^2 \qquad K_5 = \frac{y^V}{y'''^{5/3}},$$

allgemein gilt:

$$K_i = \frac{y^{(i)}}{y'''^{i/3}} \qquad i = 4 \cdots n.$$

Die *sechsgliedrige* Untergruppe:

$$p \quad xq + q' \quad q \quad \tfrac{1}{2}x^2 q + xq' \quad xp - y'q' \quad y'p + \tfrac{1}{2}y'^2 q$$

liefert bei der Erweiterung bis zur fünften Ordnung und in bezug auf $\alpha$ die neue Gleichung:

$$y'p + \tfrac{1}{2}y'^2 q - y''^2 q'' - 3y''y'''q''' - (4y''y^{IV} + 3y'''^2)q^{IV} -$$
$$- (5y''y^V + 10y'''y^{IV})q^V + \alpha y'' \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0,$$

oder, wenn wir hierzu die mit $y''$ multiplizierte und bis zur fünften Ordnung erweiterte Gleichung (5) addieren und außerdem die Gleichungen (1), (2) und (4) benutzen:

$$3y'''^2 q^{IV} + 10 y'''y^{IV} q^V = 0. \tag{6}$$

Jetzt führen wir die $K$ und $d\omega$ als neue Größen ein:

$$3 \frac{\partial f}{\partial K_4} + 10 K_4 \frac{\partial f}{\partial K_5} = 0. \tag{6'}$$

Das simultane System:

$$\frac{dK_4}{3} = \frac{dK_5}{10 K_4} = \frac{d(d\omega)}{0}$$

liefert uns als niedrigste Invariante unsrer sechsgliedrigen Untergruppe:

$$L_1 = 5 K_4^2 - 3 K_5,$$

Digitized by Google

während das Bogenelement dasselbe bleibt, wie in der fünfgliedrigen Untergruppe:

$$d\omega = y'''^{1/3} \cdot dx.$$

Die übrigen Invarianten lassen sich wieder aus $L_1$ und $d\omega$ berechnen:

$$\frac{dL_1}{d\omega} = 10K_4\frac{dK_4}{d\omega} - 3\frac{dK_5}{d\omega} = 10K_4(K_5 - \tfrac{4}{3}K_4^2) - 3(K_6 - \tfrac{5}{3}K_4K_5),$$

$$L_2 = -40K_4^3 + 45K_4K_5 - 9K_6.$$

Ebenso wird:

$$L_3 = 35K_4^4 - 105K_4^2K_5 + 63K_4K_6 - 9K_7$$

$$L_4 = 840K_4^5 - 630K_4^3K_5 - 630K_4^2K_6 + 315K_4K_5^2 + 252K_4K_7 - 27K_8$$

$$L_5 = -5775K_4^6 + 11025K_4^4K_5 - 630K_4^3K_6 - 4725K_4^2K_5^2 - \\ - 1134K_4^2K_7 + 1134K_4K_5K_6 + 324K_4K_8 - 27K_9 \text{ usw.}$$

Die *siebengliedrige* Untergruppe:

$$p \quad xq + q' \quad q \quad \tfrac{1}{2}x^2q + xq' \quad xp - y'q'$$
$$y'p + \tfrac{1}{2}y'^2q \quad xp + 2yq + y'q'$$

liefert bei der Erweiterung bis zur sechsten Ordnung und in bezug auf $\alpha$ die neue Gleichung:

$$xp + 2yq + y'q' - y'''q''' - 2y^{IV}q^{IV} - 3y^Vq^V - 4y^{VI}q^{VI} + \alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Nun ist $p = 0$ $q = 0$ $q' = 0$. Addieren wir (5) zu dieser Gleichung, so erhalten wir:

$$(7) \qquad y'''q''' + y^{IV}q^{IV} + y^Vq^V + y^{VI}q^{VI} = 0.$$

Hierin führen wir die $K$ und $d\omega$ als neue Größen ein:

$$(7') \qquad K_4\frac{\partial f}{\partial K_4} + 2K_5\frac{\partial f}{\partial K_5} + 3K_6\frac{\partial f}{\partial K_6} - d\omega\frac{\partial f}{\partial (d\omega)} = 0.$$

Führen wir endlich noch die $L$ ein, so folgt:

$$(7'') \qquad 2L_1\frac{\partial f}{\partial L_1} + 3L_2\frac{\partial f}{\partial L_2} - d\omega\frac{\partial f}{\partial (d\omega)} = 0.$$

Das simultane System:

$$\frac{dL_1}{2L_1} = \frac{dL_2}{3L_2} = -\frac{d(d\omega)}{d\omega}$$

liefert als niedrigste Differentialinvariante unserer siebengliedrigen Gruppe:

Digitized by Google

$$M_2 = \frac{L_2}{L_1^{3/2}}$$

und als invariantes Bogenelement:

$$d\sigma = L_1^{1/2} \cdot d\omega.$$

Wir finden weiter:

$$\frac{dM_2}{d\sigma} = \frac{2L_1 \frac{dL_2}{d\omega} - 3L_2 \frac{dL_1}{d\omega}}{2L_1^3} = \frac{L_3}{L_1^2} + 5 - \tfrac{1}{2} M_2^2 \qquad M_3 = \frac{L_3}{L_1^2}.$$

Allgemein gilt:

$$M_i = \frac{L_i}{L_1^{\frac{i+1}{2}}} \qquad i = 2 \cdots n.$$

Die *zehngliedrige* Gruppe:

$$p \quad xq + q' \quad q \quad \tfrac{1}{2}x^2q + xq' \quad xp - y'q' \quad y'p + \tfrac{1}{2}y'^2q \quad xp + 2yq + y'q'.$$
$$(y - xy')p - \tfrac{1}{2}xy'^2q - \tfrac{1}{2}y'^2q' \quad \tfrac{1}{2}x^2p + xyq + yq'$$
$$(xy - \tfrac{1}{2}x^2y')p + (y^2 - \tfrac{1}{4}x^2y'^2)q + (yy' + \tfrac{1}{2}xy'^2)q'$$

liefert bei der Erweiterung bis zur neunten Ordnung und in bezug auf $\alpha$ die drei neuen Gleichungen:

$$\text{(A)} \begin{cases} (y - xy')p - \tfrac{1}{2}xy'^2q - \tfrac{1}{2}y'^2q' - (y'y'' - xy''^2)q'' - (y'y''' - \\ - 3xy''y''')q''' - (y'y^{IV} - 2y''y''' - 3xy'''^2 - 4xy''y^{IV})q^{IV} - \\ - (y'y^V - 5y''y^{IV} - 5y'''^2 - 5xy''y^V - 10xy'''y^{IV})q^V - \\ - (y'y^{VI} - 9y''y^V - 25y'''y^{IV} - 6xy''y^{VI} - 15xy'''y^V - \\ - 10xy^{IV2})q^{VI} - (y'y^{VII} - 14y''y^{VI} - 49y'''y^V - 35y^{IV2} - \\ - 7xy''y^{VII} - 21xy'''y^{VI} - 35xy^{IV}y^V)q^{VII} - (y'y^{VIII} - \\ - 20y''y^{VII} - 84y'''y^{VI} - 154y^{IV}y^V - 8xy''y^{VIII} - 28xy'''y^{VII} - \\ - 56xy^{IV}y^{VI} - 35xy^{V2})q^{VIII} - (y'y^{IX} - 27y''y^{VIII} - \\ - 132y'''y^{VII} - 294y^{IV}y^{VI} - 189y^{V2} - 9xy''y^{IX} - \\ - 36xy'''y^{VIII} - 84xy^{IV}y^{VII} - 126xy^Vy^{VI})q^{IX} - \alpha xy''\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \end{cases}$$

$$\text{(B)} \begin{cases} \tfrac{1}{2}x^2p + xyq + yq' - (xy'' - y')q'' - 2xy'''q''' - (2y''' + \\ + 3xy^{IV})q^{IV} - (5y^{IV} + 4xy^V)q^V - (9y^V + 5xy^{VI})q^{VI} - \\ - (14y^{VI} + 6xy^{VII})q^{VII} - (20y^{VII} + 7xy^{VIII})q^{VIII} - \\ - (27y^{VIII} + 8xy^{IX})q^{IX} + \alpha x\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0, \end{cases}$$

Digitized by Google

$$
(\mathbf{C})\quad \begin{cases}
(xy - \tfrac{1}{2}x^2y')\,p + (y^2 - \tfrac{1}{4}x^2y'^2)\,q + (yy' - \tfrac{1}{2}xy'^2)\,q' - \\
-(xy'y'' - \tfrac{1}{2}y'^2 - \tfrac{1}{2}x^2y''^2)q'' - (yy''' + xy'y''' - \tfrac{3}{2}x^2y''y''')q''' - \\
-(2yy^{IV} + 2y'y''' + xy'y^{IV} - 2xy''y''' - 2x^2y''y^{IV} - \\
-\tfrac{5}{2}x^2y'''^2)\,q^{IV} - (3yy^V + 5y'y^{IV} + xy'y^V - 5xy''y^{IV} - \\
-5xy'''^2 - \tfrac{5}{2}x^2y''y^V - 5x^2y'''y^{IV})\,q^V - (4yy^{VI} + 9y'y^V - \\
-5y'''^2 + xy'y^{VI} - 9xy''y^V - 25xy'''y^{IV} - 3x^2y''y^{VI} - \\
-\tfrac{15}{2}x^2y'''y^V - 5x^2y^{IV2})\,q^{VI} - (5yy^{VII} + 14y'y^{VI} - 35y'''y^{IV} + \\
+xy'y^{VII} - 14xy''y^{VI} - 49xy'''y^V - 35xy^{IV2} - \tfrac{7}{2}x^2y''y^{VII} - \\
-\tfrac{21}{2}x^2y'''y^{VI} - \tfrac{35}{2}x^2y^{IV}y^V)\,q^{VII} - (6yy^{VIII} + 20y'y^{VII} - \\
-84y'''y^V - 70y^{IV2} + xy'y^{VIII} - 20xy''y^{VII} - 84xy'''y^{VI} - \\
-154xy^{IV}y^V - 4x^2y''y^{VIII} - 14x^2y'''y^{VII} - 28x^2y^{IV}y^{VI} - \\
-\tfrac{35}{2}x^2y^{V2})\,q^{VIII} - (7yy^{IX} + 27y'y^{VIII} - 168y'''y^{VI} - \\
-378y^{IV}y^V + xy'y^{IX} - 27xy''y^{VIII} - 132xy'''y^{VII} - \\
-294xy^{IV}y^{VI} - 189xy^{V2} - \tfrac{9}{2}x^2y''y^{IX} - 18x^2y'''y^{VIII} - \\
-42x^2y^{IV}y^{VII} - 63x^2y^Vy^{VI})\,q^{IX} + \alpha(y - \tfrac{1}{2}x^2y')\,\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.
\end{cases}
$$

Diese drei Gleichungen lassen sich nun bedeutend vereinfachen. Zu diesem Zwecke müssen wir die andern infinitesimalen Transformationen auch bis zur neunten Ordnung erweitern; berücksichtigen wir, daß $p = 0$, $q = 0$, $q' = 0$, $q'' = 0$ ist, so geben (5) (6) (7) bis zur neunten Ordnung erweitert:

$$
(\mathbf{V})\quad \begin{cases}
3y'''q''' + 4y^{IV}q^{IV} + 5y^Vq^V + 6y^{VI}q^{VI} + 7y^{VII}q^{VII} + \\
+ 8y^{VIII}q^{VIII} + 9y^{IX}q^{IX} - \alpha\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0
\end{cases}
$$

$$
(\mathbf{VI})\quad \begin{cases}
3y'''^2q^{IV} + 10y'''y^{IV}q^V + (15y'''y^V + 10y^{IV2})\,q^{VI} + \\
+(21y'''y^{VI} + 35y^{IV}y^V)\,q^{VII} + (28y'''y^{VII} + 56y^{IV}y^{VI} + \\
+35y^{V2})q^{VIII} + (36y'''y^{VIII} + 84y^{IV}y^{VII} + 126y^Vy^{VI})q^{IX} = 0
\end{cases}
$$

$$
(\mathbf{VII})\quad \begin{cases}
y'''q''' + y^{IV}q^{IV} + y^Vq^V + y^{VI}q^{VI} + y^{VII}q^{VII} + y^{VIII}q^{VIII} + \\
+ y^{IX}q^{IX} = 0.
\end{cases}
$$

Addieren wir zu (B) die mit $x$ multiplizierte Differenz der Gleichungen (V) und (VII), so erhalten wir:

$$
(9)\quad 2y'''q^{IV} + 5y^{IV}q^V + 9y^Vq^{VI} + 14y^{VI}q^{VII} + 20y^{VII}q^{VIII} + \\
+ 27y^{VIII}q^{IX} = 0.
$$

Digitized by Google

Addieren wir zu (A) die mit $-y''$ multiplizierte Gleichung (9), die mit $-x$ multiplizierte Gleichung (VI), die mit $-xy''$ multiplizierte Gleichung (V) und die mit $y'$ multiplizierte Gleichung (VII), so geht Gleichung (A) über in:

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{c} 5y''^2q^{V}+25y'''y^{IV}q^{VI}+(49y'''y^{V}+35y^{IV^2})q^{VII}+ \\ +(84y'''y^{VI}+154y^{IV}y^{V})q^{VIII}+(132y'''y^{VII}+294y^{IV}y^{VI}+ \\ +189y^{V^2})q^{IX}=0. \end{array}\right.$$

Addieren wir endlich zu (C) die mit $-\frac{x^2}{2}$ multiplizierte Gleichung (VI), die mit $-\frac{x^2y''}{2}$ multiplizierte Gleichung (V), die mit $-x$ multiplizierte Gleichung (8), die mit $y'-xy''$ multiplizierte Gleichung (9), die mit $xy'$ multiplizierte Gleichung (VII), und die mit $y$ multiplizierte Differenz von (V) und dem Doppelten von (VII), so erhalten wir:

$$(10)\quad \begin{array}{c} 5y'''^2q^{VI}+35y'''y^{IV}q^{VII}+(84y'''y^{V}+70y^{IV^2})q^{VIII}+ \\ +(168y'''y^{VI}+378y^{IV}y^{V})q^{IX}=0. \end{array}$$

Wir haben es jetzt nur noch mit den drei Gleichungen (8) (9) (10) zu tun. Führen wir die $K$ und $d\omega$ als neue Größen ein, so erhalten wir:

$$(8')\quad \begin{array}{c} 5\frac{\partial f}{\partial K_5}+25K_4\frac{\partial f}{\partial K_6}+(49K_5+35K_4^2)\frac{\partial f}{\partial K_7}+ \\ +(84K_6+154K_4K_5)\frac{\partial f}{\partial K_8}+(132K_7+294K_4K_6+189K_5^2)\frac{\partial f}{\partial K_9}=0, \end{array}$$

$$(9')\quad 2\frac{\partial f}{\partial K_4}+5K_4\frac{\partial f}{\partial K_5}+9K_5\frac{\partial f}{\partial K_6}+14K_6\frac{\partial f}{\partial K_7}+20K_7\frac{\partial f}{\partial K_8}+27K_8\frac{\partial f}{\partial K_9}=0,$$

$$(10')\quad 5\frac{\partial f}{\partial K_6}+35K_4\frac{\partial f}{\partial K_7}+(84K_5+70K_4^2)\frac{\partial f}{\partial K_8}+(168K_6+378K_4K_5)\frac{\partial f}{\partial K_9}=0.$$

Führen wir jetzt die $L$ in diese drei Gleichungen ein, so nehmen sie folgende Form an:

$$(8'')\quad -5\frac{\partial f}{\partial L_1}+49L_1\frac{\partial f}{\partial L_2}+84L_2\frac{\partial f}{\partial L_4}+(132L_3-189L_1^2)\frac{\partial f}{\partial L_5}=0,$$

$$(9'')\quad \begin{array}{c} 5K_4\frac{\partial f}{\partial L_1}-3L_1\frac{\partial f}{\partial L_2}-49K_4L_1\frac{\partial f}{\partial L_3}+(70L_1^2+4L_3-84K_4L_2)\frac{\partial f}{\partial L_4}+ \\ +(3L_4+84L_1L_2-132K_4L_3+189K_4L_1^2)\frac{\partial f}{\partial L_5}=0, \end{array}$$

$$(10'')\quad -5\frac{\partial f}{\partial L_2}+84L_1\frac{\partial f}{\partial L_4}+56L_2\frac{\partial f}{\partial L_5}=0.$$

Digitized by Google

Addieren wir zu (9″) die mit $K_4$ multiplizierte Gleichung (8″), so geht erstere über in:

$$(\bar{9}'') \quad -3L_1\frac{\partial f}{\partial L_2}+(70L_1^2+4L_3)\frac{\partial f}{\partial L_4}+(3L_4+84L_1L_2)\frac{\partial f}{\partial L_5}=0.$$

Führen wir endlich noch die $M$ und $d\sigma$ als neue Größen ein, so erhalten wir:

$$(8''') \quad 15M_2\frac{\partial f}{\partial M_2}+(20M_3+98)\frac{\partial f}{\partial M_3}+(25M_4+168M_2)\frac{\partial f}{\partial M_4}+$$
$$+(30M_5+264M_3-378)\frac{\partial f}{\partial M_5}-5d\sigma\cdot\frac{\partial f}{\partial(d\sigma)}=0,$$

$$(9''') \quad -3\frac{\partial f}{\partial M_2}+(4M_3+70)\frac{\partial f}{\partial M_4}+(3M_4+84M_2)\frac{\partial f}{\partial M_5}=0,$$

$$(10''') \quad -5\frac{\partial f}{\partial M_2}+84\frac{\partial f}{\partial M_4}+56M_2\frac{\partial f}{\partial M_5}=0.$$

(10‴) liefert uns das simultane System:

$$-\frac{dM_2}{5}=\frac{dM_3}{0}=\frac{dM_4}{84}=\frac{dM_5}{56M_2}=\frac{d(d\sigma)}{0}$$

mit den Lösungen:

$$M_3,\ d\sigma \qquad N_1=84M_2+5M_4, \qquad N_2=28M_2^2+5M_5.$$

Diese Größen führen wir in (8‴) und (9‴) ein, und erhalten:

$$(8^{IV}) \quad (20M_3+98)\frac{\partial f}{\partial M_3}+25N_1\frac{\partial f}{\partial N_1}+$$
$$+(30N_2+1320M_3-1890)\frac{\partial f}{\partial N_2}-5d\sigma\frac{\partial f}{\partial(d\sigma)}=0,$$

$$(9^{IV}) \quad (20M_3+98)\frac{\partial f}{\partial N_1}+3N_1\frac{\partial f}{\partial N_2}=0.$$

(9ᴵⱽ) liefert uns das simultane System:

$$\frac{dM_3}{0}=\frac{dN_1}{20M_3+98}=\frac{dN_2}{3N_1}=\frac{d(d\sigma)}{0}$$

mit den Lösungen:

$$M_3, \quad d\sigma, \quad P=3N_1^2-4N_2(10M_3+49).$$

Durch Einführung dieser Größen geht (8ᴵⱽ) über in:

$$(8^{V}) \quad (20M_3+98)\frac{\partial f}{\partial M_3}+$$
$$+(50P-52800M_3^2-183120M_3+370440)\frac{\partial f}{\partial P}-5d\sigma\frac{\partial f}{\partial(d\sigma)}=0.$$

Wir erhalten das simultane System:

Digitized by Google

$$\frac{d M_3}{20 M_3 + 98} = \frac{dP}{50 P - 52800 M_3^2 - 183120 M_3 + 370440} = -\frac{d(d\sigma)}{5\, d\sigma}.$$

Dies liefert als invariantes Bogenelement:

$$ds = (10 M_3 + 49)^{1/4} \cdot d\sigma$$

und als niedrigste Invariante der zehngliedrigen Gruppe von Berührungstransformationen:

$$I = \frac{5 P + 5572 (10 M_3 + 49) - 264 (10 M_3 + 49)^2}{(10 M_3 + 49)^{5/2}}.$$

Oder, wenn wir $I$ ausdrücken in den Invarianten der siebengliedrigen Untergruppe:

$$I = \frac{15 (84 M_2 + 5 M_4)^2 - (10 M_3 + 49)(100 M_5 + 2640 M_3 + 560 M_2^2 + 7364)}{(10 M_3 + 49)^{5/2}},$$

in denen der sechsgliedrigen Untergruppe:

$$ds = (10 L_3 + 49 L_1^3)^{1/4} \cdot d\omega,$$

$$I = \frac{15 (84 L_1 L_2 + 5 L_4)^2 - (10 L_3 + 49 L_1^3)(100 L_5 + 2640 L_1 L_3 + 560 L_2^2 + 7364 L_1^3)}{(10 L_3 + 49 L_1^3)^{5/2}},$$

in denen der fünfgliedrigen Untergruppe (abgesehen vom Faktor $\sqrt{3}$):

$$ds = (175 K_4^4 - 280 K_4^2 K_5 + 70 K_4 K_6 + 49 K_5^2 - 10 K_7)^{1/4} \cdot d\omega,$$

während $I$ ein Bruch ist mit dem Nenner (abgesehen vom Faktor 243):

$$(175 K_4^4 - 280 K_4^2 K_5 + 70 K_4 K_6 + 49 K_5^2 - 10 K_7)^{5/2}$$

und dem Zähler (abgesehen vom Faktor $-324$):

$$\begin{aligned}
&1225000 K_4^{10} - 4900000 K_4^8 K_5 + 1225000 K_4^7 K_6 + 6737500 K_4^6 K_5^2 - \\
&- 175000 K_4^6 K_7 - 2940000 K_4^5 K_5 K_6 - 3626000 K_4^4 K_5^3 + \\
&+ 420000 K_4^4 K_5 K_7 + 367500 K_4^4 K_6^2 - 17500 K_4^4 K_9 + \\
&+ 1690500 K_4^3 K_5^2 K_6 + 94500 K_4^3 K_5 K_8 + 42000 K_4^3 K_6 K_7 + \\
&+ 689675 K_4^2 K_5^4 + 562800 K_4^2 K_5^3 K_7 - 705600 K_4^2 K_5 K_6^2 + \\
&+ 28000 K_4^2 K_5 K_9 - 31500 K_4^2 K_6 K_8 - 12000 K_4^2 K_7^2 + \\
&+ 695800 K_4 K_5^3 K_6 - 103950 K_4 K_5^2 K_8 + 142800 K_4 K_5 K_6 K_7 + \\
&+ 117600 K_4 K_6^3 - 7000 K_4 K_6 K_9 + 9000 K_4 K_7 K_8 - 360836 K_5^5 + \\
&+ 203000 K_5^3 K_7 - 235200 K_5^2 K_6^2 - 4900 K_5^2 K_9 + 37800 K_5 K_6 K_8 - \\
&- 26400 K_5 K_7^2 - 16800 K_6^2 K_7 + 1000 K_7 K_9 - 1125 K_8^2.
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Oder ausgedrückt in den $y^{(i)}$:

$$ds = \frac{1}{y'''}(175^{IV\,4} - 280y'''y^{IV\,2}y^{V} +$$
$$+ 70\,y'''^{2}y^{IV}y^{VI} + 49y'''^{2}y^{V\,2} - 10\,y'''^{3}y^{VII})^{1/4} \cdot dx.$$

$I$ ist ein Bruch mit dem Nenner:

$$(175y^{IV\,4} - 280y'''y^{IV\,2}y^{V} + 70y'''^{2}y^{IV}y^{VI} + 49y'''^{2}y^{V\,2} - 10y'''^{3}y^{VII})^{5/4}$$

und dem Zähler:

$$1225000\,y^{IV\,10} - 4900000\,y'''y^{IV\,8}y^{V} + 1225000\,y'''^{2}y^{IV\,7}y^{VI} +$$
$$+ 6737500\,y'''^{2}y^{IV\,6}y^{V\,2} - 175000y'''^{3}y^{IV\,6}y^{VII} -$$
$$- 2940000\,y'''^{3}y^{IV\,5}y^{V}y^{VI} - 3626000y'''^{3}y^{IV\,4}y^{V\,3} +$$
$$+ 420000\,y'''^{4}y^{IV\,4}y^{V}y^{VII} + 367500\,y'''^{4}y^{IV\,4}y^{VI\,2} -$$
$$+ 17500\,y'''^{5}y^{IV\,4}y^{IX} + 1690500\,y'''^{4}y^{IV\,3}y^{V\,2}y^{VI} +$$
$$+ 94500\,y'''^{5}y^{IV\,3}y^{V}y^{VIII} + 42000\,y'''^{5}y^{IV\,3}y^{VI}y^{VII} +$$
$$+ 689675\,y'''^{4}y^{IV\,2}y^{V\,4} - 562800\,y'''^{5}y^{IV\,2}y^{V\,2}y^{VII} -$$
$$- 705600\,y'''^{5}y^{IV\,2}y^{V}y^{VI\,2} + 28000\,y'''^{6}y^{IV\,2}y^{V}y^{IX} -$$
$$- 31500\,y'''^{6}y^{IV\,2}y^{VI}y^{VIII} - 12000\,y'''^{6}y^{IV\,2}y^{VII\,2} +$$
$$+ 695800\,y'''^{5}y^{IV}y^{V\,3}y^{VI} - 103950\,y'''^{6}y^{IV}y^{V\,2}y^{VIII} +$$
$$+ 142800\,y'''^{6}y^{IV}y^{V}y^{VI}y^{VII} + 117600\,y'''^{6}y^{IV}y^{VI\,3} -$$
$$- 7000\,y'''^{7}y^{IV}y^{VI}y^{IX} + 9000\,y'''^{7}y^{IV}y^{VII}y^{VIII} -$$
$$- 360836y'''^{5}y^{V\,5} + 203000y'''^{6}y^{V\,3}y^{VII} - 235200y'''^{6}y^{V\,2}y^{VI\,2} -$$
$$- 4900y'''^{7}y^{V\,2}y^{IX} + 37800y'''^{7}y^{V}y^{VI}y^{VIII} - 26400y'''^{7}y^{V}y^{VII\,2} -$$
$$- 16800y'''^{7}y^{VI\,2}y^{VII} + 1000y'''^{8}y^{VII}y^{IX} - 1125y'''^{8}y^{VIII\,2}.$$

## II.

### Die invarianten Differentialgleichungen der $G_{10}$.

Wir wenden uns jetzt der Aufgabe zu, die bei unsrer zehngliedrigen irreduziblen Gruppe von Berührungstransformationen invarianten Differentialgleichungen zu bestimmen. Wir benutzen dabei den Satz von Lie (Math. Annalen XXXII p. 219): „Sucht man alle, bei einer vorgelegten Gruppe $B_1(f) \ldots B_r(f)$ invarianten Differentialgleichungen $f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$, deren Ordnungszahl $m$ nicht größer als $r-2$ ist, so muß man die Determinante $\Delta = \left| \xi_i \eta_i \eta_i^{(1)} \cdots \eta_i^{(r-1)} \right|$ bilden. Verschwindet dieselbe nicht

Digitized by Google

identisch, so liefern ihre Faktoren, gleich Null gesetzt, die gesuchten Differentialgleichungen."

In unserem Fall ist $r = 10$, also $m \leqq 8$ zu nehmen. Da $p = 0$, $q = 0$, $q' = 0$, $q'' = 0$ ist, so erhalten wir gemäß den vorangegangenen Rechnungen folgende sechsreihige Determinante (siehe Gleichung (5)—(10)):

$$\begin{vmatrix} 3y''' & 4y^{IV} & 5y^{V} & 6y^{VI} & 7y^{VII} & 8y^{VIII} \\ 0 & 3y'''^2 & 10y'''y^{IV} & 15y'''y^{V}+10y^{IV2} & 21y'''y^{VI}+ & 28y'''y^{VII}+ \\ & & & & +35y^{IV}y^{V} & +56y^{IV}y^{VI}+35y^{V2} \\ y''' & y^{IV} & y^{V} & y^{VI} & y^{VII} & y^{VIII} \\ 0 & 0 & 5y'''^2 & 25y'''y^{IV} & 49y'''y^{V}+ & 84y'''y^{VI}+ \\ & & & & 35y^{IV2} & +154y^{IV}y^{V} \\ 0 & 2y''' & 5y^{IV} & 9y^{V} & 14y^{VI} & 20y^{VII} \\ 0 & 0 & 0 & 5y'''^2 & 35y'''y^{IV} & 84y'''y^{V}+70y^{IV2} \end{vmatrix}$$

Subtrahieren wir von der ersten Zeile die mit 3 multiplizierte dritte Zeile, so erhalten wir:

$$\Delta = y''' \cdot \begin{vmatrix} y^{IV} & 2y^{V} & 3y^{VI} & 4y^{VII} & 5y^{VIII} \\ 3y'''^2 & 10y'''y^{IV} & 15y'''y^{V}+ & 21y'''y^{VI}+ & 28y^{III}y^{VII}+ \\ & & +10y^{IV2} & +35y^{IV}y^{V} & +56y^{IV}y^{VI}+35y^{V2} \\ 0 & 5y'''^2 & 25y'''y^{IV} & 49y'''y^{V} & 84y'''y^{VI}+ \\ & & & +35y^{IV2} & +154y^{IV}y^{V} \\ 2y''' & 5y^{IV} & 9y^{V} & 14y^{VI} & 20y^{VII} \\ 0 & 0 & 5y'''^2 & 35y'''y^{IV} & 84y'''y^{V}+70y^{IV2} \end{vmatrix}.$$

Jetzt subtrahieren wir von der mit 2 multiplizierten zweiten Zeile die mit $3y'''$ multiplizierte vierte Zeile, und von der mit $2y'''$ multiplizierten ersten Zeile die mit $y^{IV}$ multiplizierte vierte Zeile. Das liefert:

$$= -\frac{y''}{2} \cdot \begin{vmatrix} 4y'''y^{V}-5y^{IV2} & 6y'''y^{VI}-9y^{IV}y^{V} & 8y'''y^{VII}- & 10y'''y^{VIII}- \\ & & -14y^{IV}y^{VI} & -20y^{IV}y^{VII} \\ 5y'''y^{IV} & 3y'''y^{V}+20y^{IV2} & 70y^{IV}y^{V} & -4y'''y^{VII}+ \\ & & & +112y^{IV}y^{VI}+70y^{V2} \\ 5y'''^2 & 25y'''y^{IV} & 49y'''y^{V}+ & 84y'''y^{VI}+154y^{IV}y^{V} \\ & & +35y^{IV2} & \\ 0 & 5y'''^2 & 35y'''y^{IV} & 84y'''y^{V}+70y^{IV2} \end{vmatrix}.$$

Digitized by Google

Wir addieren zu der mit $5y'''$ multiplizierten ersten Zeile die mit $5y^{IV}$ multiplizierte zweite Zeile und die mit $-4y^{V}$ multiplizierte dritte Zeile, und zu der mit $y'''$ multiplizierten zweiten Zeile die mit $-y^{IV}$ multiplizierte dritte Zeile und erhalten:

$$\Delta = -\frac{y'''}{2}\begin{vmatrix} 30y'''^2y^{VI} - & 40y'''^2y^{VII} - & 50y'''^2y^{VIII} - \dots \\ -130y'''y^{IV}y^{V} + & -70y'''y^{IV}y^{VI} + & \\ +100y^{IV^3} & +210y^{IV^2}y^{V} - & \\ & -196y'''y^{V^2} & \\ 3y'''^2y^{V} - & 21y'''y^{IV}y^{V} - & -4y'''^2y^{VII} + 28y'''y^{IV}y^{VI} + \\ -5y'''y^{IV^2} & -35y^{IV^3} & +70y'''y^{V^2} - 154y^{IV^2}y^{V} \\ 5y'''^2 & 35y'''y^{IV} & 84y'''y^{V} + 70y^{IV^2} \end{vmatrix}$$

Hierin addieren wir zur ersten Zeile die mit $-6y^{VI}$ multiplizierte dritte Zeile und zu der mit $5y'''$ multiplizierten zweiten Zeile die mit $5y^{IV^2} - 3y'''y^{V}$ multiplizierte dritte Zeile. Dann erhalten wir:

$$\Delta = y'''(175y^{IV^4} - 280y'''y^{IV^2}y^{V} + 70y'''^2y^{IV}y^{VI} + 49y'''^2y^{V^2} - 10y'''^3y^{VI}$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 100y^{IV^3} - 130y'''y^{IV}y^{V} & 40y'''^2y^{VII} - 280y'''y^{IV}y^{VI} + 210y^{IV^2}y^{V} - 196y'''y^{V} \\ y''' & 7y^{IV} \end{vmatrix}$$

Es wird daher:

$$\Delta = 4y'''(175y^{IV^4} - 280y'''y^{IV^2}y^{V} + 70y'''^2y^{IV}y^{VI} + 49y'''^2y^{V^2} - 10y'''^3y^{VI}$$

Wir erhalten also als invariante Differentialgleichungen:

$$y''' = 0$$

und:

$$175y^{IV^4} - 280y'''y^{IV^2}y^{V} + 70y'''^2y^{IV}y^{VI} + 49y'''^2y^{V^2} - 10y'''^3y^{VII} =$$

Die invarianten Differentialgleichungen höherer Ordnung bestimmen sich durch Gleichungen von der Form:

$$\Omega(I, I_1, I_2 \dots) = 0.$$

Da wir aber die $I_k$ berechnen können, so können wir auch die invarianten Differentialgleichungen finden. So liefert uns die Gleichung:

$$I = \text{const.}$$

die invarianten Differentialgleichungen neunter Ordnung usw.

Digitized by Google

## III.

### Bestimmung der Differentialinvarianten der Gruppe des linearen Komplexes.

Wir betrachten jetzt $xyy'$ als Koordinaten im dreidimensionalen Raum und führen mit Hilfe der Transformation:

$$x_1 = x, \quad y_1 = \tfrac{1}{2}y', \quad z_1 = y - \tfrac{1}{2}xy'$$

neue Veränderliche ein in die größte irreduzible Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene, die wir oben behandelt haben:

$$G_{10} = \left| \begin{array}{cccc} p & xq+q' & q & \frac{1}{2}x^2q+xq' \\ xp+2yq+y'q' & (y-xy')p-\frac{1}{2}xy'^2q-\frac{1}{2}y'^2q' & & \\ \frac{1}{2}x^2p+xyq+yq' & & & \\ (xy-\frac{1}{2}x^2y')p+(y^2-\frac{1}{4}x^2y'^2)q+(yy'-\frac{1}{2}xy'^2)q' & & & \end{array} \right| \quad \begin{array}{c} xp-y'q' \quad y'p+\frac{1}{2}y'^2q \\ \\ \\ \\ \end{array}.$$

Alsdann wird, wenn wir $\frac{\partial f}{\partial z_1}$ durch $r_1$ bezeichnen:

$$p = p_1 - \tfrac{1}{2}y'r_1, \quad q = r_1, \quad q' = \tfrac{1}{2}q_1 - \tfrac{1}{2}xr_1$$

oder, gemäß der obigen Transformation, die wir nach $xyy'$ auflösen:

$$x = x_1, \quad y = z_1 + x_1y_1, \quad y' = 2y_1,$$

erhalten wir:

$$p = p_1 - y_1r_1, \quad q = r_1, \quad q' = \tfrac{1}{2}q_1 - \tfrac{1}{2}x_1r_1.$$

Die PFAFFsche Gleichung:

$$dy - y'dx = 0$$

geht über in die Gleichung des linearen Komplexes:

$$dz_1 + x_1dy_1 - y_1dx_1 = 0,$$

und die Gruppe $G_{10}$ geht über in die projektive Gruppe des linearen Komplexes:

$$\mathfrak{G}_{10} = \left| \begin{array}{cccc} p-yr & q+xr & r & xq \\ zp-y(xp+yq+zr) & zq+x(xp+yq+zr) & & \end{array} \right| \quad \begin{array}{cc} xp-yq & yp \\ z(xp+yq+zr), & \end{array} \quad \begin{array}{c} xp+yq+2zr \\ \\ \end{array}$$

wo der Index 1 weggelassen ist.

Beschränken wir uns zunächst auf Kurven, die dem Komplexe angehören, so muß gelten:

$$dz_1 + x_1dy_1 - y_1dx_1 = 0$$



Digitized by Google

oder

$$z_1' + x_1 y_1' - y_1 = 0.$$

Wir können also $z_1'$ als eine Funktion von $y_1'$ betrachten. Es ist:

$$z_1' = y_1 - x_1 y_1'.$$

Ebenso wird:

$$z_1'' = -x_1 y_1'', \quad z_1''' = -y_1'' - x_1 y_1''', \quad z_1^{IV} = -2y_1''' - x_1 y_1^{IV}$$

allgemein:

$$z_1^{(n)} = -(n-2) y_1^{(n-1)} - x_1 y_1^{(n)}$$

und:

$$y' = 2y_1, \quad y'' = 2y_1', \ldots, \quad y^{(n)} = 2y_1^{(n-1)}.$$

Wir brauchen nur diese Werte der $y^{(i)}$ in die Differentialinvarianten und invarianten Differentialgleichungen einzusetzen, welche uns die $G_{10}$ geliefert hatte, um die entsprechenden Invarianten der $\mathfrak{G}_{10}$ zu finden. So wird die Gruppe des linearen Komplexes die beiden Gleichungen:

$$y'' = 0$$

und:

$$175y'''^4 - 280y''y'''^2y^{IV} + 70y''^2y'''y^V + 49y''^2y^{IV2} - 10y''^3y^{VI} = 0$$

invariant lassen, wenn wir uns auf Kurven beschränken, die dem Komplexe angehören. Die oben gefundenen Differentialinvarianten der $G_{10}$ nehmen für die $\mathfrak{G}_{10}$ folgende Form an:

$$\mathfrak{R}_i = \frac{y^{(i-1)}}{y''^{i/3}}. \qquad i = 4 \ldots n.$$

Ferner:

$$\mathfrak{L}_1 = 5\mathfrak{R}_4^2 - 3\mathfrak{R}_5 = \frac{5y'''^2 - 3y''y^{IV}}{y''^{8/3}}.$$

$\mathfrak{L}_1 = 0$ liefert:

$$5y'''^2 - 3y''y^{IV} = 0.$$

Dies ist aber die Differentialgleichung, die bei der sechsgliedrigen Gruppe von der kanonischen Form:

$$p, \quad q, \quad xq, \quad yq, \quad xp, \quad yp$$

invariant bleibt. Auf gleiche Art erhalten wir:

$$\mathfrak{L}_2 = -40\mathfrak{R}_4^3 + 45\mathfrak{R}_4\mathfrak{R}_5 - 9\mathfrak{R}_6 \text{ usw.}$$

Ferner wird:

$$\mathfrak{M}_i = \frac{\mathfrak{L}_i}{\mathfrak{L}_1^{\frac{i+1}{2}}} \qquad i = 2 \ldots n,$$

Digitized by Google

oder:

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{45y''y'''y^{IV} - 40y'''^3 - 9y''^2y^V}{(5y'''^2 - 3y''y^{IV})^{3/2}}.$$

$\mathfrak{M}_2 = 0$ liefert:

$$45y''y'''y^{IV} - 40y'''^3 - 9y''^2y^V = 0.$$

Das ist aber diejenige Differentialgleichung, welche außer der Gleichung $y'' = 0$ bei einer achtgliedrigen Gruppe invariant bleibt, von der kanonischen Form:

$$p,\quad q,\quad xq,\quad yq,\quad xp,\quad yp,\quad x^2p + xyq,\quad xyp + y^2q.$$

Ebenso können wir $d\omega$, $d\sigma$, $ds$ und $I$ leicht angeben.

---

Beschränken wir uns jetzt nicht nur auf Kurven, die dem Komplexe angehören, sondern suchen ganz allgemein die Differentialinvarianten der Gruppe des linearen Komplexes zu bestimmen. Die Erweiterung geschieht nach den Formeln:

$$\eta_k = \frac{d\eta_{k-1}}{dx} - y^{(k)} \cdot \frac{d\xi}{dx},$$
$$\zeta_k = \frac{d\zeta_{k-1}}{dx} - z^{(k)} \cdot \frac{d\xi}{dx}.$$

Die *eingliedrige* Untergruppe:

$$p - yr$$

brauchen wir gar nicht zu erweitern, denn die Gleichung:

(a) $$p - yr = 0$$

liefert uns bereits $3 - 1 = 2$ Invarianten und das Bogenelement $\alpha = dx$. Die Invarianten sind:

$$y,\quad xy + z = \mathfrak{A}_0.$$

Die übrigen lassen sich daraus berechnen:

(A) $y,\ y',\ y'' \ldots y^{(i)},\quad \mathfrak{A}_i = xy^{(i)} + z^{(i)},\quad i = 0 \ldots n,\quad \alpha = dx.$

Setzen wir hierin:

(I) $x = x_1,\quad y^{(k)} = \frac{1}{2}y_1^{(k+1)},\quad z^{(k)} = -\frac{(k-2)}{2}y_1^{(k)} - \frac{1}{2}x_1y_1^{(k+1)},$

so müssen wir die Invarianten der eingliedrigen Untergruppe $p_1$ der $G_{10}$ erhalten. In der Tat finden wir:

$$y_1,\ y_1' \ldots y_1^{(i+1)}.$$



Digitized by Google

Die *dreigliedrige* Untergruppe:

$$p - yr, \quad q + xr, \quad r$$

liefert bei der Erweiterung die zwei neuen Gleichungen:

(b) $$q + r' = 0, \qquad (c) \quad r = 0.$$

Wir führen die Invarianten (A) ein:

(b') $$q + x\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_0} + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_1} = 0, \qquad (c') \ \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_0} = 0,$$

also:

(b'') $$q + \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_1} = 0.$$

Wir erhalten die Invarianten:

(B) $$y^{(i)}, \quad \mathfrak{B}_1 = \mathfrak{A}_1 - y, \quad \mathfrak{A}_{i+1}, \quad i = 1 \ldots n, \quad \alpha = dx.$$

Führen wir die Substitution (I) aus, so müssen wir die Invarianten der dreigliedrigen Untergruppe:

$$p_1, \quad x_1 q_1 + q_1', \quad q_1$$

der $G_{10}$ erhalten. Wir finden in der Tat die Invarianten:

$$y_1'', \quad y_1''' \ldots y_1^{(i+1)}.$$

Die *viergliedrige* Untergruppe:

$$p - yr, \quad q + xr, \quad r, \quad xq$$

liefert die neue Gleichung:

(d) $$xq + q' = 0.$$

Bei Einführung der Lösungen (B) geht (d) über in:

(d') $$q' = 0.$$

Wir erhalten als Invarianten:

(C) $$\mathfrak{B}_1, \quad y^{(i)}, \quad \mathfrak{A}_i, \quad i = 2 \ldots n, \quad \alpha = dx.$$

Führen wir die Substitution (I) aus, so müssen wir die Invarianten der viergliedrigen Untergruppe:

$$p_1, \quad x_1 q_1 + q_1', \quad q_1, \quad \tfrac{1}{2} x_1^2 q_1 + x_1 q_1'$$

der $G_{10}$ erhalten. Wir finden in der Tat die Invarianten:

$$y_1''', \ y_1^{\mathrm{IV}} \ldots y_1^{(i+1)}.$$

Die *fünfgliedrige* Untergruppe:

$$p - yr, \quad q + xr, \quad r, \quad xq, \quad xp - yq$$

Digitized by Google

erweitern wir bis zur zweiten Ordnung, dann können wir $3 + 4 - 5 = 2$ Invarianten erwarten. Wir erhalten die neue Gleichung:

$$(e) \quad xp - yq - 2y'q' - 3y''q'' - z'r' - 2z''r'' + \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Wir führen die Lösungen (C) ein und erhalten:

$$(e') \qquad \mathfrak{B}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{B}_1} + 3y''q'' + 2\mathfrak{A}_2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_2} - \alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Wir erhalten die Lösungen:

$$(D) \qquad \mathfrak{D}_1 = \frac{\mathfrak{B}_1}{y''^{1/3}}, \quad \mathfrak{F}_2 = \frac{\mathfrak{A}_2}{y''^{2/3}}, \quad d\omega = \alpha \cdot y''^{1/3}.$$

Daraus lassen sich die übrigen Invarianten berechnen:

$$\frac{d\mathfrak{D}_1}{d\omega} = \frac{3y''\mathfrak{A}_2 - y'''\mathfrak{B}_1}{3y''^{5/3}} = \mathfrak{F}_2 - \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_1 \cdot \frac{y'''}{y''^{4/3}} = \mathfrak{F}_2 - \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_1 \cdot \mathfrak{K}_3.$$

Ferner wird:

$$\frac{d\mathfrak{F}_2}{d\omega} = \frac{3y''(\mathfrak{A}_2 + y'') - 2y'''\mathfrak{A}_2}{3y''^2} = \mathfrak{F}_3 + 1 - \tfrac{2}{3}\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3,$$

ebenso:

$$\frac{d\mathfrak{K}_3}{d\omega} = \frac{3y'y^{IV} - 4y'''^2}{3y''^{8/3}} = \frac{y^{IV}}{y''^{5/3}} - \tfrac{4}{3}\mathfrak{K}_3^2 = \mathfrak{K}_4 - \tfrac{4}{3}\mathfrak{K}_3^2 \text{ usw.}$$

Allgemein erhalten wir die Lösungen:

$$\mathfrak{D}_1 = \frac{\mathfrak{B}_1}{y''^{1/3}}, \quad \mathfrak{F}_i = \frac{\mathfrak{A}_i}{y''^{i/3}}, \quad \mathfrak{K}_{i+1} = \frac{y^{(i+1)}}{y''^{\frac{i+2}{3}}}, \quad i = 2 \cdots n.$$

Führen wir die Substitution (I) aus, so müssen wir die Invarianten der fünfgliedrigen Untergruppe

$$p_1, \quad x_1q_1 + q_1', \quad q_1, \quad \tfrac{1}{2}x_1^2q_1 + x_1q_1', \quad x_1p_1 - y_1'q_1'$$

der $G_{10}$ erhalten. Wir finden in der Tat die Invarianten:

$$K_i = \frac{y_1^{(i)}}{y_1'''^{i/3}}, \quad i = 4 \cdots n, \quad d\omega = \alpha \cdot y_1'''^{1/3}.$$

Die *sechsgliedrige* Untergruppe

$$p - yr, \quad q + xr, \quad r, \quad xq, \quad xp - yq, \quad yp$$

erweitern wir bis zur dritten Ordnung. Dann müssen wir $3 + 6 - 6 = 3$ Invarianten erhalten, von denen aber die eine sich ohne Integration finden lassen muß. Wir erhalten die neue Gleichung:

Digitized by Google

$$yp - y'^2q' - 3y'y''q'' - (4y'y''' + 3y''^2)\,q''' - y'z'r' -$$
$$- (2y'z'' + y''z')r'' - (3y'z''' + 3y''z'' + y'''z')r''' + y'\alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$$

Addieren wir hierzu die mit $-y'$ multiplizierte Gleichung (e), so kommt:

(f) $$(y - xy')p + yy'q + y'^2q' - 3y''^2q''' - y''z'r'' - (3y''z'' + y'''z')r''' = 0.$$

Durch Einführung der Lösungen (C) geht (f) über in:

(f') $$3y''^2q''' + y''\mathfrak{B}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_2} + (y'''\mathfrak{B}_1 + 3y''\mathfrak{A}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_3} = 0.$$

Führen wir endlich die Lösungen (D) ein, so erhalten wir:

(f'') $$\mathfrak{D}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_2} + (\mathfrak{D}_1\mathfrak{K}_3 + 3\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_3} + 3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_3} = 0.$$

Wir erhalten die Lösungen:

(E) $$\mathfrak{D}_1;\quad \mathfrak{D}_2 = 3\mathfrak{F}_2 - \mathfrak{D}_1\mathfrak{K}_3;\quad \mathfrak{D}_3 = \mathfrak{F}_3\mathfrak{K}_3 - {}_1\mathfrak{F}_3;\quad d\omega.$$

Es wird:

$$\frac{d\mathfrak{D}_1}{d\omega} = \mathfrak{F}_2 - \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_1\mathfrak{K}_3 = \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_2,$$

das heißt, $\mathfrak{D}_2$ können wir ohne Integration finden. Ferner wird:

$$\frac{d\mathfrak{D}_2}{d\omega} = \mathfrak{F}_3\frac{d\mathfrak{K}_3}{d\omega} + \mathfrak{K}_3\frac{d\mathfrak{F}_3}{d\omega} - \frac{d\mathfrak{F}_3}{d\omega} = \mathfrak{F}_3\mathfrak{K}_4 - \mathfrak{F}_4 - 2\mathfrak{K}_3(\mathfrak{F}_3\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3) = \mathfrak{D}_4,$$

endlich:

$$\frac{d\mathfrak{D}_3}{d\omega} = 3 - 3\mathfrak{D}_3 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_1(5\mathfrak{K}_3^2 - 3\mathfrak{K}_4),\quad \mathfrak{L}_1 = 5\mathfrak{K}_3^2 - 3\mathfrak{K}_4.$$

Führen wir die Substitution (I) aus, so müssen wir die Invarianten der sechsgliedrigen Untergruppe

$$p_1,\quad x_1q_1 + q_1',\quad q_1,\quad \tfrac{1}{2}x_1^2q_1 + x_1q_1',\quad x_1p_1 - y_1'q_1',\quad y_1'p_1 + \tfrac{1}{2}y_1'^2q_1$$

der $G_{10}$ erhalten. In der Tat finden wir die Invarianten:

$$\mathfrak{L}_1 = 5K_4^2 - 3K_5 \text{ usw.}$$

Die *siebengliedrige* Untergruppe

$$p - yr,\quad q + xr,\quad r,\quad xq,\quad xp - yq,\quad yp,\quad xp + yq + 2zr$$

erweitern wir bis zur dritten Ordnung, dann können wir $3 + 6 - 7 = 2$ Invarianten erwarten. Wir erhalten die neue Gleichung

$$xp + yq + 2zr - y''q'' - 2y'''q''' + z'r' - z'''r''' + \alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$$

oder, wenn wir davon (e) subtrahieren,

(g) $$yq + y'q' + y''q'' + y'''q''' + z'r' + z''r'' + z'''r''' = 0.$$

Digitized by Google

Durch Einführung der Lösungen (C) geht Gleichung (g) über in:

$$(g') \qquad \mathfrak{B}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{B}_1} + y''q'' + y'''q''' + \mathfrak{A}_2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_2} + \mathfrak{A}_3 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_3} = 0.$$

Wir führen die Lösungen (D) ein und erhalten:

$$(g'') \qquad 2\mathfrak{D}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1} + \mathfrak{H}_2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{H}_2} - \mathfrak{K}_2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_2} + d\omega \frac{\partial f}{\partial (d\omega)} = 0.$$

Führen wir endlich die Lösungen (E) ein, so kommt:

$$(g''') \qquad 2\mathfrak{D}_1 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1} + \mathfrak{D}_2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_2} + d\omega \frac{\partial f}{(\partial d\omega)} = 0.$$

Wir erhalten die Lösungen:

$$(F) \qquad \mathfrak{D}_3; \quad \frac{\mathfrak{D}_2}{\mathfrak{D}_1^{1/2}} = G_2; \quad \frac{d\omega}{\mathfrak{D}_1^{1/2}} = d\sigma.$$

Daraus lassen sich die übrigen Invarianten berechnen:

$$\frac{d\mathfrak{D}_2}{d\sigma} = \mathfrak{D}_4 \cdot \mathfrak{D}_1^{1/2} = G_4, \quad \frac{dG_4}{d\sigma} = \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_5 + \tfrac{4}{3}\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_1\mathfrak{Q}_1 + \tfrac{1}{6}G_2G_4,$$

$$\frac{dG_2}{d\sigma} = 3 - 3\mathfrak{D}_3 + \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_1\mathfrak{Q}_1 - \tfrac{1}{6}G_2^2, \quad \mathfrak{D}_1\mathfrak{Q}_1 = H_1.$$

Allgemein wird:

$$G_i = \mathfrak{D}_i \cdot \mathfrak{D}_1^{\frac{i-3}{2}}, \quad \mathfrak{D}_3 = G_3,$$

$$\frac{dH_1}{d\sigma} = \tfrac{1}{3}\mathfrak{D}_1^{3/2}\mathfrak{Q}_2 + \tfrac{1}{3}G_2H_1, \quad H_2 = \mathfrak{D}_1^{3/2} \cdot \mathfrak{Q}_2.$$

Allgemein wird:

$$H_i = \mathfrak{D}_1^{\frac{i+1}{2}} \cdot \mathfrak{Q}_i.$$

Führen wir die Substitution (I) aus, so müssen wir die Invarianten der siebengliedrigen Untergruppe

$$p_1, \quad x_1q_1 + q_1', \quad q_1, \quad \tfrac{1}{2}x_1^2q_1 + x_1q_1', \quad x_1p_1 - y_1'q_1',$$
$$y_1'p_1 + \tfrac{1}{2}y_1'^2q_1, \quad x_1p_1 + 2y_1q_1 + y_1'q_1'$$

der $G_{10}$ erhalten. In der Tat finden wir:

$$\frac{H_2}{H_1^{3/2}} = M_2 = \frac{L_2}{L_1^{3/2}} \text{ usw.}$$

Die *zehngliedrige* Gruppe liefert uns noch die drei neuen Transformationen:

$$zp - y(xp + yq + zr), \quad zq + x(xp + yq + zr), \quad z(xp + yq + zr).$$

Wir erweitern bis zur fünften Ordnung, dann müssen wir $3 + 10 - 10 = 3$ Invarianten erhalten, von denen sich die eine ohne Integration finden lassen muß. Wir erhalten die drei neuen Gleichungen:

Digitized by Google

$$(\alpha)\begin{cases}(z-xy)p-y^2q-yzr+(xy'^2-yy'-y'z')q'\\ +(3xy'y''-y'z''-2y''z')q''+(4xy'y'''+3xy''^2+yy'''\\ +3y'y''-y'z'''-3y''z''-3y'''z')q'''+(5xy'y^{IV}\\ +10xy''y'''+2yy^{IV}+8y'y'''+6y''^2-y'z^{IV}-4y''z'''\\ -6y'''z''-4y^{IV}z')q^{IV}+(6xy'y^{V}+15xy''y^{IV}+10xy'''^2\\ +3yy^{V}+15y'y^{IV}+30y''y'''-y'z^{V}-5y''z^{IV}-10y'''z'''\\ -10y^{IV}z''-5y^{V}z')q^{V}+(xy'z'-y'z-z'^2)r'\\ +(2xy'z''+xy''z'-y''z+yz''-3z'z'')r''+(3xy'z'''\\ +3xy''z''+xy'''z'+2yz'''+3y'z''-y'''z-4z'z'''\\ -3z''^2)r'''+(4xy'z^{IV}+6xy''z'''+4xy'''z''+xy^{IV}z'\\ +3yz^{IV}+8y'z'''+6y''z''-y^{IV}z-5z'z^{IV}-10z''z''')r^{IV}\\ +(5xy'z^{V}+10xy''z^{IV}+10xy'''z'''+5xy^{IV}z''+xy^{V}z'\\ +4yz^{V}+15y'z^{IV}+20y''z'''+10y'''z''-y^{V}z-6z'z^{V}\\ -15z''z^{IV}-10z'''^2)r^{V}+(z'-xy'-y)\alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0.\end{cases}$$

$$(\beta)\begin{cases}-x^2p-(xy+z)q-xzr+(xy'-y-z')q'+(3xy''-z'')q''\\ +(5xy'''+3y''-z''')q'''+(7xy^{IV}+8y'''-z^{IV})q^{IV}\\ +(9xy^{V}+15y^{IV}-z^{V})q^{V}+(xz'-z)r'+3xz''r''\\ +(5xz'''+3z'')r'''+(7xz^{IV}+8z''')r^{IV}+(9xz^{V}+15z^{IV})r^{V}\\ -2x\alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0.\end{cases}$$

$$(\gamma)\begin{cases}-xzp-yzq-z^2r+(xy'z'-yz')q'+(xy'z''+2xy''z'\\ -yz''+y''z)q''+(xy'z'''+3xy''z''+3xy'''z'-yz'''\\ +3y''z'+2y'''z)q'''+(xy'z^{IV}+4xy''z'''+6xy'''z''\\ +4xy^{IV}z'-yz^{IV}+6y''z''+8y'''z'+3y^{IV}z)q^{IV}+(xy'z^{V}\\ +5xy''z^{IV}+10xy'''z'''+10xy^{IV}z''+5xy^{V}z'-yz^{V}\\ +10y''z'''+20y'''z''+15y^{IV}z'+4y^{V}z)q^{V}+(xz'^2-zz')r'\\ +3xz'z''r''+(4xz'z'''+3xz''^2+3z'z''+zz''')r'''\\ +(5xz'z^{IV}+10xz''z'''+2zz^{IV}+8z'z'''+6z''^2)r^{IV}\\ +(6xz'z^{V}+15xz''z^{IV}+10xz'''^2+3zz^{V}+15z'z^{IV}\\ +30z''z''')r^{V}-(xz'+z)\alpha\frac{\partial f}{\partial\alpha}=0.\end{cases}$$

Um diese drei Gleichungen zu vereinfachen, beachten wir die Gleichungen:

Digitized by Google

(a) $p - y'r' - y''r'' - y'''r''' - y^{IV}r^{IV} - y^{V}r^{V} = 0.$

(b) $q + r' = 0.$ (c) $r = 0.$ (d) $xq + q' = 0.$

(e) $xp - yq - 2y'q' - 3y''q'' - 4y'''q''' - 5y^{IV}q^{IV} - 6y^{V}q^{V}$
$- z'r' - 2z''r'' - 3z'''r''' - 4z^{IV}r^{IV} - 5z^{V}r^{V} + \alpha\frac{\partial f}{\partial \alpha} = 0.$

(f)
$$\begin{cases} (y - xy')p + yy'q + y'^2q' - 3y''^2q''' - 10y''y'''q^{IV} \\ - (15y''y^{IV} + 10y'''^2)q^{V} - y''z'r'' - (3y''z'' + y'''z')r''' \\ - (6y''z''' + 4y'''z'' + y^{IV}z')r^{IV} \\ - (10y''z^{IV} + 10y'''z''' + 5y^{IV}z'' + y^{V}z')r^{V} = 0. \end{cases}$$

(g) $yq + y'q' + y''q'' + y'''q''' + y^{IV}q^{IV} + y^{V}q^{V}$
$+ z'r' + z''r'' + z'''r''' + z^{IV}r^{IV} + z^{V}r^{V} = 0.$

Addieren wir zu ($\alpha$) die mit $x$ multiplizierte Gleichung (f), die mit $-z$ multiplizierte Gleichung (a), die mit $xy' - z'$ multiplizierte Gleichung (e), die mit $-yz'$ multiplizierte Gleichung (b) und die mit $y$ multiplizierte Summe von (e) und dem Doppelten von (g), so erhalten wir:

(h)
$$\begin{cases} (xy - xz')p + (y'z' - yy')q' + (y''z' - y'z'' - yy'')q'' + \\ + (y'''z' - 3y''z'' - y'z''' + 3y'y'' - yy''')q''' + \\ + (y^{IV}z' - 6y'''z'' - 4y''z''' - y'z^{IV} + 6y''^2 + 8y'y''' - yy^{IV})q^{IV} + \\ + (y^{V}z' - 10y^{IV}z'' - 10y'''z''' - 5y''z^{IV} - y'z^{V} + 30y''y''' + \\ + 15y'y^{IV} - yy^{V})q^{V} + (yz'' - z'z'')r'' + (yz''' + 3y'z'' - \\ - z'z''' - 3z''^2)r''' + (yz^{IV} + 8y'z''' + 6y''z'' - z'z^{IV} - \\ - 10z''z''')r^{IV} + (yz^{V} + 15y'z^{IV} + 20y''z''' + 10y'''z'' - \\ - z'z^{V} - 15z''z^{IV} - 10z'''^2)r^{V} = 0. \end{cases}$$

Addieren wir zu ($\beta$) die mit $2x$ multiplizierte Gleichung (e), die mit $z$ multiplizierte Gleichung (b), die mit $y$ multiplizierte Gleichung (d) und die mit $2x$ multiplizierte Gleichung (g), so erhalten wir:

(i)
$$\begin{cases} x^2p - (xy' + z')q' - (xy'' + z'')q'' + (3y'' - xy''' - z''')q''' + \\ + (8y''' - xy^{IV} - z^{IV})q^{IV} + (15y^{IV} - xy^{V} - z^{V})q^{V} + \\ + xz'r' + xz''r'' + (xz''' + 3z'')r''' + (xz^{IV} + 8z''')r^{IV} + \\ + (xz^{V} + 15z^{IV})r^{V} = 0. \end{cases}$$

Addieren wir zu ($\gamma$) die mit $xz' + z$ multiplizierte Gleichung (e), die mit $yz'$ multiplizierte Gleichung (d) und die mit $2z$ multiplizierte Gleichung (g), so erhalten wir:

Digitized by Google

$$(k)\begin{cases} x^2z'p - xy'z'q' + (xy'z'' - xy''z' - yz'')q'' + (xy'z''' + \\ + 3xy''z'' - xy'''z' + 3y''z' - yz''')q''' + (xy'z^{IV} + \\ + 4xy''z''' + 6xy'''z'' - xy^{IV}z' + 8y'''z' + 6y''z'' - \\ - yz^{IV})q^{IV} + (xy'z^{V} + 5xy''z^{IV} + 10xy'''z''' + \\ + 10xy^{IV}z'' - xy^{V}z' + 15y^{IV}z' + 20y'''z'' + 10y''z''' - \\ - yz^{V})q^{V} + xz'z''r'' + (xz'z''' + 3xz''^2 + 3z'z'')r''' + \\ + (xz'z^{IV} + 10xz''z''' + 8z'z''' + 6z''^2)r^{IV} + (xz'z^{V} + \\ + 15xz''z^{IV} + 10xz'''^2 + 15z'z^{IV} + 30z''z''')r^{V} = 0. \end{cases}$$

Führen wir in die Gleichungen (h), (i), (k) die Lösungen (C) ein, so erhalten wir:

$$(i')\begin{cases} \mathfrak{A}_2q'' + (\mathfrak{A}_3 - 3y'')q''' + (\mathfrak{A}_4 - 8y''')q^{IV} + (\mathfrak{A}_5 - 15y^{IV})q^{V} - \\ - 3\mathfrak{A}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_3} - 8\mathfrak{A}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_4} - 15\mathfrak{A}_4\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_5} = 0. \end{cases}$$

$$(h')\begin{cases} (y''z' - y'z'' - yy'')q'' + (y'''z' - 3y''z'' - y'z''' + 3y'y'' - yy''')q''' + \\ + (y^{IV}z' - 6y'''z'' - 4y''z''' - y'z^{IV} + 6y''^2 + 8y'y''' - \\ - yy^{IV})q^{IV} + (y^{V}z' - 10y^{IV}z'' - 10y'''z''' - 5y''z^{IV} - \\ - y'z^{V} + 30y''y''' + 15y'y^{IV} - yy^{V})q^{V} - z''\mathfrak{B}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_2} + \\ + (3y'\mathfrak{A}_2 - z'''\mathfrak{B}_1 - 3z''\mathfrak{A}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_3} + (8y'\mathfrak{A}_3 + 6y''\mathfrak{A}_2 - \\ - z^{IV}\mathfrak{B}_1 - 4z'''\mathfrak{A}_2 - 6z''\mathfrak{A}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_4} + (15y'\mathfrak{A}_4 + 20y''\mathfrak{A}_3 + \\ + 10y'''\mathfrak{A}_2 - z^{V}\mathfrak{B}_1 - 5z^{IV}\mathfrak{A}_2 - 10z'''\mathfrak{A}_3 - 10z''\mathfrak{A}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_5} = 0. \end{cases}$$

$$(k')\begin{cases} (xy'z'' - xy''z' - yz'')q'' + (xy'z''' + 3xy''z'' - xy'''z' + \\ + 3y''z' - yz''')q''' + (xy'z^{IV} + 4xy''z''' + 6xy'''z'' - \\ - xy^{IV}z' + 8y'''z' + 6y''z'' - yz^{IV})q^{IV} + (xy'z^{V} + \\ + 5xy''z^{IV} + 10xy'''z''' + 10xy^{IV}z'' - xy^{V}z' + 15y^{IV}z' + \\ + 20y'''z'' + 10y''z''' - yz^{V})q^{V} + xz''\mathfrak{B}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_2} + \\ + (xz'''\mathfrak{B}_1 + 3xz''\mathfrak{A}_2 + 3z'\mathfrak{A}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_3} + (xz^{IV}\mathfrak{B}_1 + \\ + 4xz'''\mathfrak{A}_2 + 6xz''\mathfrak{A}_3 + 8z'\mathfrak{A}_3 + 6z''\mathfrak{A}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_4} + (xz^{V}\mathfrak{B}_1 + \\ + 5xz^{IV}\mathfrak{A}_2 + 10xz'''\mathfrak{A}_3 + 10xz''\mathfrak{A}_4 + 15z'\mathfrak{A}_4 + \\ + 20z''\mathfrak{A}_3 + 10z'''\mathfrak{A}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_5} = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Addieren wir zu (h′) die mit $y'$ multiplizierte Gleichung (i′), und zu (k′) die mit $x$ multiplizierte Gleichung (h′), so erhalten wir:

$$(\bar{h}')\begin{cases} y''\mathfrak{B}_1 q'' + (y'''\mathfrak{B}_1 - 3y''z'')q''' + (y^{IV}\mathfrak{B}_1 - 6y'''z'' - 4y''z''' + \\ + 6y''^2)q^{IV} + (y^V\mathfrak{B}_1 - 10y^{IV}z'' - 10y'''z''' - 5y''z^{IV} + \\ + 30y''y''')q^V - z''\mathfrak{B}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_2} - (z'''\mathfrak{B}_1 + 3z''\mathfrak{A}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_3} + (6y''\mathfrak{A}_2 - \\ - z^{IV}\mathfrak{B}_1 - 4z'''\mathfrak{A}_2 - 6z''\mathfrak{A}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_4} + (20y''\mathfrak{A}_2 + 10y'''\mathfrak{A}_2 - \\ - z^V\mathfrak{B}_1 - 5z^{IV}\mathfrak{A}_2 - 10z'''\mathfrak{A}_3 - 10z''\mathfrak{A}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_5} = 0. \end{cases}$$

$$(\bar{k}')\begin{cases} y\mathfrak{A}_2 q'' + (y\mathfrak{A}_3 - 3y''\mathfrak{A}_1)q''' + (y\mathfrak{A}_4 - 8y'''\mathfrak{A}_1 - 6y''\mathfrak{A}_2)q^{IV} + \\ + (y\mathfrak{A}_5 - 15y^{IV}\mathfrak{A}_1 - 20y'''\mathfrak{A}_2 - 10y''\mathfrak{A}_3)q^V - 3\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_3} - \\ - (8\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_3 + 6\mathfrak{A}_2^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_4} - (15\mathfrak{A}_1\mathfrak{A}_4 + 30\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_5} = 0. \end{cases}$$

Addieren wir zu $(\bar{k}')$ die mit $-\mathfrak{A}_1$ multiplizierte Gleichung (i′), so erhalten wir:

$$(\bar{\bar{k}}')\begin{cases} \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_2 q'' + \mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_3 q''' + (\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_4 + 6y''\mathfrak{A}_2)q^{IV} + (\mathfrak{B}_1\mathfrak{A}_5 + \\ + 20y'''\mathfrak{A}_2 + 10y''\mathfrak{A}_3)q^V + 6\mathfrak{A}_2^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_4} + 30\mathfrak{A}_2\mathfrak{A}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{A}_5} = 0. \end{cases}$$

In $(\bar{h}')$, (i′) und $(\bar{\bar{k}}')$ führen wir die Lösungen (D) ein und addieren zu der ersten dieser drei neuen Gleichungen die mit $-\mathfrak{D}_1$ multiplizierte Gleichung (g″), und die mit $\frac{3z''}{y''^{2/3}}$ multiplizierte Gleichung (f″), welche die Form haben:

$$(f'')\begin{cases} \mathfrak{D}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_2} + (\mathfrak{D}_1\mathfrak{K}_3 + 3\mathfrak{F}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_3} + (\mathfrak{D}_1\mathfrak{K}_4 + 4\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 + 6\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_4} + \\ + (\mathfrak{D}_1\mathfrak{K}_5 + 5\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 + 10\mathfrak{F}_3\mathfrak{K}_3 + 10\mathfrak{F}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_5} + 3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_3} + \\ + 10\mathfrak{K}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_4} + (15\mathfrak{K}_4 + 10\mathfrak{K}_3^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_5} = 0. \end{cases}$$

$$(g'')\begin{cases} 2\mathfrak{D}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1} + \mathfrak{F}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_2} - \mathfrak{F}_4\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_4} - 2\mathfrak{F}_5\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_5} - \mathfrak{K}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_3} - 2\mathfrak{K}_4\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_4} - \\ - 3\mathfrak{K}_5\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_5} + d\omega\frac{\partial f}{\partial (d\omega)} = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

Es wird:

$$(h'')\begin{cases} -\mathfrak{D}_1^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1} - \mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_2} + ((\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3)\mathfrak{D}_1 - \mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_3} + \\ + (6\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 - \mathfrak{F}_4) + 4\mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3) - \mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_4} + \\ + (20\mathfrak{F}_3 + 10\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 + \mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_5 - \mathfrak{F}_5) + 5\mathfrak{F}_2(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 - \mathfrak{F}_4) + \\ + 10\mathfrak{F}_3(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3) - \mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_5)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_5} + (6 + 4(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3))\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_4} + \\ + (30\mathfrak{K}_3 + 5(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 - \mathfrak{F}_4) + 10\mathfrak{K}_3(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3))\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_5} = 0. \end{cases}$$

$$(i'')\begin{cases} \mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1} + 2\mathfrak{F}_2^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_2} + (9\mathfrak{F}_2 + 3\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_3} + (24\mathfrak{F}_3 + \\ + 4\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_4} + (45\mathfrak{F}_4 + 5\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_5)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_5} + (9 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 + \\ + 3(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3))\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_3} + (24\mathfrak{K}_3 + 2\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 + 3(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 - \mathfrak{F}_4))\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_4} + \\ + (45\mathfrak{K}_4 + 3\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_5 + 3(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_5 - \mathfrak{F}_5))\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_5} - \mathfrak{F}_2 \cdot d\omega \cdot \frac{\partial f}{\partial (d\omega)} = 0. \end{cases}$$

$$(k'')\begin{cases} \mathfrak{D}_1^2\mathfrak{F}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1} + 2\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_2} + 3\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_3} + (4\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_4 - \\ - 18\mathfrak{F}_2^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_4} + (5\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_5 - 90\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_5} + (\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 + \\ + 3\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3))\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_3} + (2\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 + 3\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 - \mathfrak{F}_4) - \\ - 18\mathfrak{F}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_4} + (3\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_5 + 3\mathfrak{D}_1(\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_5 - \mathfrak{F}_5) - 60\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \\ - 30\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_5} - \mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\, d\omega \cdot \frac{\partial f}{\partial (d\omega)} = 0. \end{cases}$$

Wir addieren zu (k'') die mit $-\mathfrak{D}_1$ multiplizierte Gleichung (i'') und zu (i'') die mit $\mathfrak{F}_2$ multiplizierte Gleichung (g'') und erhalten:

$$(\bar{i}'')\begin{cases} \mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1} + \mathfrak{F}_2^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_2} + (3\mathfrak{F}_2 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_3} + (8\mathfrak{F}_3 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_4} + \\ + (15\mathfrak{F}_4 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_5)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_5} + (3 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3 - \mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_3} + \\ + (8\mathfrak{K}_3 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_4 - \mathfrak{F}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_4} + (15\mathfrak{K}_4 + \mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_5 - \mathfrak{F}_5)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_5} = 0. \end{cases}$$

Digitized by Google

$$(\bar{k}'')\begin{cases} 3\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_2}+(8\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_3+6\mathfrak{F}_2^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_4}+(15\mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_4+30\mathfrak{F}_2\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{F}_5}+ \\ +3\mathfrak{D}_1\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_2}+(8\mathfrak{D}_1\mathfrak{K}_3+6\mathfrak{F}_2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_4}+(15\mathfrak{D}_1\mathfrak{K}_4+20\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_3+ \\ +10\mathfrak{F}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{K}_5}=0. \end{cases}$$

In (h″), (ī″) und ($\bar{k}''$) führen wir die Lösungen (E) ein und erhalten:

$$(h''')\begin{cases} \mathfrak{D}_1^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1}+\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_2}+2\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_3}+2\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_4}+ \\ +(2\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_5-26\mathfrak{D}_3-14\mathfrak{D}_3^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_5}+(18+12\mathfrak{D}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}_1}+ \\ +45\mathfrak{D}_4\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}_2}=0, \end{cases}$$

wo

$$\mathfrak{D}_5=A_5-\frac{10}{3}\mathfrak{K}_3A_4+\mathfrak{K}_4A_3,\quad A_\nu=\mathfrak{F}_2\mathfrak{K}_\nu-\mathfrak{F}_\nu,$$

$$(i''')\begin{cases} \mathfrak{D}_1\mathfrak{F}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1}+(\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}_2-3\mathfrak{D}_1-\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_2}+2\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_3}+ \\ +(2\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}_4+2\mathfrak{D}_3-2\mathfrak{D}_3^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_4}+(2\mathfrak{F}_2\mathfrak{D}_5+5\mathfrak{D}_4- \\ -\frac{26}{3}\mathfrak{K}_3A_3-\frac{7}{3}A_3A_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_5}+(\mathfrak{K}_3(6+4\mathfrak{D}_3)-3\mathfrak{D}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}_1}+ \\ +(15\mathfrak{K}_3\mathfrak{D}_4-18\mathfrak{D}_3\mathfrak{L}_1-9\mathfrak{D}_5)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}_2}=0. \end{cases}$$

$$(k''')\begin{cases} -3\mathfrak{D}_1^2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_2}+2\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_4}+\left(5\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4+\frac{26}{3}\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_3\right)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_5}- \\ -6\mathfrak{D}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}_1}+90\mathfrak{D}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}_2}=0. \end{cases}$$

Wir bilden 3 (i‴) − $\mathfrak{K}_3$ (h‴) und erhalten:

$$(\bar{i}''')\begin{cases} \mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_1}+(\mathfrak{D}_2^2-9\mathfrak{D}_1-3\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_3)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_2}+2\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_3}+ \\ +(2\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_4+6\mathfrak{D}_3-6\mathfrak{D}_3^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_4}+(2\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_5+15\mathfrak{D}_4- \\ -7\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{D}_5}-9\mathfrak{D}_4\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}_1}-(54\mathfrak{D}_3\mathfrak{L}_1+27\mathfrak{D}_5)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{L}_2}=0 \end{cases}$$

Führen wir nun endlich noch in (h‴), ($\bar{i}'''$) und (k‴) die Invarianten (F) der siebengliedrigen Untergruppe ein, so kommt:

Digitized by Google

$$(h^{IV})\begin{cases} G_2\frac{\partial f}{\partial G_2}+4G_3\frac{\partial f}{\partial G_3}+5G_4\frac{\partial f}{\partial G_4}+(6G_5-52G_3-28G_2^2)\frac{\partial f}{\partial G_5}+ \\ +(36+24G_3+2H_1)\frac{\partial f}{\partial H_1}+(90G_4+3H_2)\frac{\partial f}{\partial H_2}- \\ -d\sigma\cdot\frac{\partial f}{\partial(d\sigma)}=0. \end{cases}$$

$$(i^{IV})\begin{cases} (G_2^2-18-6G_3)\frac{\partial f}{\partial G_2}+4G_2G_3\frac{\partial f}{\partial G_3}+(5G_2G_4+12G_3- \\ -12G_2^2)\frac{\partial f}{\partial G_4}+(6G_3G_5+30G_4-14G_3G_4)\frac{\partial f}{\partial G_5}+ \\ +(2G_2H_1-18G_4)\frac{\partial f}{\partial H_1}+(3G_2H_2-108G_3H_1-54G_5)\frac{\partial f}{\partial H_2}- \\ -G_2\,d\sigma\frac{\partial f}{\partial(d\sigma)}=0. \end{cases}$$

$$(k^{IV})\begin{cases} -3\frac{\partial f}{\partial G_2}+2G_3\frac{\partial f}{\partial G_4}+(5G_4+\frac{26}{3}G_2G_3)\frac{\partial f}{\partial G_5}-6G_2\frac{\partial f}{\partial H_1}+ \\ +90G_3\frac{\partial f}{\partial H_2}=0. \end{cases}$$

$(k^{IV})$ liefert uns die Lösungen:

$$G_3;\quad \mathfrak{M}_4=3G_4+2G_2G_3;\quad N_1=G_2^2-H_1;\quad d\sigma;$$
$$\mathfrak{M}_5=3G_5+6G_2^2G_3+5G_2G_4;\quad N_2=30G_2G_3+H_2.$$

Führen wir diese Lösungen in $(h^{IV})$ und $(i^{IV})$ ein, so erhalten wir:

$$(h^{V})\begin{cases} 4G_3\frac{\partial f}{\partial G_3}+5\mathfrak{M}_4\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{M}_4}+(6\mathfrak{M}_5-156G_3-84G_2^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{M}_5}+ \\ +(2N_1-36-24G_3)\frac{\partial f}{\partial N_1}+(3N_2+30\mathfrak{M}_4)\frac{\partial f}{\partial N_2}- \\ -d^{\sigma}\frac{\partial f}{\partial(d\sigma)}=0. \end{cases}$$

$$(i^{V})\begin{cases} 4G_2G_3\frac{\partial f}{\partial G_3}+(5G_2\mathfrak{M}_4-48G_3^2)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{M}_4}+(6G_2\mathfrak{M}_5- \\ -156G_2G_3-84G_2G_3^2-24G_3\mathfrak{M}_4)\frac{\partial f}{\partial \mathfrak{M}_5}+(2G_2N_1- \\ -36G_2-24G_2G_3+6\mathfrak{M}_4)\frac{\partial f}{\partial N_1}+(3G_2N_2+30G_2\mathfrak{M}_4+ \\ +108G_3N_1-18\mathfrak{M}_5-540G_3-180G_3^2)\frac{\partial f}{\partial N_2}- \\ -G_2\cdot d\sigma\cdot\frac{\partial f}{\partial(d\sigma)}=0. \end{cases}$$

Wir bilden $G_2\cdot(h^{V})-(i^{V})$ und erhalten:

Digitized by Google

$$(\bar{\mathrm{i}}^{\mathrm{V}}) \quad \left\{ 8G_3^2 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{M}_4} + 4G_3 \mathfrak{M}_4 \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{M}_5} - \mathfrak{M}_4 \frac{\partial f}{\partial N_1} + (3\mathfrak{M}_5 - 18 G_3 N_1 + \right.$$
$$\left. + 90 G_3 + 30 G_3^2) \frac{\partial f}{\partial N_2} = 0. \right.$$

$(\bar{\mathrm{i}}^{\mathrm{V}})$ liefert uns die Lösungen:

$$G_3; \quad P_5 = 4G_3 \mathfrak{M}_5 - \mathfrak{M}_4^2; \quad Q_4 = \mathfrak{M}_4^2 + 16 G_3^2 N_1; \quad d\sigma;$$
$$Q_5 = 12 G_3^2 \mathfrak{M}_4 \mathfrak{M}_5 - 72 G_3^3 \mathfrak{M}_4 N_1 - 5 G_3 \mathfrak{M}_4^3 + 360 G_3^3 \mathfrak{M}_4 +$$
$$+ 120 G_3^4 \mathfrak{M}_4 - 32 G_3^4 N_2.$$

Führen wir endlich noch diese Lösungen in $(\mathrm{h}^{\mathrm{V}})$ ein, so erhalten wir:

$$(\mathrm{h}^{\mathrm{VI}}) \quad \left\{ 4G_3 \frac{\partial f}{\partial G_3} + (10 P_5 - 624 G_3^2 - 336 G_3^3) \frac{\partial f}{\partial P_5} + \right.$$
$$\left. + (10 Q_4 - 576 G_3^2 - 384 G_3^3) \frac{\partial f}{\partial Q_4} + 19 Q_5 \frac{\partial f}{\partial Q_5} - d\sigma \frac{\partial f}{\partial (d\sigma)} = 0. \right.$$

Wir erhalten als invariantes Bogenelement unserer zehngliedrigen Gruppe:

$$ds = G_3^{1/4} \cdot d\sigma$$

als Invariante vierter Ordnung:

$$J_4 = \frac{Q_4 - 288 G_3^2 + 192 G_3^3}{G_3^{5/2}},$$

als Invarianten fünfter Ordnung:

$$J_5 = \frac{P_5 - 312 G_3^2 + 168 G_3^3}{G_3^{5/2}}; \quad J_5' = \frac{Q_5}{G_3^{10/4}}.$$

Hiervon läßt sich $J_5'$ ableiten aus $J_4$, denn es wird:

$$\frac{dJ_4}{ds} = \tfrac{1}{6} J_5'.$$

Würden wir die Invarianten bis zur Invariante $J_8$ bez. $J_8'$ berechnen, so müßten wir durch geeignete Kombinationen mit Hilfe der Substitution (I) die Invarianten der größten irreduziblen Gruppe von Berührungstransformationen der Ebene erhalten.

---

In den $x, y, z, y', z' \cdots$ lautet $ds$ folgendermaßen:

$$ds = \frac{(y'''z'' - y''z''')^{1/4} \cdot dx}{(xy' + z' - y)^{1/2}}.$$

Digitized by Google

$J_4$ hat, ausgedrückt durch die Lösungen (F), folgende Form:

$$J_4 = \frac{(3G_4 + 2G_2G_3)^2 + 16G_3^2(G_2^2 - H_1) - 288G_3^2 + 192G_2^2}{G_2^{5/2}}$$

oder durch die Lösungen (E):

$$J_4 = \frac{(3\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_4 + 2\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3)^2 + 16\mathfrak{D}_3^2(\mathfrak{D}_2^2 - \mathfrak{D}_1^2\mathfrak{Q}_1) - \mathfrak{D}_1(288\mathfrak{D}_3^2 - 192\mathfrak{D}_1^2)}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2^{5/2}}.$$

In den $x, y, z, y', z' \cdots$ wird $J_4$ ein Bruch mit dem Nenner

$$y'' \cdot (xy' + z' - y)(y'''z'' - y''z''')^{5/2}$$

und dem Zähler, unter Vernachlässigung des Faktors 3 (nach Potenzen von $xy' + z' - y$ geordnet):

$$\begin{aligned}
&(xy' + z' - y)^2 \cdot [3y'' \cdot (y^{IV}z'' - y''z^{IV})^2 \\
&- 16y'''(y^{IV}z'' - y''z^{IV})(y'''z'' - y''z''') + 16y^{IV} \cdot (y'''z'' - y''z''')^2] \\
&+ 4(xy' + z' - y) \cdot (y'''z'' - y''z''')[3y''(xy'' + z'')(y^{IV}z'' - y''z^{IV}) \\
&- 16y'''(xy'' + z'')(y'''z'' - y''z''') + 16(y'''z'' - y''z''')^2 \\
&- 24y''^2(y'''z'' - y''z''')] + 60y'' \cdot (xy'' + z')^2 \cdot (y'''z'' - y''z''')^2.
\end{aligned}$$

$J_5$ hat, ausgedrückt durch die Lösungen (F), folgende Form:

$$J_5 = \frac{12G_3G_5 + 20G_2^2G_3^2 + 8G_2G_3G_4 - 9G_4^2 - 312G_2^2G_3^2 + 168G_2^4}{G_2^{5/2}}$$

oder durch die Lösungen (E):

$$J_5 = \frac{12\mathfrak{D}_1^2\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_5 + 20\mathfrak{D}_2^2\mathfrak{D}_3^2 + 8\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2\mathfrak{D}_3\mathfrak{D}_4 - 9\mathfrak{D}_1^2\mathfrak{D}_4^2 - 312\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2^2\mathfrak{D}_3^2 + 168\mathfrak{D}_1\mathfrak{Q}_1^2}{\mathfrak{D}_1\mathfrak{D}_2^{5/2}}.$$

In den $x, y, z, y', z' \cdots$ wird $J_5$ ein Bruch mit dem Nenner

$$y'' \cdot (xy' + z' - y) \cdot (y'''z'' - y''z''')^{5/2}$$

und dem Zähler, unter Vernachlässigung des Faktors 3 (nach Potenzen von $xy' + z' - y$ geordnet):

$$\begin{aligned}
&(xy' + z' - y)^2 \cdot [4y'' \cdot (y^{V}z'' - y''z^{V})(y'''z'' - y''z''') \\
&- 3y''(y^{IV}z'' - y''z^{IV})^2 - 4y'''(y^{IV}z'' - y''z^{IV})(y'''z'' - y''z''') \\
&+ 4y^{IV}(y'''z'' - y''z''')^2] + 8(xy' + z' - y)(y'''z'' - y''z''') \\
&\cdot [y''(xy'' + z'')(y^{IV}z'' - y''z^{IV}) - 7y'''(xy'' + z'')(y'''z'' - y''z''') \\
&+ 7(y'''z'' - y''z''')^2 - 13y''^2(y'''z'' - y''z''')] \\
&+ 60y''(xy'' + z'')^2 \cdot (y'''z'' - y''z''')^2.
\end{aligned}$$

---

Druckfertig erklärt 13. II. 1904.]

Digitized by Google

Digitized by Google

# INHALT.


Seite

*W. His*, Protokoll der von der internationalen Association der Akademien niedergesetzten Centralkommission für Gehirnforschung . . . . . 2

*C. Neumann*, Über Funktionen, die von drei reellen Argumenten abhängen . . . . . 5

*C. Neumann*, Über die Hervorbringung der Kettenlinie durch Biegung einer Kreisfläche . . . . . 13

*G. Noth*, Differentialinvarianten und invariante Differentialgleichungen zweier zehngliedriger Gruppen . . . . . 19

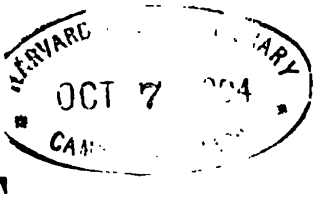


Druck von B. G. Teubner in Leipzig.



Digitized by Google

2 Ser 1726.




# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

## GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHSUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1904.

# II.

MIT VIER TAFELN UND SECHS FIGUREN.

LEIPZIG

BEI B. G. TEUBNER.

1904.

Digitized by Google

Digitized by Google

HARVARD
OCT 7
CAM

## GEMEINSAME SITZUNG BEIDER KLASSEN VOM 1. FEBRUAR 1904.

Der von der math.-phys. Klasse präsentierte Professor der Chemie Herr Dr. Arthur Hantzsch wird zum ordentlichen Mitglied der Gesellschaft gewählt.

Es liegen vor:

1. Eine Danksagung der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur für die Begrüßung zur Hundertjahrfeier.
2. Ein die phil.-hist. Klasse betreffendes Schreiben des Kultusministeriums betr. eine Albert Socin-Stiftung.
3. Eine Anfrage der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien betr. den angemessensten Termin des Kartelltages. Es wird beschlossen, insoweit nicht besondere Gegengründe vorliegen, sowohl den Kartelltag, als die Versammlung der Assoziation der Akademien je nur von Delegierten einer der beiden Klassen zu beschicken, den Kartelltag in Wien durch den Delegierten der phil.-hist. Klasse.
4. Endlich wird beschlossen, der kön. bayr. Akad. d. Wissensch. das herzliche Beileid am Tode ihres Präsidenten, des Herrn von Zittel, brieflich auszusprechen.

## SITZUNG DER KLASSE VOM 1. FEBRUAR 1904.

Von der Carl Zeiss-Stiftung ist geschenkweise eingegangen: Ernst Abbés gesammelte Abhandlungen Bd. I. Soll bestens verdankt werden.

Es tragen vor:

Herr A. Mayer eine Abhandlung von Herrn G. Scheffers: „Ein Beitrag zur Geometrie der Berührungstransformationen in der Ebene".

Herr Siegfried: „Über Protokyrine".



Digitized by Google

SITZUNG VOM 11. JANUAR 1904.

# Einige Bemerkungen über die Untersuchungsmethoden der Großhirnrinde, insbesondere des Menschen.

Dem Zentralkomitee für Hirnforschung vorgelegt

von

Paul Flechsig.

Indem ich mir gestatte, dem Zentralkomitee einige Vorschläge für die „Diskussion der Mittel zur Förderung der Hirnanatomie" zu unterbreiten, verhehle ich mir nicht, daß meinen Ausführungen von vornherein der Charakter der Einseitigkeit insofern anhaftet, als ich mich im wesentlichen auf die Gesichtspunkte stütze, welche die *von mir eingeführte und vorherrschend geübte „myelogenetische"* Untersuchungsmethode darbietet. Ich befürchte indes hiervon keine wesentlichen Nachteile für die Diskussion, da ja die Herren Mitglieder der Zentralkommission wie der Fachsektionen Gelegenheit haben werden, abweichende Standpunkte zu begründen bezw. von ihren Spezialarbeitsgebieten her ergänzende Vorschläge zu machen, mit denen sich die nachfolgenden werden in Beziehung bringen lassen. Aus meinen Darlegungen wird, wie ich hoffe, nicht nur hervorgehen, inwiefern ein Zusammenwirken zahlreicher Kräfte notwendig ist, um den schon jetzt klar erkennbaren Zielen der Hirnanatomie merklich näherzukommen, sondern vor allem daß eine fruchtbringende Kooperation wirklich durchführbar erscheint.

Nach Beschluß der Pariser Versammlung soll angestrebt werden:

1. Entwickelung der Untersuchungsmethoden,
2. Sammlung von Beobachtungsmaterial.

Digitized by Google

Ich möchte zu 1. noch hinzufügen: Vermittlung der richtigen Wertschätzung der einzelnen Untersuchungsmethoden und als weitere Aufgabe hinstellen

3. den Hinweis auf solche Lücken in den Forschungsmethoden, welche den konsequenten Ausbau der Hirnlehre in besonders fühlbarer Weise hemmen. Ich werde bei meiner Diskussion dieser Punkte immer die *Großhirnrinde* in den Vordergrund stellen und (wegen seines überragenden Interesses) vor allem das *menschliche* Organ berücksichtigen. Was sich hier *Methodisches* sagen läßt, gilt ja implizite für die übrigen Abschnitte der nervösen Zentralorgane und für die Wirbeltiere überhaupt. Ich glaube aber auch annehmen zu dürfen, daß bei den vereinigten Akademien die Bedeutung des Gehirns für das *geistige Leben* nebst den hieraus resultierenden Bedürfnissen der *wissenschaftlichen Psychologie* das wesentlichste Motiv gebildet hat, um die Gehirnanatomie in das allgemeine Arbeitsprogramm aufzunehmen. Angesichts der Tatsache, daß eine vorläufig fast unübersehbare Zahl von Stufen von den ersten Anfängen einer Hirnbildung bis zum vollkommensten Modell hinaufführt, liegt die Gefahr nahe, daß die Forschung im Streben nach Vollständigkeit sich ins Uferlose verliert, falls sie nicht planmäßig feste Zielpunkte von wirklicher Tragweite ins Auge faßt. Die menschliche Großhirnrinde, als Substrat der höchsten Erscheinungsform psychischen Lebens, stellt naturgemäß *einen* solchen Zielpunkt, ja man darf wohl sagen *das* natürliche Endziel der Hirnforschung wie der gesamten Hirnentwickelung dar.

## I. Die histologischen Methoden.

Ich berühre hier lediglich *behufs Motivierung der Nomenklatur* ganz kurz die weitschichtige Frage nach den *Gewebselementen*, zumal deren Beantwortung zum guten Teil der allgemeinen Histologie zufällt. Die zur Myelogenese in Beziehung stehenden Differenzierungserscheinungen weisen entschieden auf die Zusammensetzung des Gehirns aus anatomischen Einheiten hin, welche sich wenigstens in der Hauptsache decken mit „Neuronen" im Sinne Waldeyers. Mögen die ausgebildeten Neurone auch noch so viele Verbindungen untereinander eingehen; genetisch scheint mir ihre Selbständigkeit erwiesen, wie ich auch auf Grund meiner entwickelungsgeschichtlichen Untersuchungen an der einzelligen Entstehung selbst der längsten Nervenfasern *der Zentralorgane* konform der Hisschen Neuroblastentheorie festhalten muß.



Digitized by Google

Die nächstliegende Aufgabe, eine Übersicht über *alle im Gehirn vorkommenden Neuronenformen* zu gewinnen, ist bereits erfolgreich in Angriff genommen worden. GOLGI, RAMON Y CAJAL, RETZIUS, MARTINOTTI u. A. haben hier besonders mittelst der Silbermethoden auf das umfänglichste vorgearbeitet. Die myelogenetische Gliederung weist (s. u.) unmittelbar darauf hin, wo speziell in der Großhirnrinde besondere Neuronenformen zu finden und gewährt für diese Untersuchungen *überaus wichtige, bisher noch nicht gewürdigte Fingerzeige.*

Der Vergleich aller übrigen grauen Massen der Zentralorgane erscheint notwendig, um die weittragende Frage nach der Existenz *spezifischer* Neuronenformen im cortex cerebri zu entscheiden. Hiermit sind auch Vorarbeiten für die Untersuchung gegeben, inwieweit irgend welche spezifische Zellformen als die eigentlichen Träger der *mit Bewußtsein* verknüpften zentralen Vorgänge zu betrachten sind. Die Verfolgung der allmählichen Herausbildung der Rindenelemente in der Tierreihe, speziell der von RAMON Y CAJAL geführte Nachweis, daß die Pyramidenzelle den ältesten Bestandteil der Rinde bildet, während die doppeltgebüschelten Zellen mit kurzem Achsenzylinderfortsatz phylogenetisch weit jünger sind, stellen eine überaus wichtige Etappe auf dem Weg nach jenem Ziel dar. Bezüglich der nicht minder umfänglichen Untersuchung der ontogenetischen Entwicklungsphasen der Rindenzellen möchte ich hervorheben, daß die myelogenetischen Differenzierungserscheinungen hier wertvolle Aufschlüsse gewähren, indem sie zeigen, daß die einzelnen Neurone bzw. Neuronengruppen in einer streng gesetzmäßigen zeitlichen Ordnung bzw. Reihenfolge hervortreten. Auch im Einzelhirn lassen die Neurone der Großhirnrinde überaus große Altersunterschiede erkennen je nach dem Ort, an welchem sie sich finden — woraus sich u. a. auch phylogenetisch wichtige Rückschlüsse ergeben.

Pathologische Erfahrungen (Intoxikationen) lassen auch an *besondere chemische* Eigenschaften der Rindenzellen verschiedenen *Alters* denken. Die Frage, welche Leistungen lediglich der *Formung*, einschließlich der sichtbaren Elementarstruktur, welche dem reinen Chemismus der nervösen Substanz zuzuschreiben sind, bleibt aber völlig unberührt. Die Leitungslehre tritt auch bei der Myelogenese unverhältnismäßig in den Vordergrund, obwohl sie die wichtigsten Probleme (wie Gedächtnis, Bewußtsein etc.) nur wenig zu klären vermag, die naturgemäße Folge der Tat-

Digitized by Google

sache, daß die Histochemie weit hinter der Morphologie zurückgeblieben ist.

Die Frage nach der *Verbindungsweise* der einzelnen Neurone, ob Kontinuität oder Kontiguität, führt, allgemein gestellt, zum Teil weit ab von der Hirnanatomie. Das gegenseitige Verhalten der Neurone in den *einzelnen* grauen Massen fällt aber notgedrungen lediglich der speziellen Cerebral-Histologie zu. Ich muß es mir versagen, hier auch nur die wichtigsten Gesichtspunkte, Errungenschaften, Methoden usw. zu berühren. Nur das möchte ich — weil vielfach übersehen — hervorheben, daß nach meiner speziellen Erfahrung für die Ganglienzellen der Großhirnrinde die von Ehrlich inaugurierte, von Semi Meyer u. A. ausgebildete Anwendung des Methylenblau in vivo vielfach mehr als die Golgische Methode geeignet ist, *übersichtliche* klare Bilder zu liefern.

Naturgemäß hat die Frage nach der Verbindungsweise der *kortikalen* Neurone ein ganz spezielles Interesse, insofern als sie identisch ist mit der Frage nach den sinnlich nachweisbaren Grundlagen der Einheit des psychischen Organs. Weit entfernt, hier Stellung zu nehmen zur Frage nach der sogenannten Einheit des Bewußtseins möchte ich behufs möglichst klarer Umschreibung der Aufgaben nicht unterlassen darauf hinzuweisen, daß es sich hier um Begriffe handelt, welche im wesentlichen allgemein physikalischer Natur sind. Schon die Frage, was überhaupt die Moleküle einer Zelle zur vitalen Einheit verbindet, ist ja für die Histologie transzendent. Die Annahme durchgehender Fibrillen würde eine *endgültige* Lösung des Problems der strukturellen Einheit des psychischen Organs schon deshalb nicht geben, weil noch der einheitliche Zusammenhang *aller* einzelnen Fibrillen zu erweisen sein würde, was ja tatsächlich unmöglich ist. Vom rein histologischen Standpunkt aus müssen wir die „Einheit" der Großhirnrinde schon für erwiesen halten, falls es gelingt protoplasmatische Verschmelzungen der Neurone darzustellen.[1]) Auf Grund insbesondere der Heldschen Untersuchungen möchte ich annehmen, daß dieser Nachweis bereits vorliegt.

1) Eine solche Verschmelzung fehlt angeblich (Kölliker u. A.) an den Spitzenfortsätzen der zahllosen Pyramidenzellen, welche im Stratum zonale ein überaus dichtes scheinbar in sich geschlossenes Netzwerk bilden. Andrenfalls würde man gerade hier ein über die *gesamte Hirnoberfläche* sich ausbreitendes die Mehrzahl der kortikalen Neurone einheitlich zusammenfassendes Band zu erblicken geneigt sein, zumal

Digitized by Google

## II. Gröbere mikroskopische Anatomie (KÖLLIKER).

Die Zusammenhänge der Neurone einer so umfänglichen grauen Masse wie die Großhirnrinde, sind nur zum kleinsten Teil mittels rein histologischer Methoden zu bewältigen. Die Frage z. B. wie die über einen beliebigen Querschnitt der Großhirnrinde zerstreuten Elemente mit einander in Verbindung treten, ist mittels der Silber-, der *Methylenblau*-Methode usw. innerhalb gewisser Grenzen lösbar. Aber schon auf Entfernungen weniger Millimeter versagen dieselben, um wie viel mehr auf Entfernungen von 10 ja 20 ctm, wie sie beim Menschen vielfach in Betracht kommen. Weder das Ob noch das Wie des Zusammenhangs läßt sich ohne *besondere* Hilfsmittel feststellen. Für die Großhirnrinde speziell kommt ja neben den an sich schon kaum übersehbaren intrakortikalen Leitungen *der größte Teil des Großhirnmarkes* in Betracht, welches schon durch seine Dimensionen weit über den Horizont der Histologie hinauswächst.

Nur durch Verbindung der Methoden der feineren und gröberen mikroskopischen Anatomie läßt sich dieses ungeheure System assozierender[1]) Fasermassen dergestalt in seine Komponenten zerlegen, daß sich gesetzmäßige Beziehungen klar erkennen lassen, besonders auch gesetzmäßige *Unterschiede* in der Verbindungsweise verschiedener Abschnitte.

Es ist bei der Würdigung der „zusammenhängenden Struktur (MEYNERT)", speziell der Großhirnrinde auszugehen von der Tatsache, daß diese graue Masse eine doppelte Gliederung erkennen läßt

a) der Tiefe nach in *Schichten*,
b) der Fläche nach in *Felder*.

Die Schichtung läßt sich mit den schon erwähnten histologischen Methoden besonders der EHRLICHschen, zu welchen für die Zellkörperfärbung noch die NISSLsche kommt, soweit dar-

---

auch zahlreiche Neuriten näherer und entfernterer Neurone sich im Stratum zonale aufsplittern. Doch bleibt es auch bei dieser naheliegenden Annahme vorerst unerwiesen, daß sich Erregungen in dieser Schicht über *weitere* Strecken, etwa über mehrere Windungen fortpflanzen können. Die Existenz des weit mächtiger entwickelten extrakortikalen Assoziationssystems weist auf eine mehr lokale assoziative Bedeutung jenes Stratums hin.

1) d. h. der Elemente, welche verschiedene Abschnitte der Rinde untereinander verbinden — *also zunächst ein rein anatomischer Begriff.*

Digitized by Google

stellen, daß der wechselnde Charakter der Elemente und ihrer Anordnung im verschiedenen Rindenbezirken klar zu Tage tritt — besonders niedere Affen geben hier geradezu schematische Bilder, welche sich beim Menschen mehr weniger verwischen, ohne sich indes vollständig zu verlieren.

Ein wirkliches Verständnis[1]) dieser Variationen ergibt aber erst das rationelle, unter Beihilfe besonderer Methoden durchgeführte Studium der *Flächengliederung*, welches die Einschaltungsweise der einzelnen Regionen in den *Gesamtmechanismus*, speziell *die Beziehungen zu den peripheren Endapparaten* des Nervensystems ins Auge faßt — wobei implizite die Gliederung der Rinde in Felder von verschiedener *funktioneller* Bedeutung zu Tage tritt.

Historisch betrachtet würde es nahe liegen, über Broca, Fritsch — Hitzig, Ferrier und Charcot hinweg zu Munks Untersuchungen überzugehen bezw. überhaupt von letzteren auszugehen, da sie tatsächlich hier zuerst ein klares Programm geschaffen haben.

Ich schlage aber der Deutlichkeit der Darstellung halber einen anderen, minder historischen Weg ein, indem ich zunächst die Resultate der von mir geübten *myelogenetischen* Methode, der Gliederung der zentralen Fasermassen auf Grund der annähernd gleichzeitigen Ummarkung gleichwertiger Elemente, der sukzessiven Markumhüllung verschiedenwertiger Fasergruppen (*myelogenetisches Grundgesetz* Flechsig) kurz zusammenfasse. Bei der Verfolgung der myelogenetischen Differenzierung des Gehirns handelt es sich in erster Linie um die Anwendung eines besonderen Untersuchungsobjektes, des in gewissen Phasen der Entwicklung begriffenen Organs und nur insofern um besondere histologische Methoden, als der Nachweis markhaltiger Nervenfasern auf großen Schnitten bezw. an kompletten Schnittreihen in Frage steht, wozu die Weigertsche Methode der Hämatoxylinfärbung sich als besonders

1) In den verschiedenen Schichten die Träger verschiedener psychischer Elementarfunktionen (Sinnesempfindung, Gedächtnis etc.) zu sehen, wie dies einige Psychiater wollen, erscheint empirisch nicht begründet. Manches weist darauf hin, daß die Leitungen von und nach den subkortikalen bezw. peripheren Apparaten („Projektionssysteme") in der Hauptsache mit andern Schichten von Zellen zusammenhängen als die homo- und bilateralen Assoziationssysteme, d. h. die Nervenfasern, welche verschiedene Regionen der Rinden unter einander verbinden.

Digitized by Google

brauchbar erweist, so daß ihrem Entdecker ein wesentlicher Anteil an den vorliegenden Resultaten zukommt.

Die myelogenetische Differenzierung stellt einen rein *natürlichen* Vorgang dar; die Zergliederung folgt allenthalben strengen Naturgesetzen — es ist hier geradezu die *Auto-Anatomie*, die Selbstzergliederung des Gehirns gegeben, wobei Kunstprodukte nur soweit in Betracht kommen können, als die Tinktion der Präparate unvollkommen ausfällt. Die Methode ist überdies beim Menschen besonders leicht anwendbar, liefert hier ihre klarsten Resultate; und das notwendige Untersuchungsmaterial ist überaus *leicht* zu beschaffen.

Das gesamte Zentralnervensystem läßt sich nach dieser Methode auf Grund eines durchaus *einheitlichen* Gesichtspunktes zerlegen. Der Prozeß der sukzessiven Markumhüllung liefert geradezu ein *Programm* für die anatomische Forschung, ein von der Natur selbst aufgestelltes und befolgtes Programm — wozu noch weitumfassende Aufschlüsse über den *Entwicklungsgang*, die Zeitfolge der *Funktionen*, speziell auch der geistigen kommen.[1]) Aber freilich ist es notwendig, sich sogleich auch der *Grenzen* bewußt zu werden, welche der Verwertbarkeit der myelogenetischen Methode gezogen sind. Sie liefert im wesentlichen *Grundzüge in großen Linien* — in vielfachen Einzelheiten versagt sie. Sie gibt ja auch im einzelnen mancherlei Aufschlüsse bezüglich der Anordnung der Leitungsbahnen innerhalb grauer Massen und lehrt so gewisse Zusammenhänge kennen. Aber sie steht in dieser Hinsicht vielfach weit hinter anderen Methoden zurück, welche sie nichts weniger als entbehrlich macht. Das Hauptgebiet der myelogenetischen Methode ist die Zerlegung großer grauer und umfänglicher weißer Massen (Großhirnrinde, Kleinhirnrinde, Thalamus, Centrum semiovale, innere Kapsel usw.); sie liefert hier so klare Aufschlüsse, daß selbst *individuelle Variationen*[2]) *in vollem*

1) Zerlegung der intellektuellen Entwickelung in Einzelphasen parallel den Fortschritten der inneren Structur, in welch' letzterer Hinsicht insbesondere die vorauseilende Entwickelung der Leitungen, welche äußere Bewegungsvorgänge auf die Hirnrinde übertragen, und die spät nachfolgende des Assoziationsmechanismus hervortreten.

2) Vergl. meine Mitteilungen über die Variationen der Pyramidenbahnen im Rückenmark (Leitungsbahnen etc. 1876). Die neueren Arbeiten über das gleiche Thema haben etwas wesentlich Neues nicht gebracht.

Digitized by Google

*Umfang* scharf zu Tage treten — was keine andere Untersuchungsmethode auch nur in annähernder Vollkommenheit leistet.

In bezug auf die Großhirnrinde erscheint besonders wichtig die myelogenetische Zerlegung der mit der Rinde in Beziehung stehenden Faserzüge, dergestalt, daß sich nicht nur das Projektionssystem deutlich vom Assoziationssystem sondert, sondern auch jeder dieser großen Komplexe in offenbar funktionell verschiedenwertige Unterabteilungen zerfällt. Die Rinde gliedert sich hierbei in eine Anzahl von Feldern, welche in bezug auf das zeitliche Auftreten markhaltiger Nervenfasern eine streng gesetzmäßige Reihenfolge einhalten und sich zeitweise scharf und deutlich von einander abheben — *entwickelungsgeschichtlich ausgezeichnete* oder *myelogenetische* Rindenfelder (Flechsig).

Ich habe über die meisten dieser Gebilde nur kurze aphoristische Mitteilungen gemacht, da meine Untersuchungen in stetem Fluß begriffen waren und mir noch vor kurzem wichtige Entwickelungsstufen fehlten. Gegenwärtig bin ich soweit zum Abschluß gelangt, daß meines Erachtens nur noch unwesentliche Lücken bleiben. Ich halte es für um so notwendiger die definitiven Resultate hier kurz zusammenzufassen, als in der Literatur der letzten Jahre Darstellungen dieser Materie[1]) erschienen sind, welche nur geeignet sind Verwirrung zu stiften und die Fortschritte der wissenschaftlichen Hirnlehre empfindlich zu stören.

Die Verfolgung eines so überaus komplizierten Entwickelungsprozesses, wie ihn die sukzessive Ummarkung der zentralen Leitungsbahnen darstellt, erfordert (man darf wohl sagen selbstverständlich) nicht nur ein großes, alle wichtigen Entwickelungsstufen umfassendes Untersuchungsmaterial, sondern auch die gründlichste Durcharbeitung der Schnittserien. Denn wenn die Frage

---

1) Das gilt ganz besonders von der Darstellung meiner Rindenfelder, welche Hitzig auf dem Pariser Kongreß 1900 gegeben hat. Die von Hitzig dem Referat beigefügten Abbildungen in den Comptes rendus des Kongresses sind entstellte Reproduktionen einiger von mir lediglich für Unterrichtszwecke angefertigter provisorischer Skizzen, welche weil durch die fortschreitenden Untersuchungen überholt, nicht zur Publikation bestimmt waren und nur per nefas an die Öffentichkeit gelangt sind. Man wird sich durch den Vergleich mit den Taf. I—III vorliegender Abhandlung leicht überzeugen können, daß die Hitzigschen Abbildungen mit meinen wirklichen Anschauungen vielfach in direktem Widerspruch stehen.

Digitized by Google

beantwortet werden soll, wo sich auf einer gegebenen Altersstufe in den Großhirnhemisphären markhaltige Fasern finden, wo nicht, bez. welche Leitungen markhaltig sind, muß eben *jeder einzelne Schnitt* genau durchforscht werden; unterläßt es der Untersucher, dieser Forderung nachzukommen, so *muß* er zu falschen Resultaten gelangen. Das besonders in der Pathologie noch vielfach übliche summarische Verfahren ist hier gänzlich unangebracht. Während ich selbst meine Studien an Serienschnitten aus den Gehirnen von 56 menschlichen Föten und Neugeborenen bez. jungen Kindern angestellt und speziell vom Beginn der Markbildung in der Großhirnrinde (bei 34 cm Körperlänge) bis zur rechtzeitigen Geburt nicht weniger als 22 Entwickelungsstufen zu untersuchen für nötig gefunden habe, — begnügt sich VOGT für diesen ganzen Zeitraum mit 1, SIEMERLING mit 3 Stufen, während von MONAKOW angibt, außer einem fünf- und einem sechsmonatlichen Fötus, die überhaupt hier gar nicht in Betracht kommen, ein „Neugeborenes" an Frontalschnitten (d. h. der ungeeignetsten Schnittrichtung) untersucht zu haben. Es ist unter diesen Umständen nur natürlich, daß alle diese Autoren zu einer schiefen Auffassung des gesamten Entwickelungsganges gekommen, und daß ihnen besonders die gesetzmäßigen Beziehungen ganz entgangen sind. Die Untersuchung muß mit geradezu mathematischer Genauigkeit vorgenommen werden und hat sich streng dem Gang des Naturprozesses anzupassen, d. h. mit der ersten Entwickelungsstufe zu beginnen und von Stufe zu Stufe die Fortschritte zu registrieren, wie dies in der *wissenschaftlichen* Embryologie für selbstverständlich gilt.

Jede Nachlässigkeit rächt sich und führt zu Mißerfolgen bedenklichster Art, und so kann es nicht überraschen, daß die Angaben von MONAKOWS über die Reihenfolge der Faserentwickelung die Tatsachen geradezu auf den Kopf stellen, wenn man erfährt, daß die genaueren Untersuchungen dieses Autors da einsetzen, wo der gewaltige tausendfach gegliederte Entwickelungsprozeß beinahe zum Abschluß gelangt ist. — Auch die Angaben von VULPIUS über das Auftreten markhaltiger Fasern in der Rinde, welchen KÖLLIKER hohes Lob spendet[1]), sind, was die Zeitangaben anlangt, *ausnahmslos falsch*. Ich erwähne beispielsweise nur, daß nach VULPIUS die oberflächlichen und tiefen Tangentialfasern in der Rinde zuerst

1) Vergl. KÖLLIKER, Gewebelehre 6. Aufl., Bd. II, S. 678.

Digitized by Google

bei ca. vier Monate alten Kindern markhaltig werden. In Wirklichkeit zeigt schon die rechtzeitig geborene Frucht im Gyrus hippocampi zahlreiche markhaltige Tangentialfasern im Stratum zonale; und in den tieferen Rindenschichten der hinteren Zentralwindung sind Horizontalfasern schon einen Monat *vor* der Geburt markhaltig. Ähnliche Irrtümer in bezug auf die Zeitverhältnisse finden sich auch bei Righetti, welcher z. B. den Beginn der Markbildung im Stratum zonale des Ammonshorns auf den zweiten Monat nach der Geburt verlegt. Inwiefern an diesen und anderen unzutreffenden Angaben mangelhafte Färbetechnik, ungenügendes Material oder mangelhafte Durchforschung des Gesamthirns Anteil haben, muß ich dahingestellt sein lassen. Die voluminöse Arbeit O. Vogts in den „Biologischen Studien" enthält zwar im einzelnen nichts, was bei *objektiver Betrachtung* den von mir vertretenen Anschauungen widerspräche; aber die Gesamtauffassung des Ablaufs der Markscheidenbildung erscheint unhaltbar, was ja nicht weiter auffallen kann, da Vogt sein an sich überaus spärliches Material überhaupt nicht wissenschaftlich durchgearbeitet hat. Auch die ungenaue zeichnerische Wiedergabe der Präparate (wobei gerade prinzipiell wichtige Details mit wenig Sorgfalt behandelt sind) tragen dazu bei, die wirkliche Leistungsfähigkeit der myelogenetischen Methode hier in einer wesentlich falschen Beleuchtung erscheinen zu lassen. Charakteristisch ist, daß Vogt besonderes Gewicht legt auf die angebliche Tatsache, daß die Entwickelungsfolge der einzelnen Faserzüge in erster Linie in Beziehung steht zu ihrem Faserkaliber. Gelegentlich trifft es sich ja, daß starkfaserige Leitungen früher Mark erhalten als dünnfaserige, wie z. B. die vorderen Wurzeln eher als die hinteren. Ein Blick auf die Entwickelung der Rückenmarksstränge zeigt aber sofort, daß vielfach dünne Fasern früher Markscheiden erhalten als starke, z. B. die Gollschen Stränge vor den Pyramidenbahnen, die dünnen Fasern der seitlichen Grenzschicht der grauen Substanz (Seitenstränge) früher als die starken Elemente der direkten Kleinhirn-Seitenstrangbahnen. Das Faserkaliber spielt bei der Reihenfolge der Ummarkung eine durchaus nebensächliche Rolle — die wirklichen Ursachen liegen weit tiefer. — Auch die Vermutung von Monakows, daß auf den Gang der Markentwickelung *„mehr lokale"* Momente, z. B. die Vaskularisation, Einfluß haben, muß ich für wenig glücklich halten. Ein so gewaltiger, großzügiger Prozeß wie der Aufbau des menschlichen Gehirns, wo jedem einzelnen

Digitized by Google

der nach Milliarden zählenden Elemente der Zeitpunkt der Reifung genau vorgeschrieben ist, arbeitet wohl kaum mit so unsicheren ja man darf wohl sagen kleinlichen Mitteln, wie die Vaskularisation. Es ist mir auch *nicht eine* Tatsache vorgekommen, welche darauf hinwiese. Der Urgrund für die *suksessive* Ummarkung verschiedenwertiger Systeme wie überhaupt für den zeitlichen Ablauf der Markbildung ist gegeben in der Tatsache, daß letztere einfach die Zeitfolge *der ersten Anlage* der Fasern durch die Neuroblasten *repetiert* — mit wenigen leicht im einzelnen feststellbaren Ausnahmen wo es sich um eine *Verspätung* der Markbildung durch vorläufig unbekannte Einflüsse handelt (z. B. vordere Kommissur, Fornix inferior etc.). Besonders die Untersuchungen von W. His über die erste Anlage der zerebralen etc. Faserzüge liefern die grundlegenden Tatsachen, den eigentlichen Schlüssel für den gesamten Myelinisationsprozeß. Das myelogenetische Grundgesetz wird hierdurch zum Ausdruck für das zeitliche Entwickelungsbez. Differenzierungsgesetz *der Neurone überhaupt,* und es kommen so Faktoren in betracht, gegen welche Faserkaliber, Vaskularisation etc. gänzlich irrelevant erscheinen.

Ich habe die myelogenetischen Rindenfelder nach einem doppelten Prinzip eingeteilt:

1) nach dem prozentualen Verhältnis der Projektions- und Assoziationssysteme in den einzelnen Feldern, also *anatomisch* in

a) Sinneszentren, mit Sinnes- und motorischen Leitungen — und

b) Assoziationszentren d. h. Rindenfelder, in welchen die Sinnes- und motorischen Leitungen gegenüber den Assoziationsfasern ganz in den Hintergrund treten.

Ich habe von ersteren in „Gehirn und Seele" 4, von letzteren 3 unterschieden, im ganzen also 7 verschiedene Rindenzonen; mit dem weiteren Fortschreiten meiner Untersuchungen hat sich ergeben, daß jede derselben in mehr oder weniger zahlreiche Unterabteilungen zerfällt, und habe ich mit Rücksicht hierauf speziell in den Assoziationszentren noch weiter frühreifende Randzonen und spätreifende Zentralgebiete unterschieden, ohne die ursprüngliche Einteilung irgendwie preiszugeben. Die anatomischen Verhältnisse sind tatsächlich komplizierter als ich anfangs an einem *kleineren* Material zu erkennen vermochte. Der Reichtum der inneren Gliederung der Rinde ist weit größer, als daß man sich mit Unterscheidung von 7 Feldern begnügen *dürfte.* In der fortschreitenden Spezialisierung liegt aber nicht, wie man bei

Digitized by Google

oberflächlicher Betrachtung glauben könnte, eine Schwäche der ganzen Methode, sondern vielmehr ein Beweis ihrer weitgehenden Leistungsfähigkeit. Doch ist zu dieser Erkenntnis notwendig, daß man sich in den gesetzmäßigen Ablauf des Prozesses der Myelinisation *gründlich* vertieft.

Um eine bessere Übersicht über die wichtigsten Einzelphasen zu geben, habe ich

2) die Felder *rein entwickelungsgeschichtlich*, d. h. ohne jede Rücksichtnahme auf die anatomischen Verhältnisse eingeteilt in

Primordial-,
Intermediär- und
Terminalgebiete.

Ich habe anfangs (provisorisch!) insgesamt 40, später 36 solcher elementarer myelogenetischer Felder unterschieden und ausdrücklich betont, daß vorläufig nur für einen Teil derselben der Nachweis einer *besonderen* Funktion geführt werden könne. Ich zweifle aber im Hinblick auf den streng gesetzmäßigen Gang der Entwickelung und auf die allgemeine Erfahrung, daß ausgeprägte Differenzierungserscheinungen myelogenetischer Art sich bei näherem Zusehen stets als Ausdruck wesentlicher anatomischer Unterschiede entpuppen, nicht daran, daß jedem der sich deutlich sondernden myelogenetischen Felder *gewisse* Besonderheiten zunächst in der Stellung zum Gesamtmechanismus zukommen.

Es beruht lediglich auf Vorurteilen, wenn man vielfach a priori[1]) an der *Zahl* der Felder Anstoß genommen hat. Es ist eine rein tatsächliche Frage, in wie viel Zonen sich die menschliche Großhirnrinde myelogenetisch gliedert.

Ob die Zahl 36 zu hoch gegriffen ist, kann gar nicht von vornherein auf Grund *allgemeiner* Raisonnements entschieden, sondern muß für jedes einzelne Rindenfeld besonders diskutiert werden — was man vollständig unterlassen hat. Lediglich auf der Grundlage sorgfältiger Einzelforschung läßt sich bestimmen, ob die Unterscheidung so vieler Felder einen Wert hat. Zunächst kann es sich nur darum handeln festzustellen, wie viele myelogenetische Felder überhaupt deutlich sich sondern, und gerade hier ist ein vollständiges, *alle* wichtigen Entwickelungsphasen umfassendes Untersuchungsmaterial unentbehrlich. Vorzüglich gegen die Zeit der

1) Man darf hierin wohl eine Nachwirkung Flourensscher Lehren erblicken.

Digitized by Google

Reife hin wechseln die Grenzen der markhaltigen Rindenfelder gegen die marklosen bei aller Gesetzmäßigkeit so rasch, daß die Sonderung des Typischen vom Zufälligen nur durch Vergleich zahlreicher Gehirne gelingt. Die Behauptung SIEMERLINGS und anderer, daß schon frühzeitig durch das zerstreute Vorkommen einzelner markhaltiger Fasern in sonst noch marklosen Rindengebieten eine Abgrenzung der Felder unmöglich gemacht werde, ist hinfällig. Auch diese einzelnen Fasern, welche übrigens meist erst nach erreichter Reife auftreten, zeigen zum größten Teil eine strenge Gesetzmäßigkeit in bezug auf Zahl und Lage, so daß sie der Erkennung gesetzmäßig auftretender Markgrenzen bei sorgfältigem Studium eher förderlich als hinderlich sind — vergl. u.

Der größte und in gewisser Beziehung (d. h. für die anatomische Verwertung) wichtigste Teil der myelogenetischen Differenzierung liegt noch *vor der normalen Geburtszeit.* Diese letztere trennt gewissermaßen den Entwickelungsprozeß in zwei annähernd gleichgroße Hälften (eine „prä- und eine „postmature" Periode). Gegen Ende des vierten Lebensmonats findet man alle unterscheidbaren Faserzüge in ihren Stammfasern markhaltig; in der Folge tritt das Mark ja noch an zahlreichen anderen Fasern besonders der Rinde auf, aber es handelt sich hier einesteils um Kollateralen, andererseits um mehr vereinzelte, nicht zu gröberen Bündeln angeordnete Nervenfasern (das wirkliche Ende der Markbildung, die Ummarkung „der letzten Faser" läßt sich selbstverständlich nicht feststellen, ist aber nach den Untersuchungen besonders von KAES erst im reifen Alter zu suchen). Man kann also *mit diesen Einschränkungen* etwa vier Monate nach rechtzeitiger Geburt den Markbildungsprozeß an den gröberen Faserzügen als abgeschlossen betrachten. Ungefähr vier Monate vor der normalen Geburt beginnt auch die Markbildung in den Großhirnlappen, zunächst an einem globus pallidus und oberes Drittel der Zentralwindungen verbindenden Bündelchen.[1]) In mindestens 22 Etappen erreicht der

1) In den Stammganglien ummarkt sich zuerst (27 cm) eine neben den hinteren Längsbündeln zum ventro-lateralen Thalamuskern aufsteigende Fasergruppe und ein vom globus pallidus absteigend sich entwickelndes Fasersystem, welches unter Umgehung des Luysschen Körpers zur Gegend der Schleifenschicht zieht. Die MEYNERTsche Kommissur führt den gekreuzten Teil dieses primären Linsenkern-Systems. Die Bahn globus pallidus-Luysscher Körper stellt ein an zweiter Stelle sich entwickelndes System dar.

Digitized by Google

Prozeß die Stufe, welche die *normale rechtzeitig* geborene Frucht kennzeichnet. Ich halte es für gerechtfertigt, speziell *diese letztere* Entwickelungshöhe als Einteilungsprinzip zu verwerten, nicht nur weil hier die Ausdehnung der markhaltigen Fasern in den Großhirnwindungen ein überaus charakteristisches Bild darbietet, eine Schärfe der Differenzierung, wie sie weder vorher noch nachher erreicht wird (unregelmäßig zerstreute Fasern fehlen fast ganz), sondern weil das Zusammentreffen speziell dieser Entwickelungshöhe mit der Geburtsreife auf einen tieferen Zusammenhang hinweisen dürfte, der sich hypothetisch vielleicht dahin definieren läßt, daß das Gehirn auf dieser Entwickelungshöhe besonders geeignet erscheint, äußere Reize aufzunehmen und (zum Aufbau des Intellektes) zweckmäßig zu verarbeiten. Kommt hinzu, daß bei allen rechtzeitig geborenen gesunden Kindern in der Hauptsache übereinstimmende Befunde erhoben werden, dergestalt, daß Abweichungen mit größter Wahrscheinlichkeit auf die Schwierigkeit genauer Altersbestimmung nach Wochen oder Tagen zurückgeführt werden können, so ist es wohl gestattet, den Zeitpunkt der Reife als einen wichtigen Abschnitt in der Entwickelung der kortikalen Bahnen zu betrachten und die bis dahin bereits in die Markumhüllung eingetretenen Rindenabschnitte als Primordialgebiete (oder *prämature* Gebiete) von den späteren zu trennen.

Für die normaler Weise nach der Reife sich ummarkenden Rindenfelder habe ich bisher eine umfassende Bezeichnung nicht gewählt (man könnte sie insgesamt *„postmature“* nennen), habe sie vielmehr der bequemen Übersicht halber sogleich in zwei Unterabteilungen getrennt, deren eine früher sich entwickelnde ich als „Intermediärgebiete“ den später bez. zuletzt reifenden „Terminalgebieten“ gegenübergestellt habe. Indem ich so als Einteilungsprinzip einen rein zeitlichen Faktor wählte (bei den Intermediärgebieten Ummarkung im ersten Lebensmonat, bei den Terminalgebieten vom zweiten Lebensmonat an), habe ich nicht einen durch die Natur wirklich ausgezeichneten Zeitpunkt ins Auge gefaßt, sondern einen solchen, bezüglich dessen Zweckmäßigkeit sich Zweifel äußern lassen. Ich werde erst in der Folge versuchen, meinen Standpunkt zu rechtfertigen bezw. durch einen besseren zu ersetzen.

Ich gebe nun zunächst eine kurze Erläuterung zu Abbildung 1 und 2, welche die Verbreitung der markhaltigen Nervenfasern in der Gehirnrinde bez. in den Windungen einer rechtzeitig ge-

Digitized by Google

borenen *weiblichen* Frucht darstellen (52 cm Körperlänge). Ein Überblick über die durch Punktierung hervorgehobenen markhaltigen Rindengebiete[1]) zeigt, daß dieselben recht verschiedene Dimensionen besitzen. Die größte Zone bilden die Zentralwindungen und der Fuß der ersten Stirnwindung, sowie ein angrenzender Abschnitt des Gyrus fornicatus; in der Längenausdehnung gleich, aber meist viel schmäler ist die vom Pol des Schläfenlappens durch den Gyrus hippocampi bis zur Mitte des Gyrus fornicatus reichende Zone. Bei der Verfolgung der Markentwickelung in diesen Gebieten nach rückwärts bis zum ersten Beginn (34 cm-Fötus) zeigt sich, daß dieselben in eine größere Anzahl myelogenetischer Unterabteilungen zerfallen, *„elementare" myelogenetische Rindenfelder* FLECHSIG, d. h. Felder, welche über ihre ganze Flächenausdehnung annähernd gleichzeitig in die Markbildung eintreten, welche also wirkliche myelogenetische Einheiten darstellen, während die in Rede stehenden größeren *„Zonen"* Komplexe *mehrerer* solcher elementarer Felder darstellen, welche sich *sukzessiv* entwickeln (*„zusammengesetzte myelogenetische Rindenzonen"*). Es würde zu weit führen, alle wichtigen Einzelheiten hier aufzuführen, ich begnüge mich vorläufig mit der Andeutung, daß in den Zentralwindungen das obere Drittel neben dem Lobulus paracentralis beginnt, das mittlere bald folgt, während das untere Drittel erheblich nachhinkt. Noch später tritt das Mark auf im Fuß der ersten Stirnwindung und im Gyrus fornicatus unmittelbar darunter. In der Zone des Gyrus hippocampi beginnt der Uncus, etwas später folgt das Ammonshorn mit dem Subiculum und (*vielleicht* gleichzeitig) die untere Fläche des Gyrus fornicatus in dessen hinterer Hälfte, schließlich die Innenfläche des Temporalpols.[2]) Die Außenfläche des Gyrus hippocampi im sulcus occipito-

1) In Nr. 9—12 sind die markhaltigen Fasern nicht bis in die Rinde hinein verfolgbar, sondern nur bis an die Rinde bezw. direkt darunter. Diese Felder machen überhaupt den Eindruck des Unfertigen gegenüber den Feldern 1—8.

2) Natürlich wird man nicht erwarten dürfen, diesen Typus genau bei jeder angeblich rechtzeitig geborenen Frucht zu finden; er muß gesucht werden. Ich selbst bin erst relativ spät in den Besitz von Gehirnen dieser Entwickelungshöhe gelangt. Nicht nur das Alter, sondern auch das Geschlecht bedingen Unterschiede, letzteres insofern als bei gleich großer Körperlänge die weiblichen Früchte im allgemeinen weiter entwickelt sind als die männlichen. Bei einem 48 cm

Digitized by Google

temporalis nimmt offenbar eine Sonderstellung ein. Die kleineren markhaltigen Abschnitte sind elementare Rindenfelder, so insbesondere Nr. 3 (Septum pellucidum), 5 (Lippen der Fissura calcarina und ein Teil des Occipitalpols) 9, 10, 11 und 12 (Gyrus subangularis). Nur $7^b$ entwickelt sich nicht gleichzeitig mit 7, sodaß hier gleichfalls eine zusammengesetzte Zone vorliegt. In bezug auf die Reihenfolge der Ummarkung ordnen sich alle diese elementaren Felder in folgender Weise (vergl. Taf. III):

1. Lamina perforata anterior
   Trigonum olfactorium[1]),

---

langen Knaben fand ich überhaupt nur die Rindenfelder 1—3 markhaltig; primäres Cingulum, fornix longus und primäre Sehstrahlung zeigten nur kurze Strecken weit (nächst den Ursprungszellen) Markscheiden. Die Körperlänge steht nicht stets in einfach gesetzmäßigen Beziehungen zur inneren Entwickelungshöhe des Gehirns. Bei einer totgeborenen 57 cm langen männlichen Frucht fand ich die Entwickelung der Markscheiden *nicht* wesentlich weiter fortgeschritten als bei dem 52 cm langen totgeborenen Mädchen. Nur waren bei ersterer Frucht in dem von mir als Gyrus supraangularis bezeichneten Abschnitt der ersten Parietalwindung (äußere Fläche des mittleren Abschnittes Taf. III Fig. 5 Feld 13) einige markhaltige Bündelchen zu finden, welche bei 52 cm fehlten (zahlreiche Fasern standen hier aber dicht vor dem Zusammenfließen der initialen Myelintröpfchen zu zylindrischen Scheiden). Dagegen war ein 54 cm langes neugeborenes Mädchen erheblich weiter entwickelt. Das außerordentlich große Gehirn (vgl. Taf. II Fig. 3 u. 4) (größer als die meisten einen Monat alt gewordenen reif geborenen Früchte) zeigte in 7 weiteren Rindenfeldern, also in Sa. in 20 elementaren Feldern reichliche oder wenigstens in regelmäßigen Abständen auftretende markhaltige Fasern. Ich nehme hier konform der besonders von v. Winckel vertretenen Anschauung an, daß man es mit einem *überreifen* Kind zu tun hat. Wiederholt fand ich angeblich reif geborene Kinder nach vierwöchentlicher Lebensdauer *nicht weiter*, ja weniger weit entwickelt. Man hat sonach bei Neugeborenen nicht nur mit Früh-, sondern auch mit *Spätgeburten* zu rechnen, woraus sich eventuelle Abweichungen vom „Normaltypus" hinreichend erklären dürften. — Die Reihenfolge, in welcher die einzelnen Bündel in die Markbildung eintreten, hat sich als *absolut konstant* herausgestellt. Alle scheinbaren Abweichungen konnten auf mangelhafte Färbung zurückgeführt werden!

1) In früheren Publikationen habe ich die Zentralwindungen mit Nr. 1 bezeichnet. In einer vor kurzem gegebenen Mitteilung (Neurolog. Zentralblatt 1903 Nr. 5) habe ich Zweifel an der Richtigkeit



Digitized by Google

2. hintere Zentralwindung und hinterer Abhang der vorderen Zentralwindung oberes Drittel
   Lobulus paracentralis,
$2^b$. mittleres Drittel der hinteren Zentralwindung, später: der zugehörige convexe Abschnitt der vorderen Zentralwindung (motorische Zone),
3. Septum pellucidum mit Bandelette diagonale Broca
   Primäres Cingulum FLECHSIG
   Kortikopetale Fasern des Fornix inferior,
$4^a$. Uncus (gyrus hippocampi) innere Riechwindung,
$4^b$. Subiculum cornu Ammonis,
5. Lippen der Fissura calcarina
   Polus occipitalis
   Gyrus descendens,
   Unteres Drittel der hinteren Zentralwindung ($2^c$ und $5^b$)
6. Gyrus fornicatus hintere Hälfte untere Fläche, Fornix longus;
7. Querwindung des Schläfenlappens,
$7^b$ (?). hintere Windung der Insel obere Hälfte,
8. Pes gyri frontalis I,
$8^b$. anstoßender Teil des Gyrus fornicatus in ganzer Breite,
9. oberer Abschnitt des Cuneus[1])

---

dieser Zahl geäußert, mich aber noch nicht definitiv schlüssig gemacht, sodaß erst das hier Mitgeteilte die Entscheidung bringt. Auf Grund neuerer Untersuchungen glaube ich annehmen zu müssen, daß die Bündel des Tractus olfactorius nicht alle gleichzeitig markhaltig werden, daß hier vielmehr mehrere Abteilungen zu unterscheiden sind. Die Fasern des Tractus olf. für das Trigonum und die Lamina perf. anterior (jedenfalls *ein Teil* der Faserzüge innerhalb letzterer) werden früher markhaltig als die Olfactoriusbündel für den Uncus und die innere Riechwindung. Phylogenetisch erscheint dieser Befund hoch interessant, da die Lamina perfor. anterior phylogenetisch älter ist als der dem Pallium angehörige Uncus. Die Olfactoriusfasern in Lamina perforata und Insel werden früher markhaltig, als das erste System markhaltiger Fasern der Zentralwindungen *mit seinen Markscheiden* die Rinde wirklich erreicht. Die Zeitunterschiede sind allerdings gering. Infolge dessen habe ich nur der Lam. perf. anterior die Nr. 1 erteilt, dem Uncus etc. Nr. $4^a$. Hierdurch kommen die Zentralwindungen wieder vor die Riechrinde des Pallium. Auch für die Entscheidung dieser Fragen ist ein großes lückenloses Untersuchungsmaterial wie leicht ersichtlich durchaus unentbehrlich.

1) Meist weniger weit fortgeschritten als Nr. 10.

Digitized by Google

10. Innenfläche des Polus temporalis,
11. Querwindung des Stirnlappens (Flechsig)
pars orbitalis der III. Stirnwindung äußerer Teil,
12. Gyrus subangularis (Flechsig).

Außerdem findet sich eine markhaltige Faser im Gyrus supraangularis (Flechsig), drei im Gyrus supramarginalis, vereinzelte auch im Centrum semiovale unter dem Gyrus parietalis I (16) und dem Fuß der dritten Stirnwindung.

Reihe ich hieran sofort der Übersichtlichkeit halber ein Verzeichnis der späteren Differenzierungserscheinungen, so ist es nicht möglich, eine Entwickelungsphase zu finden, welche eine *scharfe* Trennung der postmaturen Gebiete in mehrere zeitliche Untergruppen rechtfertigte, obwohl im einzelnen betrachtet die zeitlichen Unterschiede zwischen den ersten und letzten Gliedern der Reihe recht beträchtlich sind. Eine Anzahl Spätgebiete sind bei Spätgeburten bereits markhaltig, einzelne sogar soweit, daß schon makroskopisch ein weißer Farbenton sich zeigt. So fand ich bei dem bereits erwähnten 54 cm langen Mädchen, dessen Entwickelung erheblich weiter fortgeschritten war, markhaltig (verg. Taf. II):

13. Den Gyrus supraangularis,
14. die erste Temporalwindung bis zur Außenfläche in ihrer ganzen Länge und den Übergang der ersten zur zweiten Temporalwindung im vorderen Drittel des Schläfenlappens,
15$^{a}$. den Gyrus fornicatus zwischen Feld 8$^{b}$ und Balkenknie,
15. den angrenzenden Abschnitt der ersten Stirnwindung, besonders an der Innenfläche,
16. die erste Parietalwindung hinter dem oberen Drittel der hinteren Zentralwindung,
17. die Umgebung des Feldes Nr. 5 im Cuneus, Gyrus lingualis, die Umgebung des Polus occipitalis nach außen (1. Occipitalwindung mittlerer Abschnitt),
18. den Fuß der II.
18$^{b}$. „ „ „ III. } Stirnwindung,
19. den Gyrus supramarginalis,
20.[1]) III. Occipitalwindung vordere Hälfte, angrenzende Abschnitte des Gyrus occipito-temporalis.

---

1) Die zeitlichen Unterschiede zwischen 17 bis 20 sind gering — auch stellt sich vielleicht bei weiteren Untersuchungen heraus, daß 18 und 19 vor 17 kommen.



Digitized by Google

Die Felder 11 und 12 haben sich vergrößert (11$^b$ und + Fig. 5). Im übrigen finden sich nur vereinzelte markhaltige Fasern oder kleinste Bündelchen von 2—5 Fasern (in Summa zählte ich 70 Fasern) in denjenigen Rindenfeldern, welche die *ersten der nachfolgenden Gruppe* bilden (21—23). Sie ermangeln der Regelmäßigkeit, zeigen nirgends regelmäßige Abstände[1]), enthalten auch einzelne atypische Elemente.

Das vorstehende Gehirn stellt die in der Markentwickelung *am weitesten fortgeschrittene* Frucht dar; ob sich gelegentlich Früchte intrauterin noch weiter entwickeln, vermag ich nicht zu sagen — man wird abwarten müssen, ob eventuell bei Untersuchung 60 cm und mehr messender Früchte noch eine größere Ausdehnung der markhaltigen Fasern gefunden (ev. bis 23?) werden wird. Jedenfalls ist auch bei der in Rede stehenden reifsten Frucht etwa die Hälfte der Windungen noch völlig marklos.

Der weitere Fortschritt der Ummarkung vollzieht sich, soweit ich aus meinem Untersuchungsmaterial schließen kann, in folgender Ordnung:

21. Der hintere Abschnitt der ersten Parietalwindung neben bez. vor Feld 9,
22.[2]) der größte Teil der Insel vor dem Feld 7$^b$ mit Ausnahme eines basalen Abschnittes (s. u.),
23. der Gyrus occipito-temporalis und eine angrenzende Fläche des Gyrus hippocampi hinten.

Nach Ummarkung dieser Felder sind hauptsächlich (außer dem basalen Inselfeld) noch vier größere bez. große Zonen marklos:

a) Eine innen meist im Gyrus fornicatus gelegene, zum Teil den Praecuneus bildende (vergl. 33 Fig. 4[3])),
b) eine äußere parietale 34 + 24 Fig. 3,
c) eine frontale 35 + 27 } (vergl. Figg. 3 und 4).
d) eine temporale 36 }

1) Näheres über diese einzelnen Fasern siehe unten. Selbst für Spätgeburten ist nach obigem die Angabe SIEMERLINGS, man finde schon im „Anfang" überall markhaltige „Projektionsfasern" gänzlich unzutreffend.

2) Dieses Feld gliedert sich nach einem Befund noch in zwei Unterabteilungen, sodaß der vor dem sulcus centralis gelegene Teil später markhaltig wird.

3) Das bis an 9 reichende Feld 21 muß in Abzug gebracht werden.

Digitized by Google

Von diesen Gebieten werden die drei letzten *nicht in ihrer ganzen Ausdehnung* gleichzeitig markhaltig. Es sondern sich noch *mehr oder weniger deutlich*:

24. die zweite Occipitalwindung,
25. Gyrus fornicatus hinten unten (sehr klein),
26.[1]) die Umgebung der Felder 11 vorn und innen an der Basis des Stirnlappens, Gyrus rectus,
27. die dritte Frontalwindung Mittelstück,
28. der Polteil der ersten Stirnwindung,
29. der Rest des Gyrus supramarginalis,
30. die zweite Frontalwindung oben,
31. die Übergangswindung von der zweiten Occipital- zur zweiten Temporalwindung oberhalb 12,
32. der untere Teil der Insel,
33. der Gyrus fornicatus im Bereich des Praecuneus,
34. Gyrus angularis,
35. innere Fläche der ersten Stirnwindung, innere Abteilung und anstoßender Teil des Gyrus fornicatus. (NB. Das primäre Cingulum darunter wird schon zwischen Feld 3 und 4 markhaltig, hängt aber mit der Rinde von Nr. 33 nicht zusammen.)

35[b].[2]) Gyrus frontalis II,

36. Temporalis II/III.

Fragt man, ob sich in der aufgezählten Entwickelungsreihe besonders scharf markierte Abschnitte nachweisen lassen, so ist es, wie es scheint, nicht möglich solche aufzufinden. Im allgemeinen kann man sagen, daß bis zum Anfang des zweiten Monats (Ende der fünften Lebenswoche[3]) die Gebiete 29—35 frei von *regelmäßig angeordneten* markhaltigen Fasern gefunden werden. Vereinzelt kommt wohl hier und da eine Faser oder ein kleinstes Bündel vor — aber es ist bei rechtzeitig geborenen Kindern entschieden eine ungewöhnliche Erscheinung, wenn sich in besagten Gebieten vor dem Ende der fünften Lebenswoche markhaltige Elemente auch nur in weiten *regelmäßigen* Abständen zeigen.

1) Die Zeitunterschiede zwischen 26—28 sind sehr gering.

2) b fehlt auf Fig. 3 bei 35.

3) Da ich bei 7 Wochen alten Kindern wiederholt die Terminalgebiete 28—35 noch absolut frei gefunden habe, so habe ich früher (1898) ein extrauterines Alter von 7 Wochen als Grenze der Intermediärgebiete bezeichnet. Es handelte sich hier vermutlich zum Teil um Frühgeburten.

Digitized by Google

*Da die Früchte aber,* wie bereits erwähnt, *bis zu einem vollen Monat zu spät geboren werden können, so ist es nicht ausgeschlossen, daß hier und da auch einmal bei geringerer extrauteriner Lebensdauer markhaltige Fasern in merklicher Anzahl auftreten.* Falls solche Ausnahmen häufiger vorkommen sollten, hat es gewiß sein Mißliches, ein bestimmtes extrauterines Alter als Einteilungsprinzip zu akzeptieren.

Auf die Unterscheidung der Terminalgebiete ganz zu verzichten wegen Schwierigkeit der zeitlichen Abgrenzung, erscheint mir *angesichts ihrer besonderen Stellung* nicht zweckmäßig. Es empfiehlt sich wenigstens das letzte Feld jedes einzelnen Lappens als Terminalgebiet desselben zu bezeichnen. Die so gewonnene Gruppe von 6[1]) Feldern bildet in der Tat eine zusammenhängende Reihe. Gleichzeitig ergibt die Vergleichung der auf der Außenseite des Großhirns sich sondernden Terminalgebiete mit den auf der Innenseite liegenden, daß von der Insel abgesehen, sich immer ein äußeres und ein inneres entsprechen (Nr. 35 entspricht Nr. $35^b$, Nr. 33 entspricht Nr. 34, Nr. 36 verbreitet sich über Außen- *und* Unterfläche). Daß man es hier nicht mit einem zufälligen Zusammentreffen, sondern mit Relationen von tieferer Bedeutung zu tun hat, möchte wohl nicht bezweifelt werden. *Die Vergrößerung der Außenfelder zieht anscheinend in gesetzmäßiger Weise die der Innenfelder nach sich* bezw. umgekehrt.

Es würde sich nun die Frage erheben, ob es zwischen den verschiedenen Feldern wesentliche Unterschiede zunächst in *anatomischer* Hinsicht gibt und welcherlei Art dieselben sind. In der Tat lassen sich solche nach zwei Richtungen hin nachweisen.

A. in bezug auf die leitenden Verbindungen;

B. in bezug auf den Bau der Rinde.

Ich möchte aber sofort darauf hinweisen, daß man die oben angegebene Zahl und Abgrenzung der Felder zum kleinen Teil immer noch als eine provisorische anzusehen hat.

Ich betrachte mit Rücksicht hierauf zunächst die Primordialgebiete. Die Verfolgung der Faserentwickelung in denselben ergibt nachstehendes: Die ersten Faserzüge, welche sich entwickeln (Primärsysteme FLECHSIG), sind in sämtlichen Primordialgebieten

---

1) Das frontale Gebiet läßt zwei gleichzeitig sich entwickelnde terminale Felder erkennen (außen und innen), weshalb hier nicht von „dem" Terminalgebiet die Rede sein kann.

Digitized by Google

Radiärfasern. Diese Radiärfasern gehören in 7 elementaren Feldern (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8) exogenen Leitungen an, welche von subkortikalen Zentren her sich ummarken[1]), welche also Achsenzylinderfortsätze subkortikaler Zellen darstellen und somit *kortikopetal leiten*.

Nicht sicher kommt dieser Charakter den Primärsystemen von 3, 7[b], 9, 10 und 12 zu. Wenn sich auch speziell bei 9 und 12 frühzeitig einzelne markhaltige Bündel aus der Gegend der Sehstrahlung in der Richtung gegen die Rinde verfolgen lassen, so werden diese doch alsbald überdeckt durch zahlreichere Fasern, welche allem Anschein nach von der Rinde her sich ummarken und im ganzen mehr Balken-[2]) als Projektionsfasern gleichen. Das durch die Stärke der Fasern ausgezeichnete Primärsystem von Nr. 10 kommt gleichfalls aus (?) der Sehstrahlung hervor, doch konnte ich seinen Ursprung nicht feststellen. Es bleibt lange isoliert, da sich hier die Balkenfasern relativ spät ummarken. Nr. 3 (Septum pellucidum) erhält ein starkes Bündel aus der Lamina perforata anterior, doch konnte ich nicht feststellen, ob es aus den Zellgruppen derselben oder aus anderen in die Lamina perforata eintretenden Faserzügen (aus Globus pallidus etc.) hervorgeht. Die Entstehung aus dem Uncus bezw. dem Mandelkern scheint mir durch den Ablauf der Markbildung ausgeschlossen. Dasselbe gilt für das Primärsystem von Nr. 11. Mit dem Tractus olfactorius steht Nr. 3 nur in indirekter Verbindung.

Somit ist zunächst nur für die erstgenannten 7 Felder die kortikopetale Leitungsrichtung der Primärsysteme festgestellt und

---

1) Diese Tatsache wird von Vogt u. a. offenbar wegen ungenügender Untersuchungen bestritten. Als ein besonders geeignetes Beispiel für den Nachweis der vom Ursprung zum Ende eines Neuriten fortschreitenden Ummarkung empfehle ich die primäre Sehstrahlung (vom äußeren Kniehöcker zum Feld Nr. 5) bei 42—46 ctm langen Früchten.

2) Die Balkenfasern zeichnen sich streckenweise durch eine auffallend geradlinige Verlaufsweise aus; sie erscheinen viel elastischer als die sensiblen Projektionsfasern, welche vielfach kleinere wellige Biegungen machen. Bei einiger Aufmerksamkeit wird man beide leicht unterscheiden können. — Die sensibeln Leitungen zeigen in der Rinde ein anderes Verhalten wie die motorischen: erstere verlaufen vielfach schräg und durchflechten sich *netzförmig* — sensibler Typus; letztere bilden charakteristische *Radiärbündel* (entsprechend den Gruppen von Riesenzellen) — motorischer Typus. Die Balkenfasern sind mehr gleichmäßig verteilt.

Digitized by Google

zugleich die wichtige Tatsache, daß jedes dieser Primärsysteme aus einer subkortikalen grauen Masse entspringt, welche mit einem peripheren Sinnesorgane, mit einem Sinnesnerven in mehr oder weniger direktem Zusammenhang steht. Diese subkortikalen Zentren sind der Bulbus olfactorius (1, $4^a$), der innere (7) und äußere (5) Kniehöcker und (2, 6 und 8) der Thalamus opticus bezw. globus pallidus, und hiernach sind Feld Nr. 1 und 4 Endstätten der Riechstrahlung, Nr. 5 der Seh- und Nr. 7 der Hörstrahlung, während 2 und 8 allem Anschein nach zu sensiblen Haut- und Muskel-(Gelenk-)nerven in Beziehung stehen. Im Stabkranz von Nr. 6 ist vielleicht *ein Teil* der Schmeckleitung gegeben, da bei Zerstörung der fraglichen Gegend Ageusie beobachtet worden ist (s. u.). Hiernach sind unter den Primordialgebieten für alle peripheren Sinnesorgane kortikale Endstätten enthalten; die Sinne sind vollzählig vertreten durch elementare myelogenetische Felder bezw. Gruppen elementarer Felder, welche ich hinfort als *„primäre Sinnessphären"* bezeichnen will.

Ja über die Zahl der bekannten Sinne hinaus sind distinkte Primordialgebiete vorhanden, sodaß selbst für unbekannte Sinne noch vorgesorgt sein könnte.

Die nach den Primärsystemen sich ummarkenden Fasern (Sekundär-, Tertiär-Systeme FLECHSIG) der Primordialgebiete sind nicht in allen Feldern von der gleichen Qualität. Besonders eigenartige Verhältnisse zeigen Nr. 2 und $2^b$; hier entwickeln sich an zweiter Stelle zentrifugale Bahnen, die Pyramidenbahnen, also ein motorisches Projektionssystem, in dritter Linie erst Balkenfasern, noch später fibrae horizontales der grauen Rinde und fibrae arcuatae, weit später mit entfernten Rindenbezirken in Beziehung stehende Assoziationssysteme. In anderen Primordialgebieten (etwa ausgenommen Nr. 5, s. u.) tritt ein motorisches Projektionssystem *zunächst nicht* hervor; an zweiter Stelle entwickeln sich Balkenfasern; in keinem Primordialgebiet erscheinen dieselben an erster Stelle (vergl. u. den Gegensatz bei den Spätgebieten). Bei dem 52 cm langen Mädchen fehlten in Feld 9—12 noch alle markhaltigen Balkenfasern. Aus 1 und $4^a$ gehen faserreiche markhaltige Züge hervor, welche einerseits Nr. 1 mit Septum pellucidum, Feld Nr. 6 und Subiculum cornu Ammonis (durch den fornix longus), andererseits Nr. $4^a$ mit dem cornu Ammonis durch das System $\beta$ (Riech-Schmeckstrahlung?) und mit Nr. 6 verbinden. Der primären Sehstrahlung (im Schrägschnitt 5 Fig. 7) legen sich

Digitized by Google

innen im mittleren Drittel feinste markhaltige Bündel an, welche aus der primären Sehsphäre zu kommen *scheinen* (motorische Bahn der primären Sehsphäre?). Bei einem vier Tage alten, wie es scheint rechtzeitig geborenen, Kinde und der Frucht von 54 cm sondern sich diese Bündel infolge stärkerer Markscheiden deutlicher.

*Innerhalb der Rinde* finden sich markhaltige Fasern vor allem in Nr. $4^a$ und $4^b$, an letzterer Stelle (Subiculum cornu Ammonis) in großer Zahl auch im Stratum zonale, in Nr. $4^a$ nur vereinzelt, in beiden Feldern reichlich auch in tieferen Schichten. In Nr. 7 dringen markhaltige Elemente der Hörstrahlung meist schräg in die unteren drei Rindenschichten ein[1]), in Nr. 5 bis in die zweitunterste Schicht. *Außerhalb 1, 2, 3, $4^a$, $4^b$, 5 und 7 fehlen markhaltige Fasern in der Rinde selbst gänzlich!* Das von mir aufgestellte, von von Monakow, Vogt u. a. auf Grund ungenügender Unterlagen in Zweifel gezogene *Gesetz, daß sich in der Rinde die motorischen Bahnen nach den sensiblen Leitungen entwickeln,* gilt nach vorstehendem *für jedes myelogenetische Feld im einzelnen.* Bei dem Vergleich verschiedener Felder ergibt sich aber, daß z. B. die motorische Pyramidenbahn vor[2]) der (sensiblen) Hör- und Sehstrahlung sich entwickelt. Doch nimmt die Pyramidenbahn eine Ausnahmestellung ein; die übrigen motorischen Bahnen (motorische Abteilung des Fornix inferior, Türksche, Arnoldsche Bündel) umarken sich erst, nachdem alle eigentlichen Sinnesleitungen markhaltig geworden sind.

Wesentlich andere Verhältnisse in bezug auf die Reihenfolge der Faserentwickelung zeigen die *nach der Geburt* reifenden Rindenfelder. In den meisten derselben stehen Balkenfasern[3]) an der Spitze, in einigen kurze und lange Assoziationssysteme, welche von näheren oder entfernteren Rindenfeldern aus hereinwachsen. Nur drei postmature Felder lassen Ähnlichkeit mit den Primordialgebieten erkennen, nämlich Nr. 13 (Gyrus supraangularis, welcher

1) d. h. die fraglichen Fasern sind bis hierher markhaltig bezw. gehen hier in den marklosen Zustand über, s. u.

2) Ich habe dies schon in meinen früheren Publikationen hervorgehoben. Nirgends habe ich angegeben, daß *alle* kortikopetalen Leitungen *vor* allen motorischen markhaltig werden.

3) Diese Felder färben sich infolge dessen an Weigert-Präparaten zuerst in der Nähe der Rinde blau, während sie in tieferen Abschnitten der Markleisten noch gelb erscheinen. Am Gyrus angularis ist dies speziell an Horizontalschnitten sehr deutlich zu erkennen.

Digitized by Google

sich ähnlich wie Nr. 9 und 12 verhält) und Nr. 15 und 15ª, welche wie Feld 8 zuerst Stabkranzfasern markhaltig zeigen, im Entwickelungsgang sich also den primären Sinnessphären als letzte Abteilung anschließen.[1]) In allen übrigen späteren Rindenfeldern sind es uni- oder bilaterale Assoziationssysteme, welche an erster Stelle markhaltig werden.

Schon in bezug auf die Natur der Primärsysteme ist hiernach ein durchgreifender Unterschied zwischen Primordial- und Spätgebieten (mit nur einer Ausnahme) gegeben. Wenn SIEMERLING, VON MONAKOW u. a. diese geradezu typischen Unterschiede übersehen und demgemäß ein unzutreffendes Bild des Entwickelungsganges entworfen haben, so liegt dies nicht lediglich an ihrem überaus mangelhaften Untersuchungsmaterial, sondern nicht minder an der ungenügenden Durcharbeitung desselben. Sagittal- und Horizontalschnitte ergeben weit bessere Übersichtsbilder als frontale Serien.

Eine der Hauptfragen in bezug auf die Spätgebiete ist, in welchem Verhältnis dieselben zu den primären Sinnessphären stehen.

Treten mit ersteren neue Sinnessphären auf, oder bilden die späten Felder Zonen, durch welche die primären Sinnessphären einfach vergrößert werden? *Beides ist bis auf 15 und 15ª zu verneinen.* Schon die 4 letzten Primordialgebiete (9—12) lassen sich nicht ohne weiteres unter den Begriff von Sinnessphären bringen. Es lassen sich (keineswegs lediglich infolge mangelnder Reife) zu keinem dieser Felder mit Sicherheit Fortsetzungen eines bestimmten Sinnesnerven verfolgen. Diese Felder stellen allerdings wie die primären Sinnessphären *autonome* Entwickelungszentren dar, Gebiete von selbständiger Entwickelung, indem sie sich nicht an schon früher gebildete angliedern. Eine große Ähnlichkeit mit ihnen bietet das Feld Nr. 13 dar, sodaß also die Felder 9—13 diesen eigenartigen Typus repräsentieren: autonome Entwickelungsgebiete ohne kortikopetale Projektionssysteme von *bekannter Bedeutung*[2]) — aber deshalb nicht ohne *alle* Projektionssysteme. Ich

1) Dieses Feld erhält noch (vgl. u.) ein weiteres Stabkranzbündel, welches sich durch seine überaus späte Ummarkung auszeichnet — den vorderen Sehhügelstiel, welcher erst im dritten bis vierten Monat durchgehend markhaltig wird.

2) Daß sich zu Nr. 9 und 12 frühzeitig Fasern der sekundären (inneren) Sehstrahlung verfolgen lassen, beweist an sich nicht, daß man es hier mit *optischen* Leitungen zu tun hat. Es könnte sich auch um

Digitized by Google

will sie kurz als *zweite Gruppe* der Primordialgebiete den die erste Gruppe repräsentierenden primären Sinnessphären gegenüberstellen. Was von letzterer Gruppe gesagt wird, gilt nicht ohne weiteres für Gruppe Nr. 2. Erst von Nr. 16[1]) an tritt eine weitere große Abteilung von Feldern in die Entwickelung ein, welche sich sowohl von der ersten als der zweiten Gruppe der Primordialgebiete durch die Stellung ihrer Fasern ganz wesentlich unterscheidet. Die Felder 16 bis 36 legen sich sämtlich an schon vorher entwickelte an (wodurch sie sich von Nr. 1—7, 9—13 unterscheiden), entbehren aber außerdem noch eines Stabkranzes, wodurch sie von 1—7, 8 und 15 abweichen. Demgemäß *sind sensu-motorische Bahnen in ihnen nicht nachgewiesen.* Die Felder Nr. 16 etc. legen sich den primären Sinnessphären und den Feldern der Gruppe II von allen Seiten her an; es besteht aber von vornherein ein wesentlicher Unterschied gegenüber den Feldern 8 und 15, welche zwar sich gleichfalls an schon entwickelte Zonen angliedern, aber entschieden einen mehr selbständigen Eindruck machen, da sie mit besonderen Stabkranzblättern ausgestattet sind und so mit besonderen Abschnitten („Kernen") der Sehhügel in direktem Zusammenhang stehen, von welchen aus sie ohne Vermittelung eines anderen Rindenfeldes erregt werden können. Demgegenüber lassen sich für *keines* der Felder 16—36 *Projektionssysteme* von und nach subkortikalen Zentren *einwandsfrei* nachweisen. Ist hierin zunächst ein anatomischer Unterschied gegeben, so entspricht demselben auch ein entwickelungsgeschichtlicher, da die stabkranzfreien Gebiete eben alle später als die Felder 1—15 Mark erhalten. Mit Rücksicht hierauf könnte es zweckmäßiger erscheinen, die Primordialgebiete bis zu Nr. 15 auszudehnen. Es ist mir aber ein Entwickelungsstadium, bei welchem in allen Feldern 1—15 die Markbildung begonnen hat, während

---

andersartige Projektions-, ja um Balkenfasern handeln (s. u.), da große Massen Balkenbündel in die Sehstrahlung eintreten, um sie nach kürzerem oder längerem Verlauf wieder zu verlassen.

1) Vielleicht gehört auch Nr. 14 hierher, welches sich annähernd gleichzeitig mit Nr. 15 (hintere Abteilung?) entwickeln dürfte und eventuell richtiger mit Nr. 15 zu bezeichnen ist. Die Stellung des Feldes 14 läßt sich endgültig erst nach Umgrenzung der Ursprünge der Türkschen Bündel klarlegen. Entspringen sie zum Teil in Nr. 14, so gliedert sich letzteres den Primordialgebieten an als motorische Zone der Hörsphäre. — Vergl. u. die Bemerkungen zur Pathologie.

Digitized by Google

16—36 noch völlig frei sind, in Wirklichkeit noch nicht vorgekommen und so zunächst außer Acht zu lassen. Daß die Felder 16—36 eines Stabkranzes entbehren, lehren übereinstimmend die Befunde an 12 von mir untersuchten Kindern im Alter von $3^1/_4$ Monat bis zwei Jahren.[1]) Wenn VON MONAKOW angibt, schon bei dem (*einzigen* von ihm genauer untersuchten) Kind von $3^1/_2$ Monat[2]) „überall" einen Stabkranz gefunden zu haben, so handelt es sich in der Hauptsache um Verwechselungen von Balken- und Projektionsfasern. Die ersteren müssen den Stabkranz an vielen Stellen durchqueren, um zur Mittellinie zu gelangen.

Tatsächlich sind noch beim überreifen Neugeborenen eine ganze Anzahl mächtiger Stabkranzbündel marklos. Es sind:

1) ein erheblicher Teil der sekundären Sehstrahlung (FLECHSIG) unten,

2) der hintere obere Sehhügelstiel,

3) der vordere Sehhügelstiel (mittlere Etage),

1) Es erledigt sich hiermit der Einwand, ich habe den Stabkranz in vielen Bezirken deshalb übersehen, weil ich nur jüngere Individuen, bei welchen der Stabkranz nur zum Teil markhaltig ist, untersucht habe. Übrigens zeigen auch gut gefärbte feine Schnitte durch das Gehirn Erwachsener, daß weder mikro- noch makroskopisch ein Stabkranz in Feld 16—36 nachweisbar ist. Vergl. unten die Bemerkungen zur Pathologie, wo die angeblichen pathologischen Beweise für die Existenz eines Stabkranzes in allen Windungen auf ihre wirkliche *(negative!)* Bedeutung zurückgeführt sind.

2) Wenn VON MONAKOW angibt, er habe bei diesem Kind den Stabkranz des Gyrus angularis schon makroskopisch wahrgenommen, so handelt es sich allem Anschein nach um die hintersten Bündel des Stabkranzes der *hinteren Zentralwindung* (vergl. Fig. 7 hinter 2) bezw. den unter dem Gyrus angularis hinwegziehenden mächtigen Stabkranz des Gyrus fornicatus bezw. hippocampi, mit welchem sich mächtige Balkenbündel aus dem Gyrus angularis durchflechten. Letztere Stabkranzbündel werden bereits im zweiten Monat nach der rechtzeitigen Geburt markhaltig, lange bevor im Gyrus angularis markhaltige Fasern auftreten. Besser als $3^1/_2$ Monat alte Kinder eignen sich rechtzeitig geborene, welche drei Monate gelebt haben. Hier ist in der Regel der ganze Stabkranz markhaltig, während im Gyrus angularis etc. selbst die Balkenfasern nur in der Nähe der Rinde Markscheiden zeigen. Viele in das tiefe Mark des Angularis eingetretene Stabkranzbündel verlassen dasselbe wieder, um anderweit zu enden (vergl. u.). Einen Stabkranz „des Gyrus angularis" stellen derartige Elemente natürlich nicht dar, sondern einen Stabkranz *im* G. ang.

Digitized by Google

4) die Arnoldschen Bündel,
5) die Türkschen Bündel des Hirnschenkelfußes,
6) der Fornix inferior (motorische Portion).

Die meisten dieser Faserzüge erhalten erst zwischen dem zweiten und vierten Lebensmonat durchgehends Markscheiden, aber sie stehen nicht, wie man bei oberflächlicher Betrachtung denken könnte, zu späten Rindenfeldern in Beziehung, sondern *trotz ihrer späten Entwickelung sämtlich zu Primordialgebieten*; die Arnoldschen Bündel zu dem unteren Drittel der Zentralwindungen ($5^b$), der Fornix inferior zum Gyrus hippocampi.[1]) Der vordere Sehhügelstiel, weit entfernt, sich in den Terminalgebieten des Stirnlappens aufzulösen, oder im Feld Nr. 28 (Stirnpol), wendet sich auf- und rückwärts gegen die Felder 15, $15^a$, 8, $8^b$, $4^b$, also frühe Gebiete. Der hintere obere Sehhügelstiel tritt vom Gyrus fornicatus bezw. hippocampi her in großem Bogen zum Stabkranz; Faserzüge dieser Herkunft bilden auch im unteren Abschnitt der sekundären Sehstrahlung einen Teil der spätentwickelten Fasern. Es bleibt so schließlich nur das Türksche Bündel, dessen Ursprung bisher ebensowenig einwandsfrei festgestellt worden ist wie seine (motorische?) Funktion. Nach meinen Erfahrungen kommt es zum Teil wenigstens aus der Hörsphäre (Feld 7), doch scheint es nicht einheitlich zu sein, da ein Teil (wohl fast die Hälfte der Fasern) bereits bei

1) Diese Tatsache ist fundamental; sie zeigt einwandsfrei, daß aus den *frühesten* Primordialgebieten *spätreifende* Projektionsbündel hervorgehen können. (Dies gilt z. B. auch von der vorderen Kommissur.) Der Schluß von C. Vogt, daß die spätentwickelten Stabkranzbündel des Hirnschenkelfußes etc. immer aus Terminalgebieten hervorgehen, entbehrt der sachlichen Begründung; es handelt sich lediglich um Vermutungen. Übrigens zeigt die Pyramidenbahn dasselbe Verhalten zu einer Sinnessphäre wie der Fornix inferior; sie kommt wenigstens *zum Teil* aus dem Ausstrahlungsbezirk (2, $2^b$) kortikopetaler Leitungen (der „Taststrahlung" s. u.), gehört also *nicht durchgehends* einem *rein* motorischen Feld an. Die kortikalen Zentren der zweifellos motorischen Leitungen stehen sonach zu primären Sinnessphären in nächsten räumlichen Beziehungen. Auch die einzige *Spätzone* (15), welche einen Stabkranzteil erhält, ist nur ein spätreifendes Segment einer Gruppe von *Sinnessphären*. Insofern es sich hier um eine für das Gesamtverständnis der Rindengliederung überaus wichtige Tatsache handelt, bedeutet die Behauptung, die gesamte Großhirnrinde des Menschen sei *gleichmäßig* mit *Projektionsfasern* ausgestattet, m. E. eine *fundamental falsche* Auffassung der menschlichen Rindenorganisation.

Digitized by Google

einem 16 Tage alten Kind markhaltig gefunden wurde, der Rest in der Regel erst mehrere Monate später. Es ist durchaus nicht ausgeschlossen, bedarf aber noch der Bestätigung, daß auch dieser Rest wie die übrigen fünf Spätsysteme des Stabkranzes aus einem Primordialgebiet[1]) hervorgeht. Sonach bleiben überhaupt keine irgendwie umfänglichen Stabkranzbündel für die Felder 16—36 übrig; Projektionsfasern *können schon deshalb* nur ganz vereinzelt in ihnen auftreten.[2])

Ich habe die Felder 16—36, wie bereits erwähnt, nicht nur entwickelungsgeschichtlich in Intermediär- und Terminalgebiete, sondern auch *anatomisch* in Randzonen und Zentralgebiete eingeteilt. Daß diese Unterscheidung physiologisch von besonderer Bedeutung ist, kann *fraglich* erscheinen; hingegen ist es vergleichend anatomisch bezw. phylogenetisch von hohem Interesse, festzustellen, welche Rindenfelder die Schlußsteine in der Entwickelung[3]) speziell des menschlichen Gehirns darstellen und welches die anatomische Stellung dieser Terminalgebiete, bezw. ihrer Leitungsbahnen ist. Hierbei ergibt sich, daß speziell die drei letzten Felder eigenartige Verhältnisse darbieten. Die übrigen Felder gliedern sich meist deutlich je einem bestimmten Primordialgebiet an, zu welchem sie durch Assoziationssysteme, besonders fibrae arcuatae, in besonders innige Beziehung treten, z. B. Feld 16 zum oberen Drittel der hinteren Zentralwindung bezw. Lobulus paracentralis, Feld 18 zum zweiten (obersten) Viertel der vorderen Zentralwindung etc. Hier walten offenbar enge funktionelle Beziehungen ob, wenn die betreffenden Felder auch später noch mit

---

1) Es würde mit *allen sonstigen Erfahrungen* über den Stabkranz im Widerspruch stehen, wenn man annehmen wollte, daß auch nur ein Teil der Türkschen Bündel aus einem Terminalgebiet hervorgeht.

2) Es scheint mir nicht überflüssig zu betonen, daß ich von Anfang an nur die *Existenz eines Stabkranzes* in den „Assoziationszentren" negiert habe, nicht das Vorkommen *vereinzelter* Projektionsfasern — soweit reicht ja die Zuverlässigkeit keiner der am menschlichen Gehirn anwendbaren Methoden. Ich habe auch nicht auf Grund rein negativer Befunde die ungleiche Verteilung der Projektionsbündel behauptet, sondern vor allem, weil ich die vermeintlichen Stabkranzbündel der Felder 16—36 *nach anderen Rindengebieten direkt* verfolgen konnte.

3) Z. B. auch gegenüber der wohl zweifellos berechtigten Frage, inwiefern sich auf myelogenetischem Weg eine Vorstellung über etwaige *Zwischenstufen zwischen Anthropoiden und Mensch* gewinnen läßt.

Digitized by Google

anderen Feldern (Terminalgebieten) in Verbindung treten. Ich habe es für zweckmäßig gehalten, durch eine besondere Bezeichnung alle die Felder, welche sich Primordialgebieten anlegen, hervorzuheben und habe sie zunächst einfach „Randzonen" genannt, wobei ich von der Hypothese ausging, daß diese Felder zwar ihren ganzen anatomischen Verhältnissen (leitenden Verbindungen) nach zu den Assoziationszentren gehören, daß sie aber hauptsächlich von den benachbarten Primordialgebieten aus erregt bezw. in Tätigkeit versetzt werden und somit zu letzteren im engsten funktionellen Zusammenhang stehen — letzteres deshalb, weil die fibrae arcuatae der Randzonen (wenigstens die Primärsysteme), welche sie mit benachbarten Primordialgebieten verknüpfen, von letzteren aus sich entwickeln — und so allem Anschein nach auch vom Primordialgebiet zur Randzone leiten. Die Qualität der Erregungen, welche den letzteren zufließen, würde hiernach durch das anliegende Primordialgebiet bez. dessen Projektionssysteme bestimmt. Jedes[1]) Primordialgebiet ist von einem Kranz von Randzonen umgeben, welche der Entwickelungszeit nach große Differenzen zeigen, z. B. die Zone 2 von den Feldern 16, 18, $18^b$, 19, 22, 26 etc. Die Markbildung schreitet also nicht etwa von den Primordialgebieten aus in konzentrischen Ringen weiter auf die Umgebung, wie O. Vogt auf Grund unzulänglicher Untersuchungen behauptet, sondern felderweise, wobei im allgemeinen der Satz gilt, daß sich früheren Primordialgebieten frühe, späteren Primordialgebieten späte Randzonen angliedern. Die Ziffern der Felder zeigen deutlich dieses Verhältnis; wo sich Abweichungen finden, werden vielleicht genauere Untersuchungen an einem vollständigeren Material die scheinbaren Ausnahmen beseitigen.

Den Randzonen gegenüber nehmen die 3 letzten Terminalgebiete eine eigenartige Stellung insofern ein, als sie nicht vorwiegend zu einem bestimmten Primordialgebiet in nächster Beziehung stehen, sondern sich zwischen eine größere Zahl Randzonen einschieben, und offenbar nahe Beziehungen zu *vielen* dieser letzteren wie zu einer *Reihe* von Primordialgebieten erkennen lassen. Diese abweichende Stellung wird besonders deutlich illustriert durch die Tatsache, daß die Terminalgebiete besonders reich an langen

---

1) Nicht lediglich die primären Sinnessphären, sondern auch alle Felder der zweiten Gruppe — der Hauptgrund für die Differenzierung einer *so großen Anzahl* myelogenetischer Felder.

Digitized by Google

Assoziationssystemen sind, welche sich spät, d. h. überhaupt zuletzt von allen Faserzügen entwickeln. Ich habe deshalb für diese Gebiete den Namen „Zentralgebiete" in Anwendung gebracht, es handelt sich speziell um 34, 35 und 36. Die Terminalgebiete der Insel und des Präcuneus lassen sich eventuell als späte[1]) Randzonen benachbarter Sinnessphären auffassen (Riech- und Schmecksphäre?). Insel und Präcuneus, welche eine auffallende Ähnlichkeit in der Zusammensetzung aus Feldern (ganz überwiegend Randzonen und je eine schmale primäre Sinnessphäre) erkennen lassen, bilden vielleicht eine besondere Gruppe von Zentren gegenüber den drei großen Terminalgebieten des äußeren Parietal-, Temporal- und Frontallappens. *Doch sind meine Studien hier noch nicht hinreichend abgeschlossen, um eine ganz klare Formulierung dieser Differenzen zu ermöglichen.*

*Die Lehre von den Randzonen und Zentralgebieten bedarf überhaupt noch einer weiteren gründlichen Durcharbeitung.*

Hiernach würden sich die sämtlichen Rindenfelder einteilen in

1. Primordialgebiete:
   a. 1. Gruppe: primäre Sinnessphären,
   b. 2. Gruppe: autonome Felder unbekannter Bedeutung.
2. Spätgebiete:
   a. zu 1 a und b gehörige Felder (15, $15^a$, 13, 14?),
   b. Randzonen
   c. Zentralgebiete } Assoziationszentren.

Von diesen Gebieten sind am schärfsten umgrenzbar und am besten charakterisiert die primären Sinneszentren — nicht nur infolge der klaren Stellung ihrer Faserzüge, besonders der Primärsysteme, sondern auch wegen des charakteristischen Baues der Rinde.

B. Wenn irgend etwas die Leistungsfähigkeit der myologonetischen Methode beweisen kann, so ist es die Tatsache, daß die Rindengliederung, wie sie bei reifen Neugeborenen hervortritt, *unmittelbar* erkennen läßt, wo in der Rinde Felder von *besonderem Bau* zu finden sind. Die Forschung gelangt hier, wenn sie dem

1) Für das temporale Terminalgebiet könnte man dasselbe behaupten, da es sich an die erste Temporalwindung breit anlegt. Indes halte ich den äußeren freiliegenden Teil der ersten Temporalwindung bis auf etwa 2 qcm nicht für eine primäre Sinnessphäre, sondern eine Randzone der Hörsphäre, sodaß auch Nr. 36 auf allen Seiten von Randzonen umgeben sein würde.

Digitized by Google

Wink der Natur folgt, unmittelbar zu Aufschlüssen, wie sie sonst nur durch überaus mühsame Untersuchungen nur unvollkommen erreicht werden können. Man vergleiche nur die Auswahl, die z. B. Hammarberg, v. Kölliker u. a. getroffen haben, um die Frage nach lokalen Strukturunterschieden innerhalb der Rinde zu studieren — und man wird ohne weiteres erkennen, wie irrationell die von diesen sorgfältigen Forschern untersuchten Rindenfelder teilweise ausgewählt sind.

Alle primären Sinnessphären haben eine besondere Bauart der Rinde in bezug auf Anordnung der Ganglienzellen *und Nervenfasern* zu Schichten, teilweise auch die Form der Neurone dergestalt, daß ein geübter Beobachter mit Sicherheit Schnitte auf ihre Herkunft bestimmen kann. Dabei besteht in der *groben* Anordnung eine *gewisse* Ähnlichkeit zwischen einzelnen peripheren Sinnesorganen und ihren kortikalen Repräsentanten. Der vielschichtigen Netzhaut entspricht die an Schichten reichste Rindenzone (Gebiet des Vicq d'Azyrschen Streifens), der einschichtigen Riechschleimheit die meist schichtenarme Riechsphäre. Die (zu den Geschmacksorganen in Beziehung stehenden?) inselförmigen Zellgruppen des Subiculum cornu Ammonis sind, wie der Vicq d'Azyrsche Streifen schon mit bloßem Auge sichtbar. Speziell das Gebiet des letzteren, d. h. die primäre Sehsphäre weist überaus scharfe, ja man kann sagen *lineare* Grenzen auf. Andererseits finden sich die spezifischen Merkmale durch die gesamte Ausdehnung jeder dieser Sinnessphäre hindurch in gleicher Weise. Nirgends gehen diese *besonderen Strukturen über die durch die frühe Markbildung herausgehobenen primären Sinnessphären hinaus.* Was außerhalb liegt, gehört nicht mehr zu ihnen. Diese Tatsachen sind von grundlegender Bedeutung für die Frage nach dem Umfang der Sinnessphären in der Hirnrinde und ihrer ganzen Stellung im Organismus. Offenbar sind in ihnen zentrale *Wiederholungen der peripheren Sinnesflächen* zu erblicken, und die Übereinstimmung beider bezieht sich nicht nur auf die schon angedeuteten gröberen Struktureigentümlichkeiten, sondern auch auf die Größenverhältnisse und auf die Ausstattung mit motorischen Apparaten (ganz wie in den peripheren Organen). Es erscheint zum Beweis dieser Sätze notwendig, jede einzelne primäre Sinnessphäre für sich daraufhin zu betrachten. Ich gehe hierbei aus von den Befunden an dem 52 cm langen Mädchen als den für die rechtzeitig geborene Frucht typischen. Wenn die



Digitized by Google

hier nachweisbare Ausdehnung der markhaltigen Rindenfelder auch nur eine relativ kurze Zeit *im wesentlichen* unverändert bestehen bleibt, so stellt doch gerade diese Entwickelungsphase eine prinzipiell überaus wichtige Etappe dar, die Stufe der reinlichen Sonderung der primären Sinnessphären; die markhaltigen Fasern beschränken sich auf Rindenbezirke von besonderer Struktur.

Diesen Punkt vermag nur der zu erkennen und in seiner ganzen Bedeutung zu würdigen, welcher die Entwickelungsverhältnisse vorher und nachher genau erfaßt. Bei der oberflächlichen Prüfung eines ungenügenden Materials wird wenig Aussicht sein, daß er gefunden werde; um seine Existenz nachzuweisen, ist es notwendig, *sämtliche* Schnitte einer *lückenlosen*, gleichmäßig gutgefärbten Serie einer wirklich rechtzeitig geborenen Frucht zu untersuchen!

Diese Entwickelungshöhe läßt vor allem die Ausdehnung der primären Seh- und Hörsphäre deutlich hervortreten.

a) Die von den primären *Sehzentren* nach hinten ziehenden starken Fasern (primäre Sehstrahlung FLECHSIG[1])) gelangen *mit ganz vereinzelten Ausnahmen* in die Lippen der Fissura calcarina, den Gyrus descendens und einen dem Pol anliegenden Abschnitt der 3. Occipitalwindung. Der letztere Teil der Sehsphäre variiert individuell beträchtlich. Mitunter ist er kaum deutlich unterscheidbar, mitunter umfaßt er (wie bei Anthropoiden) fast die Hälfte der 3. Occipitalwindung; auf Fig. 2 ist er ungewöhnlich groß. Infolge der beträchtlichen Tiefe der Fissura calcarina ist die Ausdehnung der primären Sehsphäre ganz erheblich viel größer als man von außen bemerkt. Die markhaltigen Elemente gehören im wesentlichen der *„primären Sehstrahlung"* an (äußere sagittale Schicht) und sind bis an die zweitunterste Rindenschicht[2])

---

1) VON MONAKOW erblickt in dieser Schicht immer noch ein Assoziationssystem, während die Mehrzahl der neueren Arbeiten sich ganz oder *teilweise meiner* Anschauung (daß der sog. fasciculus longitudinalis inferior BURDACHS die eigentliche optische Leitung darstellt) angeschlossen hat. Die VON MONAKOWsche Darstellung der Sehsphäre ist nach *vielen* Richtungen hin (Umfang, Leitungsbahnen etc.) ungenau; die hypothetischen Konstruktionen überwiegen bei weitem die wirklich gesicherten Tatsachen (vergl. u. Pathologie).

2) Die Fasern sind, wie Vergleiche mit Silberbildern lehren, markhaltig *bis zu den ersten Bifurkationen* in der Rinde; nimmt man an, daß die Markscheiden für das ausdauernde Funktionieren von Wichtig-

Digitized by Google

(die 8. bei Ramon y Cajal) als markhaltige Radiärfasern nachweisbar. Die Horizontalfasern, speziell der Vicq d' Azyrsche Streifen sind noch völlig marklos. Die primäre Sehstrahlung ist in ganzer Höhe markhaltig; etwa in der Mitte zwischen dorsaler und zentraler Kante liegen ihr feine markhaltige, zu distinkten Bündeln geordnete Fasern an, welche schon zur sekundären Sehstrahlung gehören: „Primärsystem der sekundären Sehstrahlung" (motorische Bahnen?). Dorsal und ventral von ihnen ist die sekundäre (die innere sagittale Schicht der) Sehstrahlung noch marklos. Aber auch bei Ummarkung letzterer Fasern, welche ziemlich spät erfolgt, sind in die Nr. 5 umgebende Rindenzone Nr. 17 nicht mit Sicherheit größere Mengen von Projektionsfasern zu verfolgen. In der Mitte der Außenfläche der 1. Occipitalwindung differenziert sich zwar ein kleiner Abschnitt dadurch, daß hier bald nach der Reife zahlreiche Fasern markhaltig werden — aber nicht nur, daß der ganze Charakter dieser Fasern weit mehr kortikofugalen Elementen[1]) gleicht, so verlaufen sie auch meist deutlich durch die primäre Sehstrahlung hindurch bis an die Balkenschicht. Hiernach ist es nicht gerechtfertigt, aus dem oben erwähnten Befund ganz vereinzelter Fasern, welche schon frühzeitig aus der primären Sehstrahlung in Feld $17^b$ (Fig. 3) gelangen, den Schluß zu ziehen, daß die Sehsphäre in eine spezifisch gebaute Abteilung (Bezirk des Vicq d'Azyrschen Streifens) und in eine diese umgebende nicht spezifisch gebaute (Typus der „Assoziationszentren") zerfällt.

Viel näher liegt die Deutung, daß die vereinzelten Projektionsfasern, welche in Nr. $17^b$ eintreten, *aberrierte* Elemente darstellen, wofür auch spricht, daß sie *keinerlei* Regelmäßigkeit in

---

keit sind, d. h. daß markhaltige Fasern weniger rasch ermüden, als marklose, so ist durch Ummarkung der optischen Leitungen, bis in die Hirnrinde herein, dafür gesorgt, daß optische Eindrücke nacheinander in größerer Zahl bis zur Rinde geleitet werden können. Die Sehsphäre wird somit von der Geburt an mit optischen Eindrücken gespeist. Ob der Mangel an Markscheiden jenseits der Bifurkationen Einfluß auf die Schärfe der optischen Eindrücke hat, bleibt dahingestellt; die marklosen Endverzweigungen der optischen Bahnen in der Hirnrinde sind, wie aus Ramon y Cajals Untersuchungen hervorgeht, beim neugeborenen Menschen vollständig ausgebildet.

1) Die Anordnung der Fasern in der Rinde hat manche Ähnlichkeit mit den Feldern Nr. 12 und 13.



Digitized by Google

der Anordnung zeigen und individuell variieren. In die Rinde des Gyrus angularis habe ich aus der primären Sehstrahlung Fasern nicht verfolgen können, weder beim Neugeborenen noch später. VON MONAKOW läßt aus dem mittleren Teil der Sehstrahlung bei einem $3\frac{1}{2}$ Monat alten Kind Faserbündel direkt nach außen in das untere Scheitelläppchen[1]) ziehen; eine sorgfältige Vergleichung vieler Altersstufen ergibt, daß hier eine Verwechselung vorliegt.

b) Als primäre *Hörsphäre* (7 Fig. 1) betracht ich die *Querwindung*[2]) des Schläfenlappens. Lediglich in diesem Rindenabschnitt verzweigen sich die *zuerst markhaltigen Fasern* des Schläfenlappens. Ist es an sich schon sehr wahrscheinlich, daß das Primärsystem des Schläfenlappens eine kortikopetale Leitung darstellt, so wird diese Ansicht weiter gestützt durch die Tatsache, daß dieses Primärsystem nach innen direkt bis in die Gegend des inneren Kniehöckers verfolgt werden kann. Dieser

1) VON MONAKOWS Abbildungen (Arch. für Psych., Bd. 31. Taf. I enthalten keinerlei Beweise für die Richtigkeit dieser Deutung. Fig. 1, ein Frontalschnitt, welcher noch in den Bereich der *vorderen* Zentralwindung und der Fossa Sylvii fällt, wird als Schnitt durch den Parieto-*Occipital*lappen (!) bezeichnet. Fig. 2 und 3 zeigen den angeblichen Stabkranz des gyrus angularis in *rein schematischer* Darstellung. Der gyrus angularis fällt überhaupt nicht in den Bereich dieser Schnitte! Was VON MONAKOW als Stabkranz des unteren Scheitelläppchens bezeichnet, deckt sich mit meinem „Primärsystem" der sekundären Sehstrahlung. Da ich dessen Bündel bereits bei einem 4 Tage alten reifgeborenen Kind mit starken Markscheiden ausgestattet fand, während der Gyrus angularis noch völlig marklos war, so ist VON MONAKOWS Deutung unhaltbar. Es könnte sich nur fragen, ob das Primärsystem der sekundären Sehstrahlung zum Gyrus *subangularis* oder zu Feld 5 bezw. 9 in Beziehung steht; auch ersterer erhält schon bei reifen Neugeborenen aus der Sehstrahlung markhaltige Bündel und läßt schon 1 Woche nach der reifen Geburt überwiegend markhaltige Fasern erkennen. Indes vermochte ich die Endausbreitung nicht völlig befriedigend zur Anschauung zu bringen.

2) Daß der innere Kniehöcker in die Cochlearisleitung eingeschaltet ist, wurde zuerst von mir und v. BECHTEREW *myelogenetisch* nachgewiesen. Sein Zusammenhang mit dem Schläfenlappen ist an sich kein hinreichender Beweis für seine Beziehung zum Hörnerven, ebensowenig wie daraus, daß im Anschluß an temporale Herderkrankungen durch Vermittelung der TÜRKschen Bündel Teile des großen *Brückenganglion* degenerieren, folgt, daß *letzteres* zum Hören in Beziehung steht.

Digitized by Google

Verlauf läßt sich an geeigneten Präparaten *direkt sehen*. Der Zusammenhang mit dem inneren Kniehöcker wird hierdurch allerdings nicht streng bewiesen, sondern nur wahrscheinlich gemacht. Nimmt man diesen Zusammenhang an, so wird man auch nur die Ausbreitungszone dieser „primären Hörstrahlung" als primäre Hörsphäre[1]) betrachten dürfen. Nur ein ganz geringer Teil der Fasern gelangt an die Außenfläche der 1. Schläfenwindung, unmittelbar neben der Querwindung. Die 1. Schläfenwindung gehört deshalb mit Ausnahme dieses kleinen 1—2 qcm großen Stückes *nicht* zur primären Hörsphäre.[2]) Die Fasern der „Hörstrahlung" sind bis in die Rinde hinein markhaltig, in größerer Zahl im Bereich der unteren 2 Schichten, vereinzelt auch in der drittuntersten. Dort, wo sie eindringen, ist die Rinde *um mehr als das Doppelte dicker als in den benachbarten Gebieten*. Die Grenze dieser dickeren bereits markhaltigen Hörrinde gegen die umgebenden marklosen Zonen ist von linearer Schärfe; die Rinde nimmt mit einem Schlag an Dicke zu. Es kommt dies auf Rechnung der Zunahme einesteils der Schichtenzahl anderenteils der Dicke jeder einzelnen Schicht.[3]) Dies ermöglicht eine scharfe Abgrenzung, obwohl sich der Bau der Hörsphäre (wie der Tastsphäre s. u.) viel weniger scharf von dem Typus der Assoziationszentren unterscheidet als Seh- und Riechsphäre. Ein motorisches System, welches *bald* nach der primären Hörstrahlung markhaltig

1) Sind zwei Querwindungen vorhanden, so ist meist die vordere: die Hörsphäre, gelegentlich auch beide.

2) Hierin weiche ich von allen Neueren ganz erheblich ab. Da früher überhaupt niemand imstande gewesen ist, sichere Prinzipien für die Abgrenzung der kortikalen Hörsphäre (= Projektionsfeld der Hörleitung) aufzustellen, so war man bisher im wesentlichen auf Vermutungen angewiesen: Die Pathologie (vergl. u.) ist nicht in der Lage, selbständig die Hörsphäre zu umgrenzen. Weder bei von Monakow, noch bei Wernicke u. a. findet man demgemäß einen Hinweis darauf, daß lediglich die temporale Querwindung die Hörsphäre darstellt — ausschließlich die Myelogenese gibt einen Fingerzeig.

3) Es erscheint mir nicht sicher, daß Ramon y Cajal seinem Studium der Hörsphäre mittelst der Silberfärbung *allenthalben* meine primäre Hörsphäre zugrunde gelegt hat. Er spricht ganz im allgemeinen vom Bau der 1. Temporalwindung; ob er den kleinen der Querwindung unmittelbar anliegenden Abschnitt dieser Windung getroffen hat, vermag ich aus seinen Mitteilungen nicht immer zu ersehen; indes spricht Fig. 15 in „Die Hörrinde" entschieden dafür.

Digitized by Google

wird, habe ich nicht nachweisen können. Die Fasern, welche sich bald nach der rechtzeitigen Geburt ummarken, machen durchaus den Eindruck von Balkenfasern und Fibrae arcuatae. Schon in der 1. Woche nach der Reife erhalten Fasern der 1. Temporalwindung vor und hinter der primären Hörsphäre (Feld Nr. 14 und $14^b$ Fig. 3) in großer Zahl Markscheiden. Ich habe darunter nicht mit Sicherheit kortikopetale Stabkranzfasern auffinden können.[1]) Es gliedert sich also nicht ein weiteres sensibles Projektionsfeld an die primäre Hörsphäre an. Durch das Auftreten jener Fasern geht die scharfe myelogenetische Umgrenzung der primären Hörsphäre verloren.[2]) Nach der Reife ist deshalb die Hörsphäre auf myelogenetischem Wege nicht mehr abgrenzbar. Höchst wahrscheinlich ist es, daß die Querwindung und Teile der 1. Temporalwindung zu einer *spät*entwickelten kortikofugalen Leitung in Beziehung stehen, zum TÜRKschen Bündel (MEYNERT), welches sich also zur primären Hörsphäre verhält wie die Pyramidenbahn zu den Zentralwindungen. Der Ursprung dieses Bündels ist myelogenetisch nicht scharf zu umgrenzen (vergl. u.). — Die primäre Hörsphäre hat kaum die halbe Größe der Sehsphäre, d. h. dem stärkeren Sinnesnerv, dem größeren sensiblen Endorgan entspricht ein größeres Rindenfeld. Auf Frontalschnitten[3]) läßt sich nachweisen, daß die in die linke primäre Hörsphäre eintretende *Hörstrahlung* erheblich stärker ist als die rechte; dafür, daß auch die Größe der *Hörsphäre* entsprechend variiert, habe ich Beweise bisher nicht auffinden können. Immerhin bleibt der größere Faserreichtum der linken Hörstrahlung bemerkenswert im Hinblick darauf, daß in der Regel nur die linke Hörsphäre befähigt ist, Sprachlaute bez. Worte rasch und sicher aufzufassen bez. zu unterscheiden.

c) Zone der Zentralwindungen.

Sowohl gegenüber der Seh- wie der Hörsphäre zeigt diese Zone bemerkenswerte Eigentümlichkeiten, welche von vornherein darauf hinweisen, daß man es hier nicht mit einer *einfachen*

1) Es fällt hiermit auch die Möglichkeit fort, irgendwelche erst nach meiner „Hörstrahlung" sich entwickelnde Stabkranzbündel als die eigentlichen Leitungen der Gehörseindrücke zur Rinde hinzustellen und hierdurch die von mir angegebene Hörstrahlung dieser Bedeutung zu entkleiden.

2) Dies gilt für *alle* Sinnessphären nach Ummarkung der ersten Balkenfasern in den Randzonen.

3) Desgl. an Sagittalschnitten.

Digitized by Google

primären Sinnessphäre zu tun hat, wie bei jenen. Die Besonderheiten erscheinen noch augenfälliger, wenn man die Felder 15 und 15a zur Zentralzone hinzurechnet. Sie bestehen in erster Linie in der großen Zahl durch die sukzessive Ummarkung sich sondernder Projektionssysteme, welche zu der Zentralzone in Beziehung treten:

a) *kortikopetal* sich entwickelnde, welche der Entwickelungszeit nach sich in folgende Reihe ordnen:

$\alpha$) ein kleines Bündel (ca. 100 Fasern), welches vom globus pallidus[1]) zum oberen Drittel der Zentralwindungen zieht, zumeist in die vordere, zum kleineren Teil in die hintere (34 cm)[2]);

$\beta$) ein größeres aus dem ventro-lateralen Kern des Thalamus (hintere Abt. — Schleifenkern [Dejerine]) zu dem oberen Drittel der Zentralwindungen (38 cm);

$\gamma$) starke Bündel aus dem globus pallidus ebendahin.

Beide Faserzüge ($\beta$ und $\gamma$) gelangen überwiegend in die hintere Zentralwindung, nur ein kleiner Bruchteil in die vordere. Im Lobulus paracentralis erhält zuerst der vordere Abschnitt etwas mehr Markfasern als der hintere.

$\delta$) Faserzüge, aus der Gegend des schalenförmigen Körpers und des centre median (Luys — Zentralkern des Thalamus Flechsig) zu der Gegend des mittleren Drittels der Zentralwindungen, hauptsächlich zur hinteren, zum kleinen Teil zur vorderen (40 cm);

$\varepsilon$) desgleichen aus dem vorderen ventro-lateralen Kern zum unteren Drittel der hinteren Zentralwindung (49 cm);

$\zeta$) aus dem dorso-lateralen Kern zum Fuß der 1. Stirnwindung und zum Gyrus fornicatus — $8^b$ — daneben (50 cm).

Die Bedeutung aller dieser Leitungen, deren *kortikopetale* Natur hinreichend dadurch bewiesen wird, daß sie vom Linsenkern bez. Thalamus aus gegen die Rinde zu sich entwickeln, läßt sich vorläufig nicht sicher für jede einzelne angeben — wohl aber summarisch, wenn man sich auf die pathologische Erfahrung stützt (Türk), daß Zerstörung aller dieser Bahnen zusammen beim Austritt aus der inneren Kapsel totale Hemianästhesie der äußeren Decken, der Gemeingefühle besonders des Schmerzes, wie der Gelenke, Muskeln etc. zur Folge hat. Im einzelnen aber ist

1) Ob es aus Zellen des globus pallidus entspringt, oder von anderen Zentren (Subst. nigra? etc.) herkommt, ist unentschieden.

2) Diese Zahlen bedeuten die Länge des Foetus, bei welchem die betr. Faserzüge zuerst markhaltig gefunden würden.

Digitized by Google

es vorläufig unmöglich, die Funktionen der Bündel $\alpha$ bis $\zeta$ auseinanderzuhalten. Tatsache ist, daß in den Thalamus von unten her die Hauptschleife, sowie Faserzüge der formatio reticularis und der hinteren Längsbündel etc. eintreten, in welchen man berechtigt ist, Achsenzylinderfortsätze der Hinterstrangkerne[1]), der sensiblen Nervenkerne der Oblongata (Trigeminus, Vestibularis etc.) und von Fasern der Seitenstränge (GOWERSsche Bündel) zu erblicken. Dasselbe gilt auch von Fasern der oberen Kleinhirnstiele bezw. Neuriten der Zellen des roten Kerns, welche anscheinend in den ventro- und dorso-lateralen sowie den medialen Sehhügelkern übergehen.

Aus all diesen Erfahrungen geht hervor, daß die Zentralzone zur allgemeinen Körpersensibilität in enger Beziehung steht — und es harmoniert hiermit, daß auch die Felder 15 und 15a schließlich durch mehrere kompakte Bündel (Stabkranzblatt des vorderen Gyrus fornicatus und vorderer Sehhügelstiel) mit dem dorsolateralen und medialen Kern des Sehhügels in ausgiebigste Verbindung treten, sodaß der gesamte[2]) Sehhügel mit Ausnahme des

---

1) Daß die hinteren Zentralwindungen und die hintersten Abhänge der vorderen, Zentralorgane der Hinterstränge des Rückenmarks darstellen, wie ich mit HÖSEL zuerst nachgewiesen habe, darf man auch jetzt als feststehend betrachten. Wenn die von Zellen der Hinterstrangkerne ausgehenden Leitungen im Thalamus *großenteils* an Neuronen enden, deren Achsenzylinderfortsätze zu den Zentralwindungen gelangen, so bildet dies keinen Beweis gegen jenen Zusammenhang, ebensowenig wie die „Unterbrechung" der optischen Bahnen im äußeren Kniehöcker hindert, in der Rinde der fissura calcarina ein Zentralorgan des Nervus opticus zu sehen. Wenn ich *zeitweise* angenommen habe, daß kompakte Bündel der Schleife den Thalamus durchqueren (ohne Einschaltung von Ganglienzellen), so habe ich mich auf pathologisch-anatomische Untersuchungen gestützt. Myelogenetisch hatte ich eindeutige Bilder nie wahrgenommen. Ich habe indes von vornherein mehr Gewicht auf die Tatsache der engen funktionellen Beziehungen gelegt, als darauf, daß ein *direkter* Zusammenhang zwischen Zentralwindungen und Hinterstrangkernen besteht. Die Frage, ein wie großer Teil der Schleifenfasern den Thalamus ohne Unterbrechung durchläuft, halte ich noch *nicht* für endgültig entschieden — besonders was den Menschen anlangt; offenbar kommt nur die Minderzahl in Betracht. Die Experimente am Tier weisen auf *individuelle Variationen* hin (vergl. u.).

2) Mit VON MONAKOW einen „hinteren Kern" des Sehhügels anzunehmen, erscheint mir ungerechtfertigt, da es ganz unmöglich ist,

Digitized by Google

primären und sekundären (Flechsig) Pulvinars ein Internodium[1]) zwischen den sensiblen Hirn- und Rückenmarksnerven und der Zentralzone bildet. Ich halte es deshalb für zulässig, den Stabkranz der letzteren *a potiori* kurz als „Taststrahlung" (i. w. S.) zu bezeichnen, wobei von vornherein zu betonen ist, daß die dem Tasten dienenden Leitungen (wie die optische in der Sehstrahlung) von einer Anzahl andersartiger Fasersysteme begleitet werden. Die Myelogenese lehrt, daß sich über den größten Teil der Zentralzone zahlreiche kortikopetale Projektionsfasern verbreiten. Es ist aber vorläufig kaum mit Sicherheit zu entscheiden, wie sich die einzelnen Sensibilitätsqualitäten auf die einzelnen Felder der Zentralzone verteilen (s. u.).

Einen Anhaltspunkt für die Deutung der myelogenetischen Differenzierungen gibt die Tatsache, daß die Zentralzone

---

einen solchen reinlich abzugrenzen. Die fraglichen Zellgruppen gehören dem Grenzgebiet von schalenförmigem Körper, ventro-lateralem Kern und innerem Kniehöcker an. Benachbarte Regionen des Pulvinars stehen zu einem spät reifenden Faserzug des Gyrus hippocampi und des Feldes 6 des Gyrus fornicatus (s. u.) in Verbindung; von Monakow läßt Teile dieser „Kerne" (einesteils mit der Hauptschleife, andernteils) mit der Rinde des Gyrus angularis in Verbindung stehen, so daß letzterer als das Rindenfeld der Hauptschleife (und somit der Muskelsensibilität etc.) zu betrachten sein würde. Es handelt sich hier um Konstruktionen auf recht unsicherer Basis.

1) Neben dem Pulvinar könnte nur noch der globus pallidus in Betracht kommen, bez. die Substantia nigra. Diese grauen Massen stehen aber gleichfalls mit der Zentralzone in Verbindung, so daß sie die obige Deutung letzterer nicht in Frage stellen. Hiermit erledigt sich auch die Behauptung von Monakows, ich sei zur Annahme stabkranzfreier Rindenfelder gekommen, weil ich „die Repräsentation" des Kleinhirns, der substantia nigra und des roten Kerns der Haube in Stabkranz und Rinde außer acht gelassen habe. Man weiß in bezug hierauf wenig mehr, als daß Kleinhirn und roter Kern durch Vermittelung des globus pallidus und Thalamus mit der Großhirnrinde verbunden sind — es fehlt aber *jeder exakte Beweis* dafür, daß die zugehörigen Bündel des Stabkranzes *außerhalb* der Felder 1—15 in der Rinde enden. Und dieser letzte Satz gilt auch für die Stabkranzbündel, welche *direkt* von der substantia nigra bezw. dem roten Kern (Dejerine) zur Rinde gelangen. Mit der Taststrahlung i. w. S. verlaufen auch Leitungen, welche die *vorderen Vierhügel* mit den Zentralwindungen *direkt* verbinden (in die Gegend von ε S. 87 verfolgbar).

Digitized by Google

b) auch reich an frühreifen *motorischen* Projektionssystemen ist, daß speziell die Pyramidenbahnen aus ihr hervorgehen, und zwar wie die Myelognose zeigt, ausschließlich aus den Zentralwindungen und dem Lobulus paracentralis. Denn schon zu der Zeit, wo Feld 8 und $8^b$ markhaltige Fasern noch nicht erkennen läßt, ist die Pyramidenbahn *über ihren gesamten Querschnitt* markhaltig (45 cm). Die Verfolgung ihrer Entwickelung ergibt außerdem, daß sich die Fasern aus dem oberen Drittel der vorderen Z. W. und aus dem Lob. paracentralis früher ummarken, als die Fasern aus dem mittleren Drittel. Die Pyramidenfasern jedes derselben ummarken sich kurz, nachdem die kortikopetalen Fasern des anliegenden Abschnittes der hinteren Zentralwindung Markscheiden erhalten haben. Die späte Entwickelung des unteren Drittels der letzteren bringt es mit sich, daß schon dessen kortikopetale Bündel später Markscheiden erhalten als die motorischen Bahnen der oberen zwei Drittel. Die Markentwickelung an den Zentralwindungen erfolgt also segmentweise, und diese Segmente entsprechen offenbar verschiedenen Körperteilen; da wir nach pathologischen und physiologischen Erfahrungen nicht zweifeln können, daß die oberen Abschnitte der Zentralwindungen zu den Extremitäten in Beziehung stehen, die unteren zur *Kopfregion* bezw. zu den von Facialis und Hypoglossus und anderen motorischen Hirnnerven innervierten Kopfmuskeln, so entwickeln sich die Zentren für die Extremitäten früher als die für die motorischen Gesichtsnerven bez. Kopfnerven. Die motorischen Bahnen der letzteren erhalten (falls DEJERINES Beobachtungen über die Rindenursprünge der ARNOLDschen Bündel des Hirnschenkelfußes richtig sind) weit später Mark (erst gegen den 3. bis 4. Monat!)

*Sonach bleibt der von mir aufgestellte Satz, daß die motorischen Bahnen des Stabkranzes nach den sensiblen Markscheiden erhalten, zu Rechte bestehen*, jedoch mit der Einschränkung, daß derselbe immer nur für jedes einzelne Rindenfeld gilt (vgl. o.). *Das Prinzip der felderweisen Entwickelung der Leitungsbahnen ist überhaupt das eigentliche Grundprinzip,* welches in zeitlicher Hinsicht die Entwickelung der kortikalen Fasersysteme beherrscht.

Es bedarf aber speziell zum Nachweis dieses Satzes eines größeren Untersuchungsmaterials.

Dieser Ablauf der Markbildung nach Segmenten bringt es mit sich, daß sich die Bahnen keiner in der Zentralzone vertretenen Sinnesqualität in ihrer Gesamtheit gleichzeitig oder

Digitized by Google

binnen eines kurzen Zeitraumes ummarken. Hierdurch entsteht ein *scheinbarer* Widerspruch zu dem myelogenetischen Grundgesetz, der sich vielleicht dahin löst, daß die *verschiedenen Empfindungs- und Bewegungsnerven eines und desselben Körperteils phylogenetisch etc. enger zusammengehören,* als die Repräsentanten derselben Sensibilitätskategorie in *verschiedenen Körperteilen.* Wie dem auch sei, so ist die Zentralzone der einzige Komplex von Primordialgebieten, bei welchem neben der Gliederung der *qualitativ* verschiedenen Leitungsbahnen auch die nach Körper*segmenten* zu berücksichtigen ist. Hierdurch wird der Nachweis völlig scharf umgrenzter elementarer myelogenetischer Felder um so mehr erschwert, als in einem großen Teil der Zentralwindungen mehrere verschiedene kortikopetale Leitungen in den nämlichen Rindenbezirk eindringen und als sich dazwischen bezw. in der Hauptsache dicht daneben die Ursprungszellen motorischer Bahnen finden, welch letztere kurz nach ersterem Mark erhalten, so daß sich die myelogenetischen Grenzen der rein sensiblen Felder alsbald verwischen. Bei Benutzung geeigneter Entwickelungsstufen gelingt es trotzdem festzustellen, daß in allen 3 Segmenten die Reihenfolge der qualitativ verschiedenen Leitungen übereinstimmt und daß auch die Verteilungsweise annähernd gleich ist, indem in allen Höhen die sensiblen Leitungen den vorderen Abhang sowie die Konvexität (Oberfläche) der vorderen Zentralwindungen frei lassen so daß diese letzteren Abschnitte ausschließlich von motorischen Zentren (Ursprünge motorischer Bahnen) eingenommen werden, während die hintere Zentralwindung in ihrem vorderen Abhang und an der Konvexität kompakte Bündel subkortikaler Herkunft (Gelenkempfindungen?) in sich aufnimmt und ganz überwiegend von motorischen Leitungen bezw. Zentren frei bleibt.[1]) Es ergibt sich aber auch, daß in allen Höhen am hinteren Abhang der vorderen Zentralwindung motorische und sensible Leitungen sich mischen, sodaß sich *innerhalb der Zentralfurche*[2]) — aber auch

1) Hieraus folgt ohne weiteres, daß motorische Lähmungen infolge von Erkrankungen der vorderen Zentralwindungen *nicht notwendigerweise* von Sensibilitätsstörungen begleitet sein müssen.

2) Doch gibt es hiervon wenn auch selten Ausnahmen. Bei dem 48 cm langen Knaben sind infolge ungewöhnlicher Lage der Zentralfurche die sensible Zone der hinteren und die motorische der vorderen Z. W. ohne deutliche Abgrenzung in eine einzige breite Windung vereinigt. *Die überaus schmale hintere Zentralwindung enthält nur ganz vereinzelte*

Digitized by Google

nur hier — eine sensu-motorische Zone ausbreitet. Schon ca. 1 Monat vor der Reife werden hier zahlreiche fibrae arcuatae (als erste ihrer Art) markhaltig, welche beide Zentralwindungen zu einem einheitlichen Ganzen verbinden, bevor noch irgend welche anderen Rindenfelder markhaltige Assoziationsfasern zeigen. Wenn nun alle diese Verhältnisse es mit sich bringen, daß man die Zahl der elementaren myelogenetischen Felder, welche die Zentralwindungen zusammensetzen, nur schwer bestimmen kann, so ist doch andrerseits die myelogenetische Gliederung insofern eine scharf ausgeprägte, als sich in ihr die auf experimentellen bez. pathologischen Wegen gewonnenen Aufschlüsse über die Anordnung der Zentren für die Willkürbewegungen deutlich wiederspiegeln, und es ist schon nach meinen bisherigen Befunden, mit großer Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß bei Untersuchung einer hinreichend großen Zahl von Entwickelungsstufen eine *der funktionellen genau entsprechende myelogenetische Differenzierung gefunden werden wird.*

Indem hiernach an der myelogenetischen Gliederung der Zentralwindungen zwei Faktoren, ein systematischer (Nacheinander verschiedenwertiger Faserzüge) und ein topographischer (Nacheinander zu verschiedenen Körpersegmenten gehöriger Leitungen) Anteil gewinnen, treten vom Beginn der Ummarkung bis zur Beendigung, an den verschiedenen Abschnitten so große zeitliche Unterschiede hervor, daß es ungerechtfertigt erscheinen könnte, das *gesamte* Gebiet der Zentralwindungen mit derselben Nummer zu bezeichnen: für das obere Drittel ist die Nummer 2 sicher gerechtfertigt, dagegen trifft speziell für das untere Drittel die Nr. 2c strenggenommen nicht zu, da in den Feldern 3, $4^a$, 4b, ja selbst in 5 und 6 (?) früher markhaltige Fasern sichtbar werden. Ich habe deshalb dem untersten Abschnitt der Zentralwindung neben der (die qualitative Zugehörigkeit zu 2, 2b bezeichnenden) Nr. 2c noch die Bezeichnung 5b gegeben, um die zeitlichen Unterschiede zu markieren. 2b erhält Markscheiden (in der hinteren Zentralwindung) zum Teil sicher vor Nr. 3, sodaß hier eine Inkonsequenz in der Bezeichnung nicht vorliegt. Der motorische Abschnitt vor $2^b$ tritt dagegen erst nach Nr. 3 in die Markbildung ein, so daß *hier* (im Interesse der Übersicht-

---

*Projektionsfasern*, obwohl die Tastestrahlung numerisch etc. die normale Entwickelung zeigt.

Digitized by Google

lichkeit, bezw. um nicht funktionell Zusammengehöriges auseinanderzureißen) streng genommen das allgemeine Prinzip der Numerierung nach der wirklichen Zeitfolge durchlöchert wird.

Von der 2. und 3. Stirnwindung gehören nur ganz verschwindende Abschnitte zu der Zentralzone; von der 3. Stirnwindung nur das unterste an der Fossa Sylvii gelegene Dreieck und *mitunter (nicht regelmäßig)* ein im Winkel[1]) zwischen sulcus praecentralis und 2. Stirnfurche gelegenes kaum $^1/_2$ qcm großes Segment. In der 2. Stirnwindung findet sich an entsprechender Stelle (zwischen sulcus praecentralis und 1. Stirnfurche) regelmäßig ein um das Doppelte größeres Dreieck. In der Hauptsache gehört der Fuß der 2. wie der 3. Stirnwindung *nicht* zur Zentralzone; ich habe auf meinen früheren Abbildungen in „Gehirn und Seele" die Körperfühlsphäre *zu groß*[2]) gezeichnet. Die in der 1. Frontalwindung und im Gyrus fornicatus gelegenen Teile der Zentralzone, welche ich kurz *frontale Abteilung* derselben nennen will, im Gegensatz zu den die Rolandosche Furche begrenzenden Feldern, welche ich kurz als Rolandosche *Abteilung* zusammenfassen will, lassen eine ähnliche segmentäre Entwickelung erkennen, wie die Zentralwindungen; wie in diesen letzteren die Ummarkung von der Gegend des Lobulus centralis ausgeht, so auch in der frontalen Abteilung. Sehr scharf umgrenzt sind die myelogenetischen Felder 8 und 8b; besonders Nr. 8 zeigt bei allen gerade reifen Früchten genau dieselbe Ausdehnung, 8b variiert in der Längenausdehnung gelegentlich um $^1/_2$ cm. Die Beziehungen dieser Zone zu Thalamuskernen vermag ich nicht völlig klar darzulegen; zur Zeit, wo die Ummarkung der fraglichen Stabkranzbündel beginnt, sind im Thalamus schon sehr zahlreiche andersartige Stabkranzbündel markhaltig. In der Hauptsache

---

1) Ich finde das *gelegentliche* Vorkommen eines Stabkranzgebietes hier besonders deshalb erwähnenswert, weil bei einigen Anthropoiden dicht vor dieser Gegend ein Zentrum für konjugierte Augenbewegungen durch Reizversuche nachgewiesen worden ist (s. u.). Beim Menschen verschmilzt dieses Zentrum wohl *in der Regel* (?) mit der vorderen Zentralwindung; weiter nach vorn differenziert es sich myelogenetisch *nicht*!

2) Also gerade das Gegenteil von dem, was Hitzig in seinem Rapport für den Pariser Kongreß (1900) behauptet hat. Die Widersprüche, welche Hitzig zwischen meinen verschiedenen Mitteilungen über die Größe der Sinneszentren findet, sind in der Hauptsache von ihm selbst konstruiert worden.

Digitized by Google

gewinnt man den Eindruck, daß die fraglichen Bündel aus der Gegend des dorso-lateralen Kerns hervortreten. Das Stabkranzbündel für 8b trennt sich schon dicht über dem Balken von dem Stabkranz von 8. Die Felder 15 und 15a zeigen nicht zu allen Zeiten in ihrer ganzen Längsausdehnung dieselbe Entwickelungshöhe; die hinteren Abschnitte führen z. B. bei reifen Früchten, welche zwei Wochen gelebt haben, mehr markhaltige Bündel als die vorderen. Doch wird der Stabkranz von 15a hier schon in der ganzen Länge markhaltig gefunden; die Stabkranzfasern stehen nur vorn am Balkenknie weniger dicht. Dieses mächtige Stabkranzblatt verschmilzt frühzeitig mit dem Primärsystem von 8b. Beide zusammen bilden einen scharf gesonderten Faserzug, dessen Umfang man an Sagittalschnitten[1]) gut überblicken kann. Er dürfte kaum erheblich weniger Fasern zählen als die sensiblen Strahlungen der Zentralwindungen. In Nr. 15 treten Radiärbündel, welche man als Projektionssysteme zu betrachten hätte, im Beginn der Ummarkung nur in der hinteren Hälfte in dichten Reihen auf; an der vorderen Hälfte stehen sie in ziemlich weiten aber regelmäßigen Abständen, so daß hier ähnliche Verhältnisse obwalten wie im unteren Drittel der Zentralwindungen im Beginn der Ummarkung. Diese vorderen Abschnitte von Nr. 15 sind, wie es scheint, ganz besonders das Ziel der im vorderen Sehhügelstiel (aus dem medialen Kern) gegen das Stirnhirn vordringenden Stabkranzbündel, welche sich durch späte Entwickelung auszeichnen.[2])

Die frontale Abteilung der Zentralzone unterscheidet sich von der ROLANDOschen ganz wesentlich durch den Umstand, daß

---

1) Frontalschnitte sind zur genauen Orientierung unbrauchbar. Ein großer Teil der Irrtümer von MONAKOWS u. a. beruht auf der überwiegenden Verwendung von Frontalschnitten.

2) Dieselben laufen im Mark des Stirnhirns zum Teil bis dicht an die Rinde des Pols — bei einem 3 Monat alten Kind bis auf 1 mm (!) Entfernung — und biegen dann recht-, ja spitzwinklig um, so daß sie schließlich in Nr. 15, 8 etc. weit entfernt vom Stirnpol enden. Da die Form der Umbiegung selbst bei gleichaltrigen Kindern große, individuelle Variationen zeigt, so ist es keineswegs ausgeschlossen, daß ausnahmsweise Bündel des vorderen Sehhügelstiels auch einmal im Feld 28 *in die Rinde* münden. Angesichts der Variationen, welche man im Verhalten des Fornix zum corpus mamillare bez. zur Fornixkreuzung nachgewiesen hat (EDINGER u. WALLENBERG), wird man auch im Stabkranz mit individuellen Verlaufsschwankungen rechnen müssen (s. u.).

Digitized by Google

erstere, wie es scheint, zum Hirnschenkelfuß Beziehungen *nicht* hat, daß speziell die Pyramidenbahnen einen Zuwachs aus der frontalen Abteilung nicht erhalten. Auch die Felder der frontalen Zone entsprechen offenbar verschiedenen Körpersegmenten; nach experimentellen Befunden kommt hauptsächlich der *Rumpf* in Betracht und auch für den Menschen liegen dahinzielende Beweise vor. Vielleicht beruht es auf einem tieferen Zusammmenhang, daß die frontale und Rolandosche Abteilung annähernd gleich lang sind, ja (in Anbetracht der Tiefe der Rolandoschen Furche) an Flächengehalt übereinstimmen. Weitaus die Hauptmasse der frontalen Abteilung liegt an der *Innenfläche* der Hemisphäre.

Sucht man sich eine Vorstellung zu machen, wie sich die verschiedenen Sensibilitätskategorien über die gesamte Zentralzone verbreiten, so würde man vor allem auszuschließen haben, daß irgend ein *anderes* Rindenfeld mit der allgemeinen Sensibilität zu tun hat. Tatsächlich kommen hier nur die Felder Nr. 6 (Gyrus fornicatus hinten) und Nr. $4^b$ (Gyrus hippocampi) in Betracht, da sie ein Stabkranzblatt aus dem hinteren Teile der inneren Kapsel erhalten. Doch liegen beim Menschen Beweise für Beziehungen dieser Bündel zur Haut- und Muskelsensibilität vorläufig nicht vor (vergl. d. hippocamp. Zone). Für die Rolandosche Abteilung (bez. für die ganze Zentralzone) ist nur ein annähernd regelmäßig bei gewissen Rindenverletzungen wiederkehrendes sensibles Symptom[1]) bekannt, welches physiologische Schlüsse gestattet: Die Aufhebung des stereognostischen Sinnes der Hand bei Verletzungen des mittleren Drittels der Zentralwindungen. Die klinische Analyse ergibt, daß hierbei in der Regel die Sensibilität der Fingergelenke (Wahrnehmung passiver Bewegungen) und der Ortssinn der Haut besonders leidet (es kommt meiner Erfahrung nach keineswegs in erster Linie die Lähmung der Finger in Betracht, wie Ferrier will), während schmerzhafte Reize und tieferer Druck noch empfunden werden. Hieraus darf man schließen, daß *gewisse Komponenten* des Tastsinnes in der Rolandoschen Abteilung der Zentralzone lokalisiert sind, Komponenten, welche am Tier überhaupt nicht genauer geprüft werden

1) Dieses Symptom wird nicht, wie Hitzig behauptet, *selten* bezw. nur ausnahmsweise gefunden; es ist vielmehr bei Verletzungen des mittleren Drittels der Zentralwindungen, besonders der hinteren, *in der Regel* — ja wohl ausnahmslos vorhanden.

Digitized by Google

können und auch am Menschen leicht übersehen werden, wenn man nicht speziell nach ihnen sucht. Ich habe deshalb früher die ROLANDOsche Abteilung der Zentralzone speziell als Tastsphäre bezeichnet. Ich möchte diese Bezeichnung insofern nicht als völlig erschöpfend hinstellen, als offenbar *nicht alle* Komponenten des Tastsinnes hier lokalisiert sind. — Schmerzen und tieferer Druck könnten nach den Experimenten von FERRIER, HORSLEY, SCHÄFER, BEEVOR durch die frontale Abteilung, insbesondere den Gyrus fornicatus, daselbst vermittelt werden. Der Ausdruck Körperfühlsphäre, welchen ich früher im Anschluß an MUNK für die gesamte Zentralzone gewählt habe, dürfte nur für einzelne Abschnitte sich eignen. Inwiefern sich die frontale und die ROLANDOsche Abteilung der Zentralzone wenigstens partiell funktionell vertreten können, muß durch weitere Untersuchungen festgestellt werden.

Was die *Struktur der Rinde* in der Zentralzone anlangt, so ist dieselbe nicht überall eine gleichmäßige. An spezifischen Elementen besitzt die Zone vor allem die *Riesenpyramiden* — die Tasten für die *willkürliche* Erregung der quergestreiften Muskulatur und nach RAMON Y CAJAL große Mengen dicker exogener *(sensibler) Fasern von spezifischer Verzweigungsweise,* wie sie angeblich sonst nirgends in der Rinde vorkommt. In bezug auf die Riesenpyramiden besteht eine ausgeprägte Ungleichmäßigkeit der Verteilung; dieselben fehlen im größten Teile der hinteren Zentralwindung (besonders an vielen Stellen, wo sich sensible Endverzweigungen in großer Menge finden), desgleichen im Gyrus fornicatus mit Ausnahme des oberen Randes von $8^b$ und im Felde 15. Im Felde $15^a$ finden sich als charakteristische Elemente vor allem die von W. VON BRANCA zuerst nachgewiesenen *Riesenspindeln* (besonders an der unteren Grenze der mittelgroßen Pyramiden). Vorhanden sind die Riesenpyramiden in der vorderen Zentralwindung, an ganz vereinzelten Stellen des vorderen Abhanges der hinteren, im Lobulus paracentralis, in den kleinen zur Zentralzone gehörigen Feldchen der 2. und 3. Stirnwindung, sowie im Fuße der 1. Stirnwindung (8).

Daß sich die von RAMON Y CAJAL aufgefundenen *spezifischen* Endplexus gleichmäßig über die ganze Zentralzone ausbreiten, halte ich *nicht* für sicher erwiesen. RAMON selbst hat sie zunächst nur in der vorderen Zentralwindung aufgefunden, hält aber ihr Vorkommen in der ganzen sensu-motorischen Zone (beider Zentral-

Digitized by Google

windungen) für höchstwahrscheinlich, was mit meinen entwickelungsgeschichtlichen Befunden einesteils insofern in Widerspruch steht, als ich im Bereiche der Riesenzellen vielfach nur sehr wenig kortikopetale Fasern nachweisen konnte, anderenteils insofern übereinstimmt, als ältere Föten etc. das Vorkommen zahlreicher kortikopetaler Leitungen in allen übrigen Regionen der Zentralzone deutlich erkennen lassen. Die hintere Zentralwindung zeigt unter normalen Verhältnissen, d. h. wenn sie nicht durch ungewöhnliche Lage des sulcus Rolandi und sulcus interparietalis sehr schmal ausfällt[1]), in einem Teile der Längenausdehnung 2 Zonen verschiedenen Baues, am vorderen Abhange und auf der Konvexität die sensiblen Plexus, *auf dem hinteren Abhange ausschließlich dem Assoziationssystem angehörige Elemente.* Die Rindenstruktur in der Zentralzone entbehrt so keineswegs charakteristischer Merkmale; nur bedarf es zur Feststellung der Grenzen, welche innerhalb derselben auftreten, subtilerer Untersuchungen, als dies in der Seh-, Riech- und Schmecksphäre der Fall ist. Vielleicht liegt hier ein nichtzufälliger Parallelismus zu den peripheren Endorganen vor. Die Endverzweigungen der sensiblen Nerven der Haut, der Muskeln, des Gemeingefühls etc. haben wenigstens zum größten Teile wenig Spezifisches, im Verhältnis zur Netzhaut, der Schneiderschen Membran etc. Man wird deshalb von vornherein scharf ausgeprägte Sonderzüge im Bau der kortikalen Zentren der sensiblen Haut-, Muskel- etc. Nerven überhaupt nicht erwarten dürfen. Die Abgrenzung dieser Zentren gelingt aber in durchaus befriedigender Weise durch Klarlegung ihrer Projektionssysteme, und hierzu ist die myelogenetische Methode ganz besonders, ja in bezug auf feinere Details ausschließlich geeignet.

d) Die Zone, welche ich nach der hauptbeteiligten Windung als *hippokampische* bezeichnen will, umfaßt zunächst den Uncus ($4^a$) in ganzer Ausdehnung sowie das Cornu Ammonis nebst subiculum (die Außenfläche des Gyrus hippocampi im distalen Abschnitte scheidet aus). Die zum Schläfenlappen gelangende Portion des Tractus olfactorius verbreitet sich (soweit sie frühzeitig markhaltig erscheint) nur über einen Teil des Uncus und zwar im

1) Ungewöhnliche Lagen der Furchen, seltner der Rolandoschen, häufiger des sulcus callosomarginalis bringen es mit sich, daß gelegentlich die hintere Zentralwindung reicher an Riesenzellen oder *ganz* frei davon gefunden wird, andererseits im vorderen Abschnitte des Praecuneus solche in größerer Menge sich zeigen, vergl. Fig. 7 und 8 Taf. IV.



Digitized by Google

stratum zonale. Es entwickelt sich bald darnach ein umfänglicher Faserzug (ich will ihn kurz System $\beta$[1]) des Uncus nennen), welcher von der Innenfläche der Uncusrinde zum Ammonshorn verläuft und teils in das Mark des Subiculum, teils in den Alveus eindringt; letztere Fasern enden im Ammonshorn und berühren sich hier mit den Endverzweigungen eines frühreifenden kortikopetalen (?) Bündels des Fornix inferior, welches von der Fimbria her in den Alveus eintritt und allem Anscheine nach aus der Lamina perforata anterior kommt.[2]) System $\beta$ ist insofern von hohem Interesse, als es (nächst (?) dem Fornix longus und dem primären Cingulum — s. o.) der erste Faserzug der hippokampischen Zone ist, welcher seinem Ursprung und Ende nach als Assoziationssystem aufzufassen ist. Erst mit Ummarkung des Systems $\beta$ und des sensiblen Fornix inferior treten im Ammonshorn bez. im Subiculum markhaltige Fasern auf; es gesellen sich alsbald die Faserzüge des Fornix longus hinzu und *ein aus dem hintersten Teile* der inneren Kapsel hervorgehendes *Stabkranzblatt*, welches zwar im wesentlichen im Felde 6 des Gyrus fornicatus endet, einzelne Bündel aber auch, wie es scheint, zum Ammonshorn schickt. Schon bei $9^1/_2$ monatlichen Früchten sind so nicht weniger als 4 verschiedene kortikopetale Leitungen im Ammonshorn markhaltig.[3]) Der Hauptteil des Fornix inferior (welcher in Anbetracht seines Ursprunges aus den großen Pyramidenzellen des Ammons-

1) Dieses System habe ich zuerst beschrieben in diesen Berichten (Math.-phys. Kl.) 1894, S. 164 ff. Das Rindenfeld, aus welchem es hervorgeht (zwischen $4^a$ und $4^b$), ist wohl identisch mit RAMON Y CAJALS Sphenooccipitalem Ganglion.

2) Von der Lamina perf. anter. (Thalamus) her legt sich später auch ein Bündel an die basale Sehstrahlung an, da wo letztere im Schläfenlappen mit nach vorn gerichteter Konvexität nach hinten umbiegt. Diese Fasern (unterer Sehhügelstiel?) gelangen vielleicht in den vorderen Teil des Subiculum cornu Ammonis.

3) Viel später, gegen den 3./4. Monat hin, gesellen sich dazu zwei weitere umfängliche Faserzüge, deren einer zum hinteren oberen Stabkranz des Sehhügels gehört, während der andere als sekundäres Cingulum (FLECHSIG) längs dem Gyrus fornicatus zum vorderen Sehhügelstiel verfolgt werden kann. Letzteres (nach rückwärts degenerierend) bildet den Hauptbestandteil des eigentlichen (kompakten) Cingulum und ist ein Projektionssystem des Thalamus, wie ich bereits 1897 (Neurolog. Zentralblatt Nr. 7) nachgewiesen habe. RAMON Y CAJAL (Riechrinde) ist (ohne meine Arbeit zu kennen) zu demselben Resultat gelangt.

Digitized by Google

horns mit Sicherheit als motorisch zu betrachten ist) erhält mehr als 3 Monate später Markscheiden.

Bei dem Ursprunge des Systems $\beta$ aus der Riechsphäre liegt die Deutung nahe, daß dasselbe der frühreifenden Gegend des Ammonshorns Geruchseindrücke zuführt. Da aber andererseits bei Unterbrechung der den Balkenwulst umgebenden Windungsabschnitte bez. Faserbündel wiederholt auf der gekreuzten Zungenhälfte Aufhebung des Geschmacks gefunden worden ist, so gelangen wohl von hinten her zur hippokampischen Zone auch Faserzüge, welche Geschmackseindrücke[1]) leiten; ich vermag vorläufig nicht zu entscheiden, welcher Teil der Gesamtzone diese Bahnen aufnimmt. Würde das Ammonshorn in Betracht kommen, so würde das System $\beta$ die Funktion haben können, Geruchseindrücke auf die Schmecksphäre zu übertragen. System $\beta$ könnte dann funktionell geradezu als ein projizierendes Assoziationssystem bezeichnet werden. Doch läßt sich auch daran denken, daß es Erregungen der Riechsphäre auf die Ursprünge des motorischen Fornix inferior überträgt.

Was das Rindenfeld 6 anlangt, so entwickelt es sich fast gleichzeitig mit dem Subiculum des Ammonshorns und bildet so anscheinend eine direkte Fortsetzung des letzteren. Es zeigt auch bei Erwachsenen in seinem überaus starken Stratum zonale die größte Ähnlichkeit mit dem Subiculum cornu Ammonis. Möglicherweise enden[2]) in Feld 6 auch Fasern des primären Cingulum und des Fornix longus; man sieht solche wenigstens nahe herantreten und verschwinden, wie auch Teile des Bündels $\beta$, welche über den Balkenwulst heraufziehen. Die *Hauptmasse* der in die Rinde von Nr. 6 eintretenden Fasern bilden aber die bereits oben erwähnten Stabkranzbündel aus der hinteren inneren Kapsel. Welche Funktion dieselben haben, muß ich vorläufig dahingestellt sein lassen. Der Verlauf der fraglichen Bündel speziell im hinteren Teile der inneren Kapsel legt die Frage nahe, ob man es nicht mit Leitungen der Hautsensibilität bez. des Gemeingefühls im Sinne Ferriers zu tun hat (oder Geschmack? s. o.). Doch kann man auf Grund klinischer Erfahrungen (s. u.) eine bestimmte Entscheidung nicht treffen. Was die Herkunft jener Stabkranzfasern

1) Vielleicht nur *eine* der Leitungen für Geschmackseindrücke (*einzelne* Qualitäten?)

2) Nach Ramon y Cajal entspringen sie hier.



Digitized by Google

anlangt, so gehen sie aus dem Thalamus opticus hervor und zwar das Primärsystem aus dem Grenzgebiete des Pulvinar gegen den ventro-lateralen Kern und schalenförmigen Körper (FLECHSIG) (ein 2. spätes System steht zum Pulvinar in Beziehung).

Der Pol des Schläfenlappens enthält auf der Innenfläche ein Feld, welches frühzeitig (Nr. 10) markhaltig wird. Die ersten markhaltigen Fasern kommen wenigstens zum Teil scheinbar aus der Rinde des Uncus (Assoziationssystem?), andere machen den Eindruck von Projektionssystemen, insofern sie aus der „Sehstrahlung" hervortreten. Das ganze Feld zeigt im Bau Ähnlichkeit mit der Basis der Insel, welche Zonalfasern aus dem äußeren Riechstreifen erhält, und dem Uncus. Der fragliche Rindenabschnitt, der nur wenig über den Schläfenpol sich nach außen erstreckt, macht so den Eindruck eines zur Riechsphäre in naher Beziehung stehenden Feldes. Doch ist Sicheres nicht anzugeben.

*Die hippokampische Zone zeigt überaus charakteristische Rindenstrukturen;* besonders dem Subiculum cornu Ammonis geben die insel- bez. knospenförmigen Zellhaufen[1]) im Stratum zonale ein schon makroskopisch sichtbares spezifisches Gepräge, welches gegen den äußeren Teil des Gyrus hippocampi scharf abgesetzt endet. Die Grenze beider Typen ist vielfach linienförmig — wie auch am ausgebildeten Organ das Stratum zonale eine überaus scharfe Abgrenzung dieser Zone gegen die andersartigen Felder der Umgebung ermöglicht. Beim reifen Neugeborenen sind letztere absolut marklos, im Gegensatz zu ersterer.

Das Feld 11 ist größtenteils in der *frontalen Querwindung*[2]) (FLECHSIG) gelegen und bei geschlossener Fossa Sylvii wenig sichtbar. Das Primärsystem desselben besteht aus Bündeln, welche aus der Gegend der Lamina perfor. ant.[3]) bezw. des Linsenkerns hervortreten. Ihren wirklichen Ursprung konnte ich nicht feststellen. Ihre späte Entwickelung spricht mehr gegen Beziehungen zum Riechapparat. Denn der letztere zeigt (den Fornix inf. aus-

1) Bezüglich aller Details verweise ich auf RAMON Y CAJALS Riechrinde.

2) Diese bisher kaum beachtete Windung zieht vom Außenrand des orbitalen Teils der 3. Stirnwindung zur vorderen Inselgrenze und liegt ganz in der Fossa Sylvia verborgen. Sie ist geradezu das Pendant zur temporalen Querwindung, welche die Insel von hinten begrenzt.

3) *Später* (3. Monat) lassen sich zahlreiche Fasern in senkrechtem Verlauf von dem *dorsalsten* vorderen Abschnitt der inneren Kapsel (Stabkranz?) zum Feld 11 und 11$^b$ (Fig. 5) verfolgen.

Digitized by Google

genommen) eine evidente Gesetzmäßigkeit in der Reihenfolge der Ummarkung seiner sekundären Bahnen; man beachte nur, daß das aus der Lamina perfor. anter. hervorgehende primäre Cingulum und der pedunculus septi pellucidi früher markhaltig werden, als das System $\beta$ des Uncus — entsprechend der Tatsache, daß die Olfactoriusbündel zur Lamina perf. ant. sich früher ummarken als die Olfactoriusbündel zu dem, einen Teil des Pallium darstellenden Uncus.

Sucht man hiernach die oben aufgeworfene Frage zu beantworten, ob unter den primären Sinnessphären reifer Früchte *alle* Rindenfelder enthalten sind, welche durch Projektionssysteme mit peripheren Sinnesorganen bez. Sinnesnerven in relativ direkter Verbindung stehen — bezw. ob eventuell nach der rechtzeitigen Geburt noch irgend eine Vergrößerung der primären Sinnessphären durch Ummarkung weiterer Sinnesleitungen eintritt — so ist letztere Frage (abgesehen von Feld 15a und 15) meines Erachtens *zu verneinen*. Die sich den primären Sinnessphären angliedernden Felder haben allenthalben eine so *abweichende* Struktur[1]), daß man dieselben *schon deshalb* nicht ohne zwingenden Grund als spätentwickelte Teile jener Sinnessphären betrachten darf. Selbst wenn gelegentlich ein aberriertes Bündelchen oder einzelne Fasern einer Sinnesleitung in die nächstanliegenden „Randzonen" verfolgt werden können, so folgt daraus noch nicht, daß diese Randzonen gesetzmäßige integrierende Bestandteile der primären Sinnessphären darstellen und daß sich *aus beiden* eine kompliziertere Form Sinnessphären aufbaut. Denn die in Randzonen gelangenden Fasern sensibler Leitungen sind nicht nur an Zahl verschwindend, sondern sie stellen auch nicht einmal gesetzmäßige[2])

1) Einschließlich der Verzweigungen kortikopetaler Fasern in der Rinde — vergl. Ramon y Cajal Bewegungsrinde Figg. 30 und 31.

2) Einzelne aberrierte Fasern von Sinnesleitungen sind funktionell offenbar mehr oder weniger bedeutungslos. So sah ich bei dem 54 cm langen Mädchen *eine* Faser der primären Sehstrahlung mitten in das Feld 36 zur 3. Temporalwindung gelangen und hier bis in die Rinde vordringen. Was soll diese eine Faser (die ich an keinem andern Gehirn nachweisen konnte) unter den Millionen andersartiger Fasern dieses hohen Zentrums für Wirkungen erzielen können? Auf derartige Vorkommnisse hin meine Einteilung der Hirnoberfläche als „widerlegt" anzusehen, heißt zweifellos das Unwesentliche gegenüber dem Wesentlichen in dem Vordergrund zu stellen.

Digitized by Google

Bestandteile der Randzonen dar; sie variieren[1]) offenbar an Zahl und fehlen gelegentlich auch gänzlich. Auch münden solche aberrierte Fasern häufig nach allerhand Irrfahrten doch noch in ihr reguläres Rindenfeld ein, z. B. Bündel der Taststrahlung, welche im Stabkranz unter die hintersten Abschnitte des Feldes Nr. 16[2]) gelangt sind, selbst tief hinein in das Mark der 1. Parietalwindung, kehren in fast spitzem Winkel um und gelangen nun doch noch in die hintere Zentralwindung. Es würde ganz falsch sein, aus dem Vorkommen einzelner Sinnesfasern selbst in allen Randzonen zu schließen, daß jede Sinnesstrahlung dergestalt zu einer umfänglicheren Rindenzone in Beziehung tritt, daß sie an den zentralen Teil derselben zahlreiche dichtgedrängte Bündel abgibt, an die Peripherie wenige zerstreute Einzelfasern, sodaß also in jeder derartigen Sinnessphäre ein an Sinnesleitungen reiches Zentrum (primäre Sinnessphäre) und ein an solchen armes peripheres Gebiet (Randzone) zu unterscheiden sein würde. Für das Vorhandensein dieses Typus lassen sich *überzeugende* Beweise *nicht* erbringen. Die Felder, in welche einzelne aberrierte Elemente der Sinnesleitungen eintreten, stimmen in allen übrigen, d. h. wesentlichen Punkten (a potiori) mit den Assoziationszentren überein.

Innerhalb der letztern finden sich im Verlauf der Markbildung häufig einzelne Fasern oder kleinste Bündelchen (zu 2—5 Fasern), welche man ihrer unregelmäßigen Anordnung nach auf den ersten Blick für atypisch halten könnte, die in Wirklichkeit aber in der *Zeit ihres Auftretens strengen Gesetzen* folgen. Sie haben die Bedeutung von Vorläufern größerer Faserzüge. Es deutet das Auftreten derselben in einem *neuen* Feld in der Regel darauf hin, daß letzteres direkt vor der Ummarkung weiterer größerer Fasermassen steht; selbst die gleichwertigen Elemente eines Rindenfeldes ummarken sich nicht *alle*, sondern nur zum Teil wirklich gleichzeitig, im übrigen nur rasch nacheinander innerhalb eines gewissen Zeitraumes. Mein myelogenetisches Grundgesetz wird hierdurch nicht erschüttert; der Begriff der *annähernd* (nicht der absolut) gleichzeitigen Entwickelung gleichwertiger Elemente liegt ihm zugrunde. In den elementaren Rindenfeldern, insbesondere 16—36 treten demgemäß einzelne markhaltige

1) Sie sind aber naturgemäß zahlreicher in den Randzonen als in den Zentralgebieten, weil erstere den Projektionsbündeln der Sinnessphären im allgemeinen näher liegen, sodaß aberrierte Fasern letzterer leichter in sie hineingelangen.

2) Vergl. Fig. 7 Taf. IV hinter 2.

Digitized by Google

Fasern in derselben Reihenfolge auf, in welcher die Differenzierung der Felder im ganzen und großen sich abspielt. Eine Ausnahme machen eben nur aberrierte bez. irreguläre Elemente des Projektionssystems in manchen Randzonen, aber auch nur in bezug auf den Ort ihres Auftretens, nicht in bezug auf die Zeit der Ummarkung, die für jede einzelne Faser *eine streng gesetzmäßige*[1]) ist.

(Fortsetzung — pathologische und experimentelle Methoden behandelnd — folgt.)

## Tafel-Erklärung.

Taf. I. Die Ausbreitung der markhaltigen Fasern in den Großhirnwindungen eines *rechtzeitig* geborenen Mädchens (52 cm Körperlänge). Nur an den punktierten Stellen finden sie sich in bezw. unter der Rinde. Die Ziffern bezeichnen die Reihenfolge der Ummarkung.

Fig. 1. Außen- } Fläche der Gehirnhemisphären.
„ 2. Innen- }

Fossa Sylvii durch Herabdrücken des Schläfenlappens geöffnet.

---

1) Diese Verhältnisse sind speziell von C. und O. Vogt verkannt und falsch dargestellt worden; bei oberflächlicher Untersuchung erwecken die Befunde einzelner markhaltiger Fasern in sonst marklosen Feldern leicht den Eindruck des Gesetz- und Regellosen. Bei sorgfältiger Durcharbeitung ganzer Schnittserien erkennt man die Gesetzmäßigkeit. Leichter ist dies natürlich an Fasersystemen einheitlicher Natur, welche eine kompakte Masse bilden und auf dem Querschnitt untersucht werden können, wie z. B. die Pyramiden des verlängerten Markes mit ihrer scharfen Kontur. Bei einem 42 cm langen Foetus fand ich auch nicht eine Faser der Pyramidenbahnen markhaltig, bei einem 43 cm langen zahlreiche, aber noch nicht die Hälfte, bei einem 45 cm langen sämtliche Fasern. Zwischen dem ersten Auftreten markhaltiger Fasern und der Ausbreitung der Ummarkung über den gesamten Querschnitt der Pyramide liegt also vielleicht ein Zeitraum von Wochen. Aber trotzdem darf man daraufhin nicht ohne weiteres sagen, daß gleichwertige Fasern beträchtliche Zeitunterschiede der Entwickelung erkennen lassen. Denn nach den Befunden im centrum semiovale gehören ja die ersten Bündel, wenigstens größtenteils dem oberen, die letzten dem mittleren Drittel der vorderen Zentralwindung an, also Regionen von verschiedener Spezialfunktion (Gehbewegungen, Greifbewegungen etc.). Dringt man so tiefer und tiefer in die Bedeutung der sukzessiven Ummarkung von Elementen desselben Faserzuges ein, so wird man sich mehr und mehr von der Allgemeingültigkeit meines myelogenetischen Grundgesetzes wenigstens nach den Hauptgrundzügen überzeugen.

Digitized by Google

Fig. 7. Querwindung des Schläfenlappens (Hörsphäre).
„ 11. Gyrus frontalis transversus } (Flechsig).
„ 12. Gyrus subangularis }

Taf. II. Von einem 54 cm langen totgeborenen Mädchen. Ein Teil (6) der Randzonen markhaltig. Statt $2^a$ 2 $2^b$ l. 2 $2^b$ $2^c$.
Fig. 13. Gyrus supraangularis (Flechsig).

Taf. III. Die primären Sinnessphären und die 2. Gruppe der *Primordialgebiete* (9—13) durch Punktierung hervorgehoben. Außerhalb dieser Gebiete ist ein Stabkranz *nicht* mit Sicherheit nachgewiesen; eventuell kommen noch der Rest der 1. Schläfenwindung (14, $14^b$ Fig. 3) und des Gyrus hippocampi in Betracht. Die übrigen Windungen Assoziationszentren (Randzonen *und* Zentralgebiete).

Taf. IV. Sagittalschnitte durch zwei menschliche Gehirne an der Grenze der 1. und 2. Stirnwindung, Weigert-Pal-Präparate.
Fig. 7. Dolichokephales Gehirn des 52 cm langen Mädchens.
„ 8. Gehirn eines Knaben, welcher ca. ½ Monat zu früh geboren war und 3 Wochen gelebt hat, insgesamt also etwa das Alter eines reifen Kindes erreicht hat — brachykephaler Typus.
*R.* Rolandosche Furche.
*a.* vordere } Zentralwindung.
*b.* hintere }
*pu* Putamen des Linsenkerns.
2. Schrägschnitt der „Taststrahlung i. w. S.", bis unter den Gyrus angularis reichend.
4. Mandelkern.
$4^b$. (Darüber) System $\beta$ des Uncus — subiculum cornu Ammonis.
5. Schrägschnitt der primären Sehstrahlung — in Fig. 8 zusammengedrückt. Die nähere Erklärung im Text (2. Abt.).

In Nr. 8 gelangen bei *sehr gut entwickelter* „Taststrahlung" nur *ganz vereinzelte* Fasern derselben in die freiliegende Konvexität der hinteren Zentralwindung; in Nr. 7 geht der *größte Teil* der Taststrahlung zur freien Konvexität der hinteren Zentralwindung. Der Hauptgrund dieser individuellen Differenz ist gegeben in der verschiedenen Lage der Rolandoschen Furche.

---

Druckfertig erklärt 30. III. 1904.]

Digitized by Google

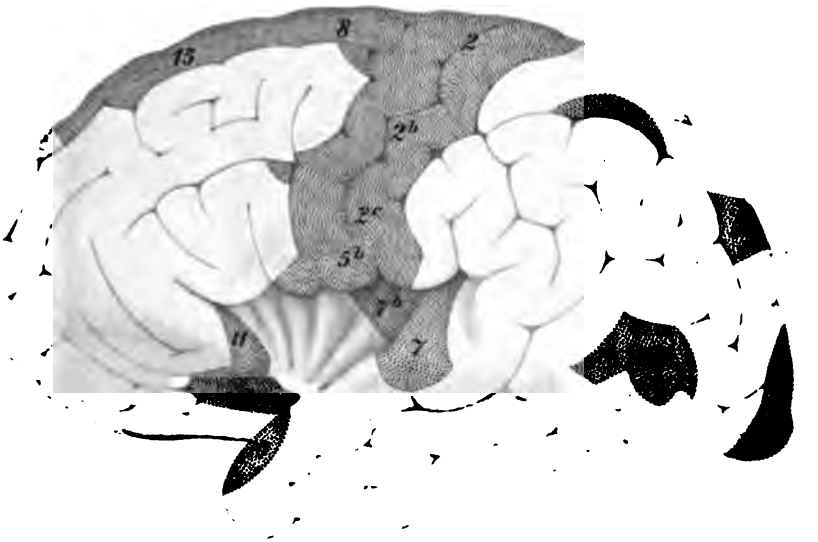



Fig. 5.

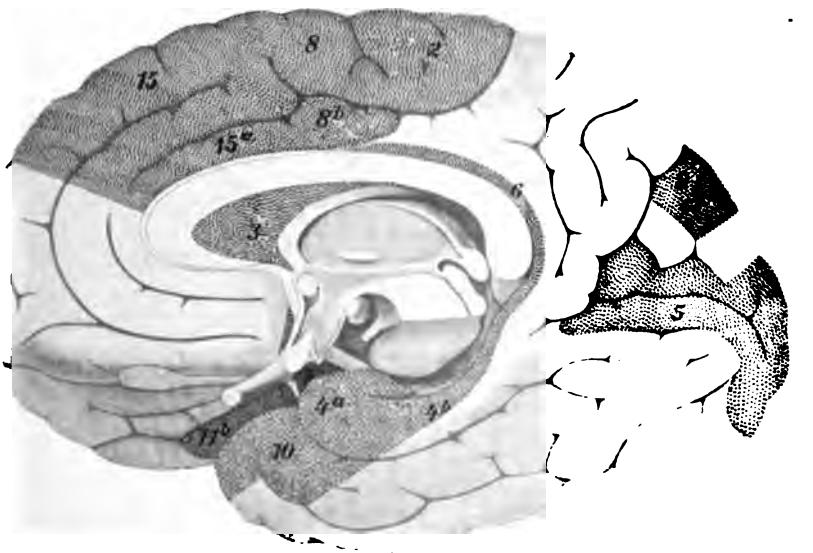



Fig. 6.



Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNG VOM 1. FEBRUAR 1904.

# Ein Beitrag zur Geometrie der Berührungstransformationen in der Ebene.

Von

G. Scheffers.

Seit langer Zeit hat man eine Reihe von geometrischen Operationen, die im Grunde genommen Berührungstransformationen sind, erfolgreich zur Auffindung neuer geometrischer Sätze und insbesondere zur Aufdeckung des inneren Zusammenhanges zwischen verschiedenartigen geometrischen Betrachtungen benutzt. Ich brauche nur, indem ich mich auf die Ebene beschränke, an die Transformation durch reziproke Polaren zu erinnern.[1]) Seitdem Lie den allgemeinen Begriff der Berührungstransformation aufgestellt hat, sind jedoch in der *ebenen* Geometrie kaum andere Berührungstransformationen zur Ableitung neuer geometrischer Wahrheiten benutzt worden als eben nur solche, die schon lange vor Lie bekannt waren. Und dennoch ist die Benutzung solcher Berührungstransformationen der Ebene, die verhältnismäßig einfach definierbar sind, eine leicht erreichbare und leicht auszunutzende Quelle für neue geometrische Sätze, oder aber sie können zur Aufdeckung der inneren Gründe für das Vorhandensein gewisser Sätze dienen, die an sich etwas Überraschendes darbieten. Dies letztere soll hier an einem Beispiele gezeigt werden.

Im Jahre 1898 hatte ich die Ehre, der Gesellschaft der Wissenschaften einen Satz mitzuteilen, der sich auf die isogonalen Trajektorien einer ebenen Kurvenschar bezog.[2]) Ist nämlich eine

1) Vgl. die Ausführungen in der „Geometrie der Berührungstransformationen I", Leipzig 1896, Kap. 1.

2) „Über gewisse zweifach unendliche Kurvenscharen in der Ebene", diese Berichte, 1898, S. 261—294. Die isogonalen Trajektorien nannte ich damals kürzer Loxodromen, indem ich einen Begriff von der Kugel übertrug. Da jedoch dadurch Mißverständnisse hervorgehen können, benutze ich hier die umständlichere, aber deutlichere Bezeichnung.

Digitized by Google

einfach unendliche ebene Kurvenschar gegeben, so kann man jede solche Kurve betrachten, die alle Kurven der Schar unter einem konstanten Winkel durchsetzt. Gibt man diesem Winkel and... und andere Größen, so erhält man insgesamt $\infty^2$ ich eine *Schar von isogonalen Trajektorien* nennen wil gilt hier der Satz, daß alle diejenigen $\infty^1$ isogonalen T die einen Punkt $P$ gemein haben, in $P$ solche Krümmungskreise haben, die noch durch einen zweiten gemeinsamen Punkt $Q$ gehen. Dies ist allerdings noch nicht der Satz, den ich vorhin meinte. Ich benutze aber die Gelegenheit, hervorzuheben, daß dieser erste Satz schon früher von Herrn Cesàro aufgestellt worden war, was ich damals nicht wußte.[1]) Der zweite Satz nun, zu dem ich gelangte, ist meines Erachtens etwas überraschend: Es zeigte sich nämlich[2]), *daß zu jeder Schar von $\infty^2$ isogonalen Trajektorien in der Ebene eine zweite Schar von $\infty^2$ isogonalen Trajektorien gehört und zwar so, daß diejenigen $\infty^1$ Kurven der ersten Schar, die durch einen beliebigen Punkt P gehen, dort Krümmungskreise haben, die sich* — nach dem ersten Satze — *in einem zweiten Punkte Q treffen und die in Q zugleich die Krümmungskreise derjenigen $\infty^1$ Kurven der zweiten Schar sind, die durch Q hindurchgehen.* Die Beziehung zwischen beiden Scharen ist durchaus umkehrbar. Die Sache liegt aber nicht etwa so einfach, als ob die Kurven der ersten Schar in die der zweiten übergingen vermöge derjenigen Punkttransformation, die jeden Punkt $P$ in den zugehörigen Punkt $Q$ überführt.

Zu dem soeben genannten Satze gelangte ich damals auf rein analytischem Wege, ja eigentlich durch einen bloßen Zufall. Infolgedessen läßt mein damaliger Beweis des Satzes, obgleich er vollkommen exakt war, eines vermissen: Er klärt nicht über die inneren Gründe für das Bestehen dieses Satzes auf.

Es ist mir nun gelungen, die Sache viel durchsichtiger zu gestalten, und zwar durch Benutzung einiger recht einfacher Berührungstransformationen der Ebene. Dabei brauche ich aus

---

1) Herr Kowalewski war so freundlich, mich auf die Stelle in Cesaros „Lezioni di geometria intrinseca", Neapel 1896, aufmerksam zu machen. Sie findet sich in der deutschen Ausgabe „Vorlesungen über natürliche Geometrie", Leipzig 1901, auf S. 148. Vgl. auch „Encyklopädie der mathem. Wissenschaften", III D 4, S. 219.

2) In meiner angeführten Arbeit von 1898, S. 283.

Digitized by Google

der Theorie solcher Transformationen nur den Begriff einer *endlichen* Berührungstransformation und den Satz, daß jede Berührungstransformation der Ebene völlig definiert ist, sobald man weiß, in welche Kurve ein jeder Punkt bei ihr übergeht. Ich könnte diese Betrachtungen, im Gegensatz zu denen vom Jahre 1898, rein synthetisch darstellen. Wenn ich aber trotzdem einige Formeln benutze, so geschieht es mit Rücksicht auf die Lesbarkeit der folgenden Seiten; denn rein synthetische Überlegungen sind, so interessant sie ihrem Urheber auch erscheinen mögen, meist nur schwerfällig durch die Sprache wiederzugeben, während die Formel, am richtigen Platze gebraucht, den Leser schnell über die Sachlage orientiert und ihn weniger ungeduldig macht.

## § 1.

Jedem Punkte $P$ oder $(x, y)$ der Ebene sei eine Gerade $g_0$ zugeordnet, *die durch ihn geht.* Zu diesem Zwecke genügt es, *den Winkel $\omega$, den $g_0$ mit der $x$-Achse bildet, als Funktion der Koordinaten $x$, $y$ von $P$ zu geben*, so daß in den laufenden Koordinaten $\xi$, $\eta$ die Gleichung

$$\eta - y - (\xi - x)\,\mathrm{tg}\,\omega = 0$$

diejenige Gerade $g_0$ darstellt, die dem Punkte $P$ oder $(x, y)$ zugeordnet ist. Es gibt nun bekanntlich eine bestimmte *Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$, die jeden Punkt $P$ in die zugeordnete Gerade $g_0$ überführt.* Beschreibt $P$ eine Kurve, so umhüllen die zugeordneten Geraden $g_0$ eine zweite Kurve, und zwar ist dies diejenige Kurve, in die die erste Kurve vermöge $\mathfrak{A}_0$ verwandelt wird. Jedes Linienelement $(x, y, y')$ geht bei $\mathfrak{A}_0$ in ein neues Linienelement $(\xi, \eta, \eta')$ über. Will man $\xi$, $\eta$, $\eta'$ als Funktionen von $x$, $y$, $y'$ darstellen, so hat man die vorliegende Gleichung einmal nach $x$, dann nach $\xi$ zu differenzieren, indem man einmal $y$ als Funktion von $x$, dann $\eta$ als Funktion von $\xi$ auffaßt, wodurch sich die beiden Gleichungen ergeben:

$$-y' + \mathrm{tg}\,\omega - (\xi - x)\frac{\omega_x + \omega_y y'}{\cos^2\omega} = 0,$$

$$\eta' - \mathrm{tg}\,\omega = 0.$$

Die Auflösung aller drei Gleichungen nach $\xi$, $\eta$, $\eta'$ liefert die gewünschte Darstellung:

Digitized by Google

$$(1)\qquad \begin{cases} \mathfrak{x} = x + \dfrac{\operatorname{tg}\omega - y'}{\omega_x + \omega_y y'} \cos^2\omega, \\ \mathfrak{y} = y + \dfrac{\operatorname{tg}\omega - y'}{\omega_x + \omega_y y'} \sin\omega\cos\omega, \\ \mathfrak{y}' = \operatorname{tg}\omega. \end{cases}$$

Um diejenigen *einfacheren* geometrischen Eigenschaften der Transformation $\mathfrak{A}_0$ zu untersuchen, die von der besonderen Wahl der Funktion $\omega(x, y)$ unabhängig sind, wird man sich auf solche Linienelemente $(x, y, y')$ beschränken, die ein und demselben Punkte $P$ oder $(x, y)$ zugehören. Sie gehen nach der Definition von $\mathfrak{A}_0$ in die Linienelemente $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ der zu $P$ zugeordneten Geraden $g_0$ über. Während ihre Strahlen $(y')$ in $P$ ein Büschel bilden, bilden die Punkte $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ der transformierten Elemente längs $g_0$ eine Punktreihe.

Außer der Berührungstransformation $\mathfrak{A}_0$ betrachten wir nun eine zweite, $\mathfrak{A}_\alpha$, die wir so definieren: Zunächst drehen wir alle Geraden $g_0$ der Ebene um die Punkte $P$, denen sie zugeordnet sind, um einen und denselben *konstanten* Winkel $\alpha$, natürlich in ein und demselben Drehsinne gemessen. Jede Gerade $g_0$ geht dabei in eine Gerade $g_\alpha$ über. $\mathfrak{A}_\alpha$ sei jetzt diejenige Berührungstransformation, die jeden Punkt $P$ in die zugehörige Gerade $g_\alpha$ verwandelt. $\mathfrak{A}_\alpha$ unterscheidet sich also von $\mathfrak{A}_0$ nur dadurch, daß jede Gerade $g_0$ durch die gedrehte Gerade $g_\alpha$ ersetzt wird, analytisch ausgedrückt dadurch, daß in (1) einfach $\omega$ durch $\omega + \alpha$ zu ersetzen ist, wodurch sich übrigens die Nenner in $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{y}$ nicht ändern.

Da wir dem Winkel $\alpha$ unendlich viele Werte geben können, so betrachten wir $\infty^1$ Berührungstransformationen $\mathfrak{A}_\alpha$. Bei jeder einzelnen, $\mathfrak{A}_\alpha$, geht das Linienelement $(P, g_0)$ in ein neues über. Suchen wir dies, so haben wir in (1) die Funktion $\omega$ durch $\omega + \alpha$ zu ersetzen und dann $y' = \operatorname{tg}\omega$ einzuführen. Es kommt:

$$\mathfrak{x} = x + \frac{\operatorname{tg}(\omega+\alpha) - \operatorname{tg}\omega}{\omega_x + \omega_y \operatorname{tg}\omega} \cos^2(\omega+\alpha),$$

$$\mathfrak{y} = y + \frac{\operatorname{tg}(\omega+\alpha) - \operatorname{tg}\omega}{\omega_x + \omega_y \operatorname{tg}\omega} \cos(\omega+\alpha)\sin(\omega+\alpha),$$

$$\mathfrak{y}' = \operatorname{tg}(\omega+\alpha).$$

Aus den beiden ersten Gleichungen folgt die *von $\alpha$ freie* Gleichung:

$$(2)\quad [(\mathfrak{x}-x)^2 + (\mathfrak{y}-y)^2][\omega_x + \omega_y \operatorname{tg}\omega] + (\mathfrak{x}-x)\operatorname{tg}\omega - (\mathfrak{y}-y) = 0$$

Digitized by Google

Sie lehrt: *Das Linienelement* $(P, g_0)$ *geht bei den* $\infty^1$ *Berührungstransformationen* $\mathfrak{A}_\alpha$ *in solche* $\infty^1$ *Linienelemente* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{y}')$ *über, deren Punkte* $(\mathfrak{x}, \mathfrak{y})$ *auf einem Kreise liegen, der in P die Gerade* $g_0$ *berührt.* (Siehe Fig. 1.)

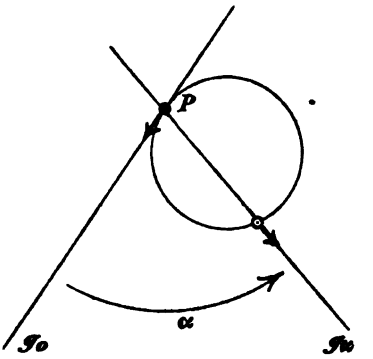


Fig. 1.

Da die Transformation $\mathfrak{A}_0$ von derselben Art ist wie die Transformation $\mathfrak{A}_\alpha$, so folgt, daß auch jedes Element $(P, g_\beta)$ — wo $\beta$ einen bestimmten Wert habe — bei allen $\infty^1$ Transformationen $\mathfrak{A}_\alpha$ in solche $\infty^1$ Elemente übergeht, deren Punkte auf einem Kreise liegen, der in $P$ die Gerade $g_\beta$ berührt.

Die Gesamtheit der $\infty^1$ Kreise, die alle durch $P$ gehen, dort aber verschiedene Tangenten $g_\beta$ haben, geht hervor, wenn wir in (2) die Funktion $\omega$ durch $\omega + \beta$ ersetzen und $\beta$ als Parameter auffassen. Die so sich ergebende Gleichung:

$$[(\mathfrak{x} - x)^2 + (\mathfrak{y} - y)^2]\,[\omega_x(1 - \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\beta) + \omega_y(\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\beta)]$$
$$+ (\mathfrak{x} - x)(\operatorname{tg}\omega + \operatorname{tg}\beta) - (\mathfrak{y} - y)(1 - \operatorname{tg}\omega \operatorname{tg}\beta) = 0$$

ist *linear* in $\operatorname{tg}\beta$. *Jene* $\infty^1$ *Kreise bilden somit ein Büschel und haben daher außer P noch einen Punkt M gemein,* dessen Koordinaten sich sofort angeben lassen, obgleich wir sie im folgenden nicht gebrauchen. Sie sind:

$$x - \frac{\omega_y}{\omega_x^2 + \omega_y^2},$$

$$y + \frac{\omega_x}{\omega_x^2 + \omega_y^2}.$$

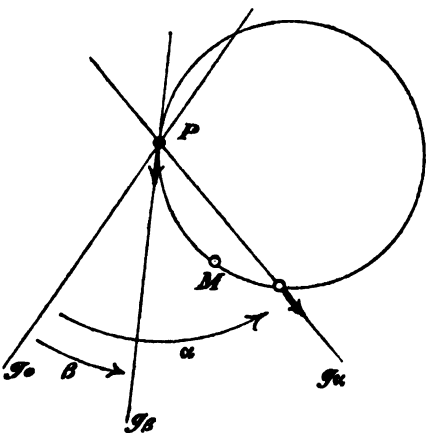


Fig. 2.

*Jedem Punkte P der Ebene ist hiernach ein Punkt M zugeordnet.* Kennt man den zugeordneten Punkt, so kann man ohne weiteres angeben, in welches Linienelement ein beliebig

Digitized by Google

gewähltes Linienelement $(P, g_\beta)$ von $P$ vermöge einer beliebigen Transformation $\mathfrak{A}_\alpha$ übergeht. Wir legen nämlich (siehe Fig. 2) durch $P$ die Geraden $g_\beta$ und $g_\alpha$, die mit der zu $P$ zugeordneten Geraden $g_0$ die Winkel $\beta$ und $\alpha$ bilden, und konstruieren denjenigen Kreis durch $P$ und durch den zu $P$ zugeordneten Punkt $M$, der $g_\beta$ in $P$ berührt. Er schneidet $g_\alpha$ im Punkte des gesuchten Elementes, dessen Gerade natürlich $g_\alpha$ selbst ist.

Wir haben hiermit eine Übersicht gewonnen über die Lage derjenigen Linienelemente, in die die Linienelemente eines Punktes $P$ bei allen $\infty^1$ betrachteten Berührungstransformationen $\mathfrak{A}_\alpha$ übergehen.

Dies einfache Ergebnis genügt nun, ohne jede weitere Rechnung den erwähnten Satz über isogonale Trajektorien abzuleiten, wozu wir jetzt übergehen.

## § 2.

Wir betrachten die Differentialgleichung 1. O. in $x$, $y$:

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{tg}(\omega + \beta),$$

in der $\beta$ einen bestimmten Wert habe, während $\omega$ die frühere Funktion von $x$, $y$ bedeutet. Die Gleichung hat $\infty^1$ Integralkurven $c_\beta$. Im Punkte $P$ oder $(x, y)$ ist die Tangente der hindurchgehenden Kurve $c_\beta$ die Gerade $g_\beta$. Sie bildet also mit $g_0$ den konstanten Winkel $\beta$. Zu jedem Werte von $\beta$ gehören $\infty^1$ Kurven $c_\beta$. Insgesamt ergeben sich also $\infty^2$ Kurven.

Zu ihnen gehören die Kurven $c_0$, deren Tangenten die Geraden $g_0$ sind. Jede Kurve $c_\beta$ durchsetzt alle Kurven $c_0$ unter dem konstanten Winkel $\beta$. Alle $\infty^2$ Kurven $c_\beta$ bilden also das, was wir in der Einleitung eine *Schar von $\infty^2$ isogonalen Trajektorien* genannt haben.

Die Normalen der Kurven $c_\beta$ sind die Geraden $g_{\beta+\frac{\pi}{2}}$, die den Punkten $P$ zugeordnet sind und aus den Geraden $g_0$ durch Drehung um $\beta + \frac{\pi}{2}$ hervorgehen. Die Berührungstransformation $\mathfrak{A}_{\beta+\frac{\pi}{2}}$ verwandelt jeden Punkt $P$ in die zugehörige Gerade $g_{\beta+\frac{\pi}{2}}$, d. h.: $\mathfrak{A}_{\beta+\frac{\pi}{2}}$ *führt jede Kurve $c_\beta$ in ihre Evolute über.*

Digitized by Google

Die Geraden $g_\alpha$, die zu einem konstanten Winkel $\alpha$ gehören, bilden mit jenen Normalen $g_{\beta+\frac{\pi}{2}}$ der Kurven $c_\beta$ den konstanten Winkel $\beta - \alpha + \frac{\pi}{2}$. Sie sind also *Quasi-Normalen* von $c_\beta$ zu nennen, d. h. solche Normalen, die mit den wahren Normalen einen konstanten Winkel bilden. Die Quasi-Normalen längs einer Kurve umhüllen ihre *Quasi-Evolute*. Da nun die Transformation $\mathfrak{A}_\alpha$ jeden Punkt $P$ in die zugehörige Gerade $g_\alpha$ verwandelt, so folgt:

*Die $\infty^1$ Kurven $c_\beta$, die zu einem bestimmten $\beta$ gehören, gehen bei der Transformation $\mathfrak{A}_\alpha$ in ihre Quasi-Evoluten mit dem Winkel $\beta - \alpha + \frac{\pi}{2}$ über.*

Jede Kurve hat eine eigentliche Evolute und $\infty^1$ Quasi-Evoluten. Alle $\infty^2$ isogonalen Trajektorien haben also $\infty^2$ Quasi-Evoluten. Wir können also sagen:

*Alle $\infty^2$ isogonalen Trajektorien gehen bei allen $\infty^1$ Berührungstransformationen $\mathfrak{A}_\alpha$ in ihre $\infty^2$ Quasi-Evoluten über.*

Um den *Krümmungsmittelpunkt* $K_\beta$ zu bestimmen, der zu einem Punkte $P$ einer Kurve $c_\beta$ gehört, brauchen wir nur den Punkt desjenigen Linienelementes zu suchen, worin das Linienelement $(P, g_\beta)$ von $c_\beta$ in $P$ bei $\mathfrak{A}_{\beta+\frac{\pi}{2}}$ übergeht. Nach Fig. 2 ergibt sich also dieser Punkt wieder so (siehe Fig. 3):

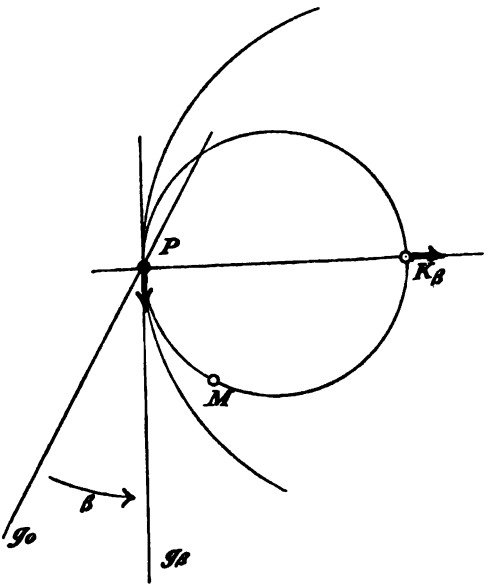


Fig. 3.

Wir legen denjenigen Kreis durch $P$ und durch den zu $P$ zugeordneten Punkt $M$, der $g_\beta$ in $P$ berührt. Die Normale $g_{\beta+\frac{\pi}{2}}$ von $c_\beta$ in $P$ trifft den Kreis im Krümmungsmittelpunkte $K_\beta$ von $c_\beta$.

Digitized by Google

Halten wir den Punkt $P$ fest und lassen wir $\beta$ variieren, d. h. betrachten wir die $\infty^1$ durch $P$ gehenden isogonalen Trajektorien, so ist in Fig. 3 nur der Winkel $\beta$ zu ändern. Da $\sphericalangle PMK_\beta$ ein Rechter ist, so ist der Ort von $K_\beta$ bei variierendem $\beta$ diejenige Gerade $m$ durch $M$, die auf $PM$ senkrecht steht. So ergibt sich denn der CESÀROsche Satz von neuem: *Alle diejenigen isogonalen Trajektorien, die durch einen gemeinsamen Punkt P gehen, haben in P solche Krümmungskreise, deren Mitten auf einer Geraden m liegen, d. h. die ein Büschel bilden.*

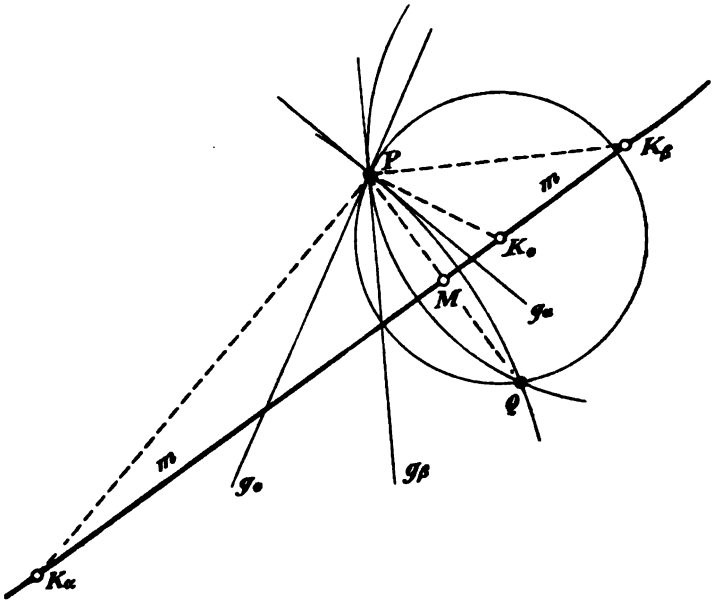



Fig 4.

Der zweite Scheitel des Büschels ist der Spiegelpunkt $Q$ von $P$ hinsichtlich $M$ oder also derjenige Punkt $Q$, der so liegt, daß $M$ die Mitte von $PQ$ ist. (Siehe Fig. 4.)

Wie jedem Punkte $P$ gesetzmäßig ein Punkt $M$ zugeordnet ist, so gehört ihm daher auch ein bestimmter Punkt $Q$ zu und ebenfalls eine bestimmte Gerade $m$, die das Mittellot von $PQ$ ist.

Um schließlich zu unserem Ziele zu gelangen, verfahren wir so: Wir spiegeln jeden Punkt $P$ an der zugehörigen Geraden $m$ in den zugehörigen Punkt $Q$ und ebenso jede Gerade $g_\alpha$ durch

Digitized by Google

$P$ in eine neue Gerade $h_\alpha$ durch $Q$. Wie $g_\alpha$ mit $g_0$ den Winkel $\alpha$ bildet, so bildet auch $h_\alpha$ mit $h_0$ den Winkel $\alpha$, nur im anderen Drehsinne gemessen. (Siehe Fig. 5.) Genau so, wie wir oben als $\mathfrak{A}_\alpha$ diejenige Berührungstransformation definierten, die jeden Punkt $P$ in die zugeordnete Gerade $g_\alpha$ verwandelt, so können wir jetzt *eine neue Schar von* $\infty^1$ *Berührungstransformationen* $\mathfrak{B}_\alpha$ definieren: Die Transformation $\mathfrak{B}_\alpha$ soll jeden Punkt $Q$ in die zugehörige Gerade $h_\alpha$ überführen. Dieselben Beziehungen, die zwischen den Transformationen $\mathfrak{A}_\alpha$ bestehen und die in § 1 auseinandergesetzt wurden, bestehen auch zwischen den Transformationen $\mathfrak{B}_\alpha$. Zum vollen Verstehen des Überganges zu den $\mathfrak{B}_\alpha$ ist es vielleicht gut, darauf aufmerksam zu machen, daß die ausgeführte Spiegelung an $m$ für jeden Punkt $P$ der Ebene eine andere sein wird, da die Gerade $m$ sich mit $P$ ändert. Der Übergang von den $\mathfrak{A}_\alpha$ zu den $\mathfrak{B}_\alpha$ ist also nur insoweit als eine Spiegelung der Ebene aufzufassen, als man sich auf die Betrachtung der Linienelemente eines einzelnen Punktes $P$ und des zugehörigen Punktes $Q$ beschränkt.

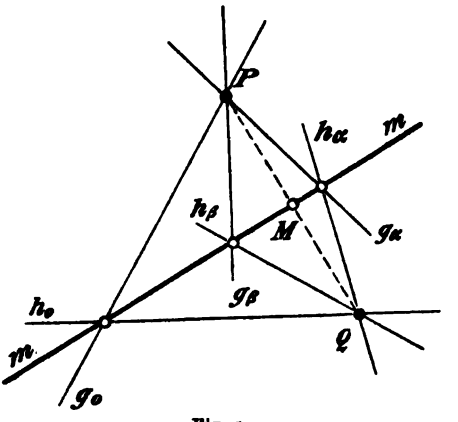


Fig. 5.

Wie es zur Schar der Geraden $g_0, g_\alpha, g_\beta, \ldots$ eine Schar von $\infty^2$ isogonalen Trajektorien gibt, so auch zur Schar der Geraden $h_0, h_\alpha, h_\beta$. Sie mögen $k_0, k_\alpha, k_\beta, \ldots$ (statt $c_0, c_\alpha, c_\beta, \ldots$) heißen. Die Fig. 5 lehrt: Diejenigen $\infty^1$ Kurven $k$, die durch $Q$ gehen, haben dort dieselben Krümmungskreise wie diejenigen $\infty^1$ Kurven $c$, die durch $P$ gehen, und darin liegt der zu beweisende Satz:

*Zu jeder Schar von* $\infty^2$ *isogonalen Trajektorien in der Ebene gibt es eine zweite Schar von* $\infty^2$ *isogonalen Trajektorien derart, daß diejenigen* $\infty^1$ *Kurven der ersten Schar, die durch einen beliebigen Punkt P gehen, dort solche* $\infty^1$ *Krümmungskreise haben, die sämtlich noch durch einen zweiten Punkt Q gehen und in Q zugleich die Krümmungskreise aller durch Q gehenden* $\infty^1$ *Kurven der zweiten Schar sind.*



Digitized by Google

Es mag ausdrücklich noch einmal hervorgehoben werden, daß diejenige Punkttransformation der Ebene, die jeden Punkt $P$ in den zugehörigen Punkt $Q$ verwandelt, durchaus nicht, wie man vielleicht meinen könnte, die erste Schar von $\infty^2$ Kurven in die zweite Schar überführt.

## § 3.

Einige nachträgliche Bemerkungen mögen hier ihren Platz finden.

Von vornherein haben wir stillschweigend eine Voraussetzung gemacht, die bei gewissen isogonalen Trajektorien nicht erfüllt ist. Eine Berührungstransformation nämlich, die jeden Punkt der Ebene in eine Gerade überführt, ist nur dann nicht ausgeartet, wenn diese Geraden eine wirklich *doppelt* unendliche Schar bilden.

Wir haben demnach den Fall besonders zu behandeln, in dem je $\infty^1$ Punkten $P$ dieselbe Gerade $g_0$ zugeordnet ist. Alsdann liegen nur $\infty^1$ Geraden $g_0$ vor. Aber wenn wir sie um ihre Punkte $P$ um einen Winkel $\alpha$ drehen, so ergeben sich doch wieder $\infty^2$ Geraden $g_\alpha$, da aus jeder einzelnen Geraden $g_0$ $\infty^1$ einander parallele Geraden $g_\alpha$ hervorgehen, weil $g_0$ *allen* ihren Punkten $P$ zugeordnet ist. Unsere Betrachtung ist also einfach dadurch als richtig aufrecht zu erhalten, daß man die Geraden $g_0$ durch die Geraden $g_\alpha$ ersetzt, die zu einem bestimmten Winkel $\alpha$ gehören. Es handelt sich hier um die isogonalen Trajektorien von $\infty^1$ Parallelkurven. Da es hier nur $\infty^1$ Geraden $g_0$ gibt, so sind auch nur $\infty^1$ Geraden $h_0$ vorhanden, d. h. die zweite Schar besteht ebenfalls aus den isogonalen Trajektorien von $\infty^1$ Parallelkurven. Außerdem gehören im vorliegenden Falle die $\infty^1$ Geraden $g_0$ selbst zur ersten Schar von Trajektorien. Ist also $C$ die Kurve, die von den $\infty^1$ Geraden $g_0$ umhüllt wird, so ist der zu einem beliebigen Punkte $P$ zugeordnete Punkt $M$ der Punkt, in dem die durch $P$ gehende Tangente $g_0$ von $C$ die Kurve $C$ berührt. $Q$ ist der Spiegelpunkt von $P$ hinsichtlich $M$. Die Gerade $m$ ist die Normale von $C$ in $M$ (siehe Fig. 6), d. h. die Geraden $g_0$ bilden dieselbe Schar wie die Geraden $h_0$. Beide Scharen von isogonalen Trajektorien $c_\alpha$ und $k_\alpha$ fallen daher in eine Schar zusammen, nämlich in die *Schar der isogonalen Trajektorien der Tangenten einer Kurve C.* (Die Kurve kann sich übrigens auf einen Punkt reduzieren. Dies führt zu logarithmischen Spiralen.)

Digitized by Google

Jedoch eine Möglichkeit haben wir soeben außer acht gelassen, nämlich die, bei der die $\infty^1$ Geraden $g_0$, indem man sie um alle ihre Punkte um denselben Winkel dreht, doch wieder nur $\infty^1$, nicht $\infty^2$, Geraden liefern. Sie tritt nur dann ein, wenn alle $\infty^1$ Geraden $g_0$ einander parallel sind. Alsdann sind *alle* Berührungstransformationen $\mathfrak{A}_a$ ausgeartet. Die isogonalen Trajektorien sind in diesem Falle sämtliche Geraden der Ebene, und dies ist *trivial*.

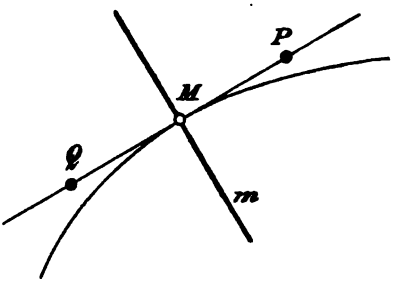


Fig. 6.

In der angeführten früheren Arbeit sind eine Reihe von interessanten Beispielen zu unserem Satze angegeben, wobei insbesondere auch die *Sinusspiralen* auftraten, wenn auch diese Bezeichnung dort nicht ausdrücklich gebraucht worden ist. Wir wollen hier auf die vielen Anwendungen, die man von dem Satze machen kann, nicht eingehen. Doch ist es dem Leser vielleicht angenehm, sich den Satz an einem Beispiele erläutern zu können, das jener Arbeit entnommen sei:

Wir gehen aus von der Schar aller $\infty^1$ *gleichseitigen Hyperbeln* mit demselben Mittelpunkte $O$ und denselben Achsenrichtungen. Jedem Punkte $P$ sei als Gerade $g_0$ die Tangente der durch $P$ gehenden Hyperbel zugeordnet. Alsdann besteht die erste Schar aller isogonalen Trajektorien aus *allen* $\infty^2$ *gleichseitigen Hyperbeln*, die $O$ zur Mitte haben, während die zweite Schar von isogonalen Trajektorien aus *allen* $\infty^2$ *Lemniskaten* besteht, die $O$ zur Mitte haben. Der einem Punkte $P$ zugeordnete Punkt $Q$ ergibt sich hier, wenn $OP$ über $P$ hinaus bis zu einem Punkte $Q$ soweit verlängert wird, daß $OQ = 3\,OP$ ist. Legt man also durch einen beliebigen Punkt $P$ alle gleichseitigen Hyperbeln, die $O$ zur Mitte haben, so treffen sich die zu $P$ gehörigen Krümmungskreise noch in einem zweiten Punkte $Q$, der wie angegeben konstruiert wird. Diese $\infty^1$ Krümmungskreise sind zugleich die Krümmungskreise aller durch $Q$ gehenden Lemniskaten, die $O$ zur Mitte haben.

Ohne daß wir näher darauf eingehen, sei schließlich noch angedeutet, daß aus unserem Satze andere Sätze folgen, sobald man die Ebene einer projektiven Transformation unterwirft.



Digitized by Google

Gehen bei ihr z. B. die beiden unendlich fernen imaginären Kreispunkte in die unendlich fernen Punkte der $x$- und $y$-Achse über, so geht der Satz hervor:

*Zu jeder Schar von $\infty^1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:*

$$y' = const.\ \varphi(x, y)$$

*in der $xy$-Ebene gehört eine gewisse zweite Schar von $\infty^1$ gewöhnlichen Differentialgleichungen:*

$$y' = const.\ \psi(x, y)$$

*derart, daß zwischen den $\infty^2$ Integralkurven der ersten und den $\infty^2$ Integralkurven der zweiten folgende Beziehung besteht: Legt man an alle durch einen beliebigen Punkt $P$ gehenden $\infty^1$ Kurven der ersten Schar diejenigen in $P$ oskulierenden gleichseitigen Hyperbeln, deren Asymptoten den Koordinatenachsen parallel sind, so haben die $\infty^1$ Hyperbeln einen zweiten Punkt $Q$ gemein und oskulieren in $Q$ alle $\infty^1$ durch $Q$ gehenden Kurven der zweiten Schar.*

Darmstadt, den 18. Januar 1904.

---

Druckfertig erklärt 15. II. 1904.]

Digitized by Google

# Über Protokyrine.

Von

M. Siegfried.

Als erstes Protokyrin ist in einer „Zur Kenntnis der Hydrolyse des Eiweißes“ überschriebenen I. Abhandlung[1]) das Glutokyrin beschrieben worden, welches durch langsame Einwirkung von Salzsäure auf Glutin entsteht. Die Existenz dieses Kyrines lehrt, daß in dem Glutin ein basischer Komplex vorhanden ist, der bei der vollständigen Hydrolyse zwei Drittel seines Stickstoffes in den Basen Arginin und Lysin liefert. Die große Widerstandsfähigkeit des Glutokyrins berechtigt, dasselbe als Kern des Glutins auszusprechen.

Ich habe früher ausgeführt, warum die Untersuchung des Glutokyrins neben dem biologischen Interesse, welches sie indirekt durch Förderung der Kenntnis der Konstitution des Eiweißes besitzt, neue Gesichtspunkte für die Beantwortung der physiologischen Fragen nach der Entstehung der Protamine und Eiweißkörper im tierischen und pflanzlichen Organismus gebracht hat. In erster Linie das letztere Interesse erheischte die Bearbeitung der Frage: Entstehen Kyrine auch aus eigentlichen Eiweißkörpern? Die vorliegende Untersuchung bejaht diese Frage. Hierdurch wird der für die Kyrine früher vorgeschlagene Name „Protokyrine“ gerechtfertigt.

## Kaseinokyrin.

Zur Darstellung des Kaseinokyrins wurde die früher beim Glutokyrin benutzte Methode der Zersetzung mit Salzsäure bei Körpertemperatur und Isolierung des Kyrins als Sulfat verwendet. Auch hier wurde die Einheitlichkeit des Sulfates durch die Konstanz der Zusammensetzung der bei häufigem Umfällen erhaltenen Substanzen erwiesen; als ein weiterer Beweis ergab sich die Tat-

1) Diese Berichte 1903 S. 63 ff.



Digitized by Google

sache, daß die quantitative Verteilung des Stickstoffes auf die Spaltungsprodukte gleich bei den verschiedenen Fraktionen des Sulfates gefunden wurde.

Als Ausgangsmaterial dienten erstens 500 gr. Kasein von E. Merck als „purissimum nach Hammarsten" bezogen, zweitens 68 gr. selbst nach der Methode von Hammarsten dargestelltes und zweimal umgefälltes Kasein aus Kuhmilch.

*I. Darstellung.* 500 gr Kasein, 5,5 Liter 16%iger Salzsäure 20 Tage im Brutschrank. Weitere Verarbeitung wie beim Glutokyrin. Ausbeute an „büchsentrockenem" Sulfat erster Fällung 116 gr.

*II. Darstellung.* 68 gr. selbst dargestelltes Kasein, 21 Liter 12,5%iger Salzsäure, 20 Tage im Brutschrank.

Das Kaseinokyrinsulfat reagiert stark sauer, auch auf Congo, ist sehr leicht löslich in Wasser, unlöslich in absolutem Alkohol und Äther. Die aus dem Sulfate dargestellte Base reagiert stark alkalisch und absorbiert Kohlensäure aus der Luft.

Sämtliche durch Umfällen erhaltenen Präparate gaben wie das Glutokyrin Biuretreaktion; die Reaktion ist ebenso wie bei dem Glutokyrin deutlich, aber keineswegs so rot wie bei den durch Enzyme entstehenden Peptonen.

Das Phosphorwolframat des Kaseinokyrins kristallisiert ähnlich wie das des Glutokyrins in gleichmäßigen, zu Drusen vereinigten nadelförmigen Prismen.

### Analysen.

Die verwendeten Substanzen waren bei 65—70° bis zum konstanten Gewicht getrocknet. Die hier mitgeteilten C-, H- und N-Bestimmungen sind von Herrn E. Singewald ausgeführt worden.

I. Das direkt aus Darstellung I. erhaltene Produkt.

1) 1912 gr. S. g. 24,0 ccm tr. N. 22° 758 mm.

Asche ca 0,5%.

II. Präparat I aus 10%iger Schwefelsäure mit Alkohol umgefällt. Asche 0,5%.

2) 0,1912 gr. S. g. 24,2 ccm tr. N. 22° 758 mm.

III. Präparat I aus Wasser umgefällt; das so erhaltene Sulfat aus 5%iger Schwefelsäure umgefällt, also 2 Mal umgefälltes Sulfat. Asche: Spuren.

Digitized by Google

3) 0,1806 gr. S. g. 0,2094 gr. $CO_2$. u. 0,0928 gr. $H_2O$.
4) 0,1891 gr. S. g. 23,9 ccm tr. N. 18° 757 mm
5) 0,1873 gr. S. 0,1581 gr. $BaSO_4$.

IV. Präparat I aus Wasser und darauf aus 5%iger Schwefelsäure umgefällt; dieses Sulfat mit der dreifachen Menge 10%iger Schwefelsäure 144 Stunden im Brutschrank digeriert. Hierauf das Sulfat durch Alkohol und Äther als ölige Schicht gefällt, dieselbe nach Abgießen des Alkohols und Äthers in 5%iger Schwefelsäure gelöst und in Alkohol verrührt; also 5 Mal umgefälltes Sulfat. Aschefrei.

6) 0,1431 gr. S. g. 18,2 ccm tr. N. 16° u. 745 mm
7) 0,1339 gr. S. g. 16,6 ccm tr. N. 16° u. 756 mm
8) 0,1481 gr. S. g. 0,1723 gr. $CO_2$ u. 0,0810 gr. $H_2O$
9) 0,1576 gr. S. g. 0,1356 gr. $BaSO_4$
10) 0,1575 gr. S. g. 0,1846 gr. $CO_2$ u. 0,0916 gr. $H_2O$.

V. 10 gr. von dem 2 Mal umgefällten in IV. benutzten Sulfate in 30 cm 5%iger Schwefelsäure gelöst und in Alkohol gefällt. Ausbeute 6 gr. Aschefrei.

11) 0,1960 gr. S. g. 25,5 ccm tr. N. 16° 744 mm
12) 0,1908 gr. S. g. 24,4 ccm tr. N. 19° 765 mm
13) 0,1918 gr. S. g. 0,2269 gr. $CO_2$ u. 0,0974 gr. $H_2O$
14) 0,1937 gr. S. g. 0,1589 gr. $BaSO_4$
15) 01892 g. S. (auf 100° erhitzt) g. 0,2214 gr. $CO_2$ u. 0,1050 gr. $H_2O$.

VI. Darstellung II. Sulfat einmal aus 5%iger Schwefelsäure umgefällt.

16) 0,1914 gr. S. g. 24,2 ccm tr. N 19° 755 mm
17) 0,1755 gr. S. g. 0,2071 $CO_2$ u. 0,0894 gr. $H_2O$
18) 0,1772 gr. S. g. 0,1598 gr. $BaSO_4$

Die Tabelle auf der folgenden Seite enthält die aus den Analysenwerten berechneten Prozente.

Das bei 70° bis zum konstanten Gewichte erhitzte Sulfat enthielt nach Destillation mit Wasserdämpfen nachweisbaren Alkohol. Da bei der Temperatur, bei welcher der Alkohol völlig entweicht, eine langsame Zersetzung des Sulfates stattfindet, konnte nicht durch Gewichtsverlust die Menge des Alkohols ermittelt werden. Deshalb nehme ich vorläufig Abstand, aus den Analysenwerten eine Formel für das Kaseinokyrinsulfat aufzustellen und führe nur an, daß die Formel $(C_{17}H_{31}N_7O_5)_2\,5H_2SO_4 + C_2H_5OH$ den analytischen Daten und den Ergebnissen der Spaltungsversuche entsprechen würde. Handelt es sich nur um Spuren zurück-

Digitized by Google

| | | | % | C | H | N | S |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| I | 1 | | | — | — | 14,49 | — |
| II | 2 | | | — | — | 14,60 | — |
| III | 3 | | | 31,62 | 6,08 | — | — |
| | 4 | | | — | — | 14,79 | — |
| | 5 | | | — | — | — | 11,59 |
| IV | 6 | | | — | — | 14,69 | — |
| | 7 | | | — | — | 14,56 | — |
| | 8 | | | 31,72 | 6,17 | — | — |
| | 9 | | | — | — | — | 11,81 |
| | 10 | | | 31,69 | 6,45 | — | — |
| V | 11 | | | — | — | 15,05 | — |
| | 12 | | | — | — | 15,07 | — |
| | 13 | | | 32,27 | 5,68 | — | — |
| | 14 | | | — | — | — | 11,27 |
| | 15 | | | 31,92 | 6,21 | — | — |
| VI | 16 | | | — | — | 14,68 | — |
| | 17 | | | 32,18 | 5,70 | — | — |
| | 18 | | | — | — | — | 11,60 |
| Mittel | | | | 31,90 | 6,05 | 14,74 | 11,57 |

gehaltenen Alkohols, welche die Analysenwerte nicht merklich beeinflussen würden, so würden die gefundenen Daten etwa zu der Formel: $C_{23}H_{47}N_9O_8 \cdot 3H_2SO_4$ führen.

### Spaltungen des Kaseinokyrins.

Die eingehende Beschreibung der qualitativen und quantitativen Spaltungsversuche mit Schwefelsäure sollen erst in der ausführlichen Mitteilung gegeben werden.

Von Basen wurden isoliert:

1) *Arginin* als saures Silbersalz. Fp. 184° corr.

Analysen: I. 0,2021 gr. S. g. 0,0539 gr. Ag.
II. 0,2008 gr. S. g. 0,1300 gr. $CO_2$ u. 0,0688 gr. $H_2O$ u. 0,0534 gr. Ag.
III. 0,2021 gr. S. g. 35,2 ccm tr. N 18° 755 mm.

| Gefunden: | Ber. f. $C_6H_{14}N_4O_2 \cdot NO_3H \cdot AgNO_3$ | |
|---|---|---|
| C | 17,66% | 17,68% |
| H | 3,83% | 3,71% |
| N | 20,30% | 20,68% |
| Ag | 26,67%; 26,60% | 26,55% |

2) *Lysin.* Die Lösung des Chlorhydrates drehte die Ebene des polarisierten Lichtes nach rechts und lieferte glatt das charakteristische Platindoppelsalz.

Analysen: I. 0,2695 gr. S. g. 0.0888 gr. Pt
II. 0,3217 gr. S. erf. 10,4 ccm $\frac{n}{10}$ S.

Gefunden:
Pt: 32,21%
N: 4,58%

Ber. f. $C_6H_{14}N_2O_2PtCl_6H_2 + C_2H_5OH$
32,37%
4,67%

Histidin entstand bei der Spaltung nicht; sowohl die Reaktion mit ammoniakalischer Silberlösung als die mit Queck-

Digitized by Google

silbersulfat[1]) fielen negativ aus. Ammoniak wird ebenfalls nicht bei der Spaltung mit Schwefelsäure gebildet.

Von *Amidosäuren* war nur *Glutaminsäure* nachweisbar.

Analysen des glutaminsauren Silbers: (bei 70° getrocknet)

I. 0,2121 gr. S. g. 0,1258 gr. Ag.

II. 0,1769 gr. S. g. 0,1058 gr. $CO_2$ u. 0,0356 gr. $H_2O$

| Gefunden: | Ber. f. $C_5H_7NO_4Ag_2$: |
|---|---|
| C 16,31% | 16,63% |
| H 2,25% | 1,95% |
| Ag 59,32% | 59,81% |

Das aus dem Silbersalze dargestellte Chlorhydrat kristallisierte in den Formen des Glutaminsäurechlorhydrates und war in starker Salzsäure sehr schwer, in Wasser leicht löslich. Analyse:

0,0839 gr. S. g. 0,0670 gr. Cl Ag.

| Gefunden: | Ber. f. $C_5H_9NO_4HCl$ |
|---|---|
| Cl 19,74% | 19,31% |

Drei quantitative Spaltungsversuche mit Schwefelsäure mit drei verschiedenen Präparaten ausgeführt ergaben für Basen-N korrigiert für Löslichkeit des Arginins in 5% Phosphorwolframsäure 5% Schwefelsäure:

89,1% 88,9% 86,1% im Mittel

im Gesamtmittel somit 88%.

Die Untersuchung ergibt somit, daß bei der langsamen Hydrolyse des Kaseins mit Salzsäure eine gegen weitere Hydrolyse sehr widerstandsfähige Base, das Kaseinokyrin, entsteht, welche bei der völligen Hydrolyse über 80% seines Stickstoffes als Basen-N liefert und als Spaltungsprodukte Arginin, Lysin und Glutaminsäure gibt.

Hervorzuheben ist das Fehlen des Histidinkomplexes im Kaseinokyrin, während das Kasein bei der vollständigen Hydrolyse reichlich Histidin liefert. Hieraus geht hervor, daß entweder der Histidinkomplex im Kaseinmolekul, wenn ein solches überhaupt existiert, gar nicht oder locker mit dem basischen Kern verbunden ist.

Die Bedeutung der Glutaminsäure für das Eiweißmolekul muß immer wieder betont werden[2]), wenn man sieht, daß auch in dem Molekul des Kaseinokyrins der Glutaminsäurekomplex

---

1) A. Kossel u. A. J. Patten Zeitschr. f. physiol. Ch. Bd. 38 S. 40.

2) M. Siegfried. Diese Berichte 1903 S. 63 ff.

Digitized by Google

nicht fenlt und wahrscheinlich als einziger Amidosäurekomplex vorhanden ist. Alle von mir und meinen Mitarbeitern untersuchten Peptone lieferten reichlich Glutaminsäure bei der Spaltung. Das weitere Abbauprodukt, das Glutokyrin gab sie ebenfalls, und wenn dem Kaseinmolekul fast alle sauren oder richtiger gesagt amphoteren Komplexe genommen werden, so bleibt in fester Vereinigung mit Arginin und Lysin die Glutaminsäure zurück.

Schon nach Auffindung des ersten Kyrins, des Glutokyrins, habe ich darauf hingewiesen, daß die Anschauungen Kossels über den basischen Kern des Eiweißmolekuls durch die Bildung des widerstandsfähigen Kyrins, das wie ein harter Kern gleichsam aus dem Proteinmolekul durch die Salzsäure herausgeschält wird, eine wesentliche Stütze findet. Mehr noch als durch das Glutokyrin geschieht dies durch das Kaseinokyrin; der hohe Basen-N entspricht dem der Protamine.

Auch aus dem Fibrin habe ich ein Kyrin, dessen Sulfat sehr ähnliche Zusammensetzung wie das des Kaseinokyrins besitzt, isoliert und bin mit dessen Untersuchung beschäftigt.

---

Druckfertig erklärt 8. IV. 1904.]

Digitized by Google

## SITZUNG VOM 29. FEBRUAR 1904.

Erledigung verschiedener Eingänge.

Zur Generalversammlung der Assoziation der Akademien werden delegiert die Herren P. Flechsig, H. Credner und der Sekretär.

Eine vom Herrn Archivar verfaßte Liste über die Frequenz des Sitzungsbesuches 1892—1903 soll bei den Mitgliedern der Klasse zirkulieren.

Eine Einladung der Universität Wiskonsin zur Beteiligung an ihrem 50jährigen Jubiläum wird der phil.-hist. Klasse mitgeteilt.

Vorträge:

Herr Wiener teilt die Notiz von Herrn Felix Kämpf mit über „Doppelbrechung in Kundtschen Spiegeln und Doppelbrechung von Metallspiegeln durch Zug".

Herr Scheibner legt einen Aufsatz vor von Herrn Martin Krause über Thetafunktionen und von sich selber einen Nachtrag zu seiner Abhandlung: „Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie".

# Doppelbrechung in Kundtschen Spiegeln und Doppelbrechung von Metallspiegeln durch Zug.

Von

Felix Kämpf.

Kundt hat gefunden, daß Metallspiegel, die durch Zerstäuben einer Drahtelektrode als Kathode im Vakuum erhalten wurden, Doppelbrechung aufweisen, deren Schwingungsachsen radial und tangential in den entstehenden kegelförmigen Spiegeln verlaufen. Dessau zeigte weiter, daß ein in radialer Richtung schwingender Strahl (elektrische Amplitude) verzögert wird gegen den in tangentialer Richtung schwingenden.

Eine quantitative Messung des Betrages der Doppelbrechung, sowie eine befriedigende Erklärung über das Zustandekommen derselben, ist bis jetzt nicht gegeben. Um diese beiden Fragen zu

Digitized by Google

beantworten, wurde im hiesigen physikalischen Institut eine Arbeit von mir auf Anregung von Herrn Prof. WIENER unternommen, deren Resultate hier kurz wiedergegeben werden sollen. Eine ausführliche Mitteilung der Arbeit wird an anderer Stelle erfolgen.

Die zur Untersuchung dienenden Platinspiegel wurden in ähnlicher Weise hergestellt, wie es bereits die genannten Herren getan hatten.

Die Messung der Doppelbrechung gelang durch Kompensation mit einem Glimmerplättchen von einem Gangunterschied von $\lambda = 0{,}086\ \lambda$. Um ihre absolute Größe zu finden, mußte noch die Dicke der Spiegel an den betreffenden Stellen bestimmt werden. Dies geschah durch Absorptions- bezw. Reflexionsmessungen mit dem Doppelspalt und Spektrometer unter Zugrundelegung der in DRUDES Optik angegebenen Werte von $n = 2{,}06$ und $nk = 4{,}26$ von Platin. In den Spiegeln nahm die auf eine bestimmte Dicke ($10\ \mu\mu$) reduzierte Größe der Doppelbrechung von der Mitte nach dem Rande hin zu, um zuletzt wieder abzunehmen; indessen sind die gemessenen Werte der Doppelbrechung am Rande durch Oxydbildung getrübt, sie stellen hier nur noch die Differenz der an diesen Stellen vorhandenen Metalldoppelbrechung minus Oxyddoppelbrechung, deren Sinn der umgekehrte ist, dar. Die aus dem größten gemessenen Werte der Doppelbrechung berechnete Differenz der Brechungsexponenten ergab sich zu 0,29 für $\lambda = 500\ \mu\mu$.

Eine Reihe von Gründen, von denen ich nur das Nachlassen der Doppelbrechung mit der Zeit, sowie das Auftreten von zahlreichen feinen Rissen und Sprüngen in vorwiegend tangentialer Richtung bei sehr stark doppelbrechenden Spiegeln hervorhebe, legen die Vermutung nahe, daß die Doppelbrechung durch elastische Spannung hervorgerufen wird.

Versuche nach dieser Richtung bestätigten insofern die Annahme, als es gelang, durch Zug in dünnen auf Deckglas niedergeschlagenen Silberspiegeln Doppelbrechung, verbunden mit starker Dispersion derselben nachzuweisen. Vermöge Änderung der Doppelbrechung durch Zug an einem bereits doppelbrechenden Platinspiegel, der nicht die störende Eigenschaft der Dispersion zeigte, gelang es, quantitative Resultate zu erlangen. Es ergab sich als Gangunterschied des in Zugrichtung schwingenden Strahles gegen den senkrecht dazu schwingenden $\varepsilon = 1{,}05^0$ bei der Dehnung eines Millimeters um 0,00035 mm bei 20 $\mu\mu$ Dicke des Spiegels, wobei der in Zugrichtung schwingende Strahl verzögert war.

Digitized by Google

Unter Annahme der Proportionalität von Dehnung und Doppelbrechung berechnet sich daraus für den erwähnten größten Wert der Differenz der Brechungsexponenten (0,29) eine Dehnung von 0,008; eine Dehnung, die Platin in freiem Zustand nicht aushalten könnte (Reißgrenze 0,0018). Für das auf dem Glase festhaftende Platin ist dieser Wert aber wohl denkbar.

Man hätte sich dann den Vorgang so vorzustellen, daß von der Kathode Teilchen — Molekülkomplexe fortgeschleudert würden, die bei ihrem Auftreffen deformiert und zugleich festgehalten werden; in diesen einzelnen Teilchen würde alsdann eine elastische Spannung zurückbleiben, welche eine Doppelbrechung im beobachteten Sinne bedingt.

Herr Prof. Braun sucht in einer Arbeit (Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften. 21. Jan. 1904) die Erscheinung an Kundtschen Spiegeln durch Auftreten der von ihm gefundenen Gitterpolarisation zu erklären. Bei den Kundtschen Spiegeln tritt indes, wie aus der Möglichkeit der Kompensation durch ein Glimmerplättchen hervorgeht, ein wirklicher Gangunterschied der Strahlen auf, was bei dem Braunschen Phänomen nicht der Fall ist. Außerdem ist die Herstellung dieser Spiegel im Gegensatz zu den Braunschen (Herr Prof. Braun zerstäubt in Luft durch den Schlag einer großen Leydener Flaschenbatterie seinen Platindraht fast momentan) eine ganz allmähliche, und es wäre dabei nicht einzusehen, warum sich das Metall in Streifen anordnen und in den Zwischenräumen nicht absetzen sollte. Außerdem liegen die von mir mitunter beobachteten Risse senkrecht zu den von Braun erhaltenen Streifen und sind als Folge einer Überschreitung der Festigkeitsgrenze aufzufassen. Ferner konnte bei einem Versuche durch Drehung eines vorgestellten Nikols keine Helligkeitsänderung des durchgegangenen Lichtes, das im Photometer beobachtet wurde, konstatiert werden. Endlich habe ich zeigen können, daß die Doppelbrechung gebunden ist an den Druck, bei dem die Zerstäubung stattfand. Diese bei der Braunschen Auffassung schwer verständliche Erscheinung erklärt sich nach meiner Annahme durch die veränderte Geschwindigkeit der abgeschleuderten Teilchen, welche verschiedene Doppelbrechung verursachen muß.

Physikalisches Institut der Universität Leipzig.

---

Druckfertig erklärt 23. IV. 1904.]

Digitized by Google

# Zur Transformation der Thetafunktionen.

Von

Martin Krause.

In einigen früheren Arbeiten habe ich das Problem behandelt, Relationen zwischen Thetafunktionen mit verschiedenen Moduln aufzustellen, die durch Nullsetzen der Argumente Modular- resp. Multiplikatorbeziehungen ergeben. Es möge in bezug hierauf auf den zweiten Teil meines Buches über die doppeltperiodischen Funktionen verwiesen werden. Im folgenden soll auf dieses Problem zurückgekommen werden, aber in einer etwas anderen Weise wie früher.

Die Zahl und die Form der bisher aufgestellten Modulargleichungen ist eine recht große. Nach dieser Richtung hin werde u. a. auf eine Arbeit von Fiedler[1]) hingewiesen, in welcher für die einzelnen Transformationsgrade gewisse Invarianten eingeführt und mit ihrer Hilfe entsprechende Transformationsgleichungen aufgestellt werden. An diese Arbeit von Fiedler soll die folgende Notiz sich anschließen. Es sollen dazu im Gebiete der Thetafunktionen mit beliebigen Argumenten für eine Kategorie von Transformationszahlen gewisse Fundamentalfunktionen eingeführt werden, die durch Nullsetzen der Argumente die Irrationalitäten ergeben, aus denen Fiedler seine Invarianten zusammensetzt, es soll ferner gezeigt werden, daß es in den einfachsten Fällen möglich ist, Transformationsgleichungen aufzustellen, die durch Nullsetzen der Argumente die Fiedlerschen Gleichungen ergeben.

---

1) Fiedler: Über eine besondere Klasse irrationaler Modulargleichungen der elliptischen Funktionen. Zürich 1885.

Digitized by Google

## § 1.

**Definition der allgemeinen Thetafunktionen. Definition gewisser Fundamentalfunktionen, wenn der Transformationsgrad $n$ der Gleichung Genüge leistet: $\alpha^2 + n\beta^2 = 2^r$.**

Versteht man unter $\vartheta_s(v, \tau)$ eine der gewöhnlichen vier elliptischen Thetafunktionen, so soll gesetzt werden:

$$(1) \qquad \vartheta_s[g](v, n\tau) = e^{\frac{\pi i g}{n}(2v+\tau)} \vartheta_s(v + g\tau,\ n\tau),$$

wobei $g$ eine beliebige Größe bedeutet. Für $s = 3$ bestehen dann die Gleichungen:

$$(2) \qquad \begin{aligned} \vartheta_3[g](v + \alpha,\ n\tau) &= e^{\frac{2\pi i g \alpha}{n}} \vartheta_3[g](v, n\tau), \\ \vartheta_3[g]\left(v + \frac{\alpha}{2},\ n\tau\right) &= e^{\frac{\pi i g \alpha}{n}} \vartheta_0[g](v, n\tau). \end{aligned}$$

In der ersten dieser beiden Gleichungen kann $\alpha$ eine beliebige ganze Zahl sein, in der zweiten eine ungerade ganze Zahl. Ferner wird:

$$(3) \qquad \begin{aligned} \vartheta_3[g](v + \beta n\tau, n\tau) &= e^{-\pi i \beta (2v + \beta n\tau)} \vartheta_3[g](v, n\tau), \\ \vartheta_3[g + \beta n](v, n\tau) &= \vartheta_3[g](v, n\tau), \\ \vartheta_3[g]\left(v + \frac{\beta n\tau}{2},\ n\tau\right) &= e^{-\frac{\pi i \beta}{2}\left(2v + \frac{\beta n\tau}{2}\right)} \vartheta_2[g](v, n\tau), \\ \vartheta_3\left[g + \frac{\beta n}{2}\right](v, n\tau) &= \vartheta_2[g](v, n\tau). \end{aligned}$$

In den beiden ersten dieser Gleichungen kann $\beta$ eine beliebige ganze Zahl sein, in den beiden letzten eine ungerade ganze Zahl. Ähnliche Relationen gelten für die Indices 2, 0, 1.

Es möge bemerkt werden, daß es an sich nicht nötig wäre, die vier Indices 3, 2, 0, 1 einzuführen, ja daß ohne Einführung derselben die Formeln sich teilweise übersichtlicher gestalten. Sie sind im folgenden beibehalten worden, damit die Endformeln sich sofort in der gewöhnlichen Form ergeben.

FIEDLER führt nun gewisse Elementarinvarianten ein, die für die verschiedenen Typen von Transformationsgraden verschiedene Werte besitzen. Wir wollen im folgenden nur die ungeraden Transformationsgrade $n$ ins Auge fassen, die einer Gleichung Genüge leisten:

Digitized by Google

$$\alpha^2 + n\beta^2 = 2^r, \qquad (r = 3, 4, \ldots) \tag{4}$$

wobei wir $\alpha$ und $\beta$ als ungerade Zahlen annehmen.

Für diese Zahlen $n$ definiert FIEDLER vier Invarianten:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} \mp 1, \\ Z_2 &= \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'} \mp \sqrt[4]{\varkappa\lambda} \mp \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}, \\ Z_2' &= Z_1^2 - 4 Z_2, \\ Z_3 &= \mp \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'}, \end{aligned} \tag{5}$$

wobei das obere oder das untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem:

$$n \equiv 7 \bmod 16$$

oder

$$n \equiv 15 \bmod 16$$

ist. Die Invariante $Z_2'$ nimmt in diesen Fällen die resp. Werte an:

$$\begin{aligned} &\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} + 1 + 2\left(\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} - \sqrt[4]{\varkappa\lambda\varkappa'\lambda'}\right), \\ &\sqrt{\varkappa\lambda} + \sqrt{\varkappa'\lambda'} + 1 - 2\left(\sqrt[4]{\varkappa\lambda} + \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'} + \sqrt[4]{\varkappa\lambda\varkappa'\lambda'}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Jedenfalls setzen sich diese Invarianten in einfacher Weise aus den drei Irrationalitäten zusammen:

$$\sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}, \quad \sqrt[4]{\varkappa\lambda}, \quad \sqrt[4]{\varkappa\varkappa'\lambda\lambda'},$$

oder wenn wir Thetafunktionen einführen und uns alle Ausdrücke mit $\vartheta_3(0,\tau)\,\vartheta_3(0,n\tau)$ multipliziert denken:

$$\sqrt{\vartheta_0 \cdot \vartheta_0(0,n\tau)\,\vartheta_3 \cdot \vartheta_3(0,n\tau)}, \quad \sqrt{\vartheta_2 \cdot \vartheta_2(0,n\tau)\,\vartheta_3 \cdot \vartheta_3(0,n\tau)},$$
$$\sqrt{\vartheta_2 \cdot \vartheta_2(0,n\tau)\,\vartheta_0 \cdot \vartheta_0(0,n\tau)}.$$

Es fragt sich, welche Größen diesen Irrationalitäten in der allgemeinen Transformationstheorie entsprechen werden. Wir erwägen dazu, daß diese Irrationalitäten mit Hilfe der quadratischen Transformation in mannigfache andere Formen gebracht werden können. FIEDLER wählt die Formen:

$$\vartheta_0(0,2\tau)\,\vartheta_0(0,2n\tau), \quad \tfrac{1}{2}\vartheta_2\left(0,\tfrac{\tau}{2}\right)\vartheta_2\left(0,\tfrac{n\tau}{2}\right),$$
$$\vartheta_2\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{\tau}{2}\right)\vartheta_2\left(\tfrac{1}{4},\tfrac{n\tau}{2}\right).$$

Es ist hierbei von den beiden Repräsentanten Gebrauch gemacht:

Digitized by Google

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

Beschränkt man sich auf den ersten, so können wir die Größen nehmen:

$$\vartheta_0(0, 2\tau)\,\vartheta_0(0, 2n\tau), \quad 2\,\vartheta_2\left[\frac{\alpha}{2}\right](0, 2\tau)\,\vartheta_2\left[\frac{\beta n}{2}\right](0, 2n\tau),$$

$$2\,(-1)^{\frac{\alpha^2-1}{8}+\frac{\beta^2-1}{8}}\,\vartheta_0\left[\frac{\alpha}{2}\right](0, 2\tau)\,\vartheta_0\left[\frac{\beta n}{2}\right](0, 2n\tau).$$

Im Gebiete der Thetafunktionen mit beliebigen Argumenten können wir der ersten dieser drei Größen den Ausdruck zuordnen:

$$(7) \qquad \begin{aligned} I_1(2v_1, 2v_2) &= \vartheta_0(2v_1, 2\tau)\,\vartheta_0(2v_2, 2n\tau) \\ &+ (-1)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\vartheta_1(2v_1, 2\tau)\,\vartheta_1(2v_2, 2n\tau), \end{aligned}$$

der zweiten die beiden Ausdrücke:

$$(8a) \qquad \begin{aligned} I_2(2v_1, 2v_2) &= \vartheta_2\left[\frac{\alpha}{2}\right](2v_1, 2\tau)\,\vartheta_2\left[\frac{\beta n}{2}\right](2v_2, 2n\tau) \\ &+ \vartheta_2\left[\frac{\alpha}{2}\right](2v_1, 2\tau)\,\vartheta_2\left[\frac{\beta n}{2}\right](2v_2, 2n\tau) \end{aligned}$$

und:

$$(8b) \qquad \begin{aligned} I_2'(2v_1, 2v_2) &= \vartheta_2\left[-\frac{\alpha}{2}\right](2v_1, 2\tau)\,\vartheta_2\left[-\frac{\beta n}{2}\right](2v_2, 2n\tau) \\ &+ \vartheta_2\left[-\frac{\alpha}{2}\right](2v_1, 2\tau)\,\vartheta_2\left[-\frac{\beta n}{2}\right](2v_2, 2n\tau), \end{aligned}$$

endlich der dritten:

$$(9a) \qquad \begin{aligned} \eta I_3(2v_1, 2v_2) &= \eta\Big[\vartheta_0\left[\frac{\alpha}{2}\right](2v_1, 2\tau)\,\vartheta_0\left[\frac{\beta n}{2}\right](2v_2, 2n\tau) \\ &+ (-1)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\vartheta_1\left[\frac{\alpha}{2}\right](2v_1, 2\tau)\,\vartheta_1\left[\frac{\beta n}{2}\right](2v_2, 2n\tau)\Big], \end{aligned}$$

$$(9b) \qquad \begin{aligned} \eta I_3'(2v_1, 2v_2) &= \eta\Big[\vartheta_0\left[-\frac{\alpha}{2}\right](2v_1, 2\tau)\,\vartheta_0\left[-\frac{\beta n}{2}\right](2v_2, 2n\tau) \\ &+ (-1)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\,\vartheta_1\left[-\frac{\alpha}{2}\right](2v_1, 2\tau)\,\vartheta_1\left[-\frac{\beta n}{2}\right](2v_2, 2n\tau)\Big], \end{aligned}$$

wobei gesetzt ist:

$$\eta = (-1)^{\frac{\alpha^2-1}{8}+\frac{\beta^2-1}{8}}.$$

In der Tat, setzen wir $v_1 = v_2 = 0$, so wird:



Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
I_1(0,0) &= I_1 = \vartheta_0(0,2\tau)\,\vartheta_0(0,2n\tau) \\
&= \sqrt{\vartheta_0\cdot\vartheta_0(0,n\tau)\,\vartheta_3\cdot\vartheta_3(0,n\tau)}, \\
I_2(0,0) &= I_2'(0,0) = I_2 = 2\,\vartheta_2\Big[\frac{\alpha}{2}\Big](0,2\tau)\,\vartheta_2\Big[\frac{\beta n}{2}\Big](0,2\tau) \\
&= \sqrt{\vartheta_2\cdot\vartheta_2(0,n\tau)\,\vartheta_3\cdot\vartheta_3(0,n\tau)}, \\
\eta I_3(0,0) &= \eta I_3'(0,0) = \eta I_3 = 2\,\eta\vartheta_0\Big[\frac{\alpha}{2}\Big](0,2\tau)\,\vartheta_0\Big[\frac{\beta n}{2}\Big](0,2\tau) \\
&= \sqrt{\vartheta_2\cdot\vartheta_2(0,n\tau)\,\vartheta_0\cdot\vartheta_0(0,n\tau)}.
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Sehen wir die Funktionen $I(2v_1, 2v_2)$ als Funktionen von $v_1$ allein an, so sind es Thetafunktionen zweiter Ordnung, die zu den Charakteristiken 10, 01, 11 gehören. Es liegt nahe neben ihnen noch eine Thetafunktion zweiter Ordnung zu betrachten, die zu der Charakteristik 00 gehört. Wir wählen die Funktion:

$$
\begin{aligned}
I_0(2v_1, 2v_2) = {} & \vartheta_3(2v_1, 2\tau)\,\vartheta_3(2v_2, 2n\tau) \\
& + \vartheta_2(2v_1, 2\tau)\,\vartheta_2(2v_2, 2n\tau).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Dann wollen wir die zwei Probleme stellen:

I. *Es sollen Beziehungen zwischen den sechs eingeführten Größen I aufgestellt werden, wobei die Argumente beliebig bleiben, wobei ferner neben diesen Größen noch die Größen:*

$$\vartheta_s(v,\tau)\,\vartheta_s(w,n\tau)$$

*vorkommen können.*

II. *Es sollen Beziehungen zwischen den fünf ersten eingeführten Größen I aufgestellt werden, wobei die Argumente beliebig bleiben, wobei ferner neben diesen Größen noch die Größen:*

$$\vartheta_s(v,\tau)\,\vartheta_s(w,n\tau)$$

*vorkommen können.*

Setzt man in den Gleichungen der letzten Art die sämtlichen Argumente gleich Null, so erhalten wir Modularbeziehungen zwischen den Größen:

$$\sqrt[4]{\varkappa\lambda}, \quad \sqrt[4]{\varkappa'\lambda'}, \quad \sqrt[4]{\varkappa\lambda\varkappa'\lambda'},$$

die ihrerseits in Gleichungen zwischen den Invarianten $Z$ verwandelt werden können. Es soll das in den einfachsten Fällen wirklich durchgeführt werden.

Digitized by Google

## § 2.

### Darstellung gewisser Verbindungen von Thetafunktionen mit gebrochener Charakteristik durch die Fundamentalfunktionen.

Bekanntlich gelten die Formeln:

$$(1)\quad \begin{aligned}
\vartheta_3(v_1)\,\vartheta_3(v_3) &= \vartheta_3(w_1, 2\tau)\,\vartheta_3(w_3, 2\tau) + \vartheta_2(w_1, 2\tau)\,\vartheta_2(w_3, 2\tau),\\
\vartheta_0(v_1)\,\vartheta_0(v_3) &= \vartheta_3(w_1, 2\tau)\,\vartheta_3(w_3, 2\tau) - \vartheta_2(w_1, 2\tau)\,\vartheta_2(w_3, 2\tau),\\
\vartheta_2(v_1)\,\vartheta_2(v_3) &= \vartheta_2(w_1, 2\tau)\,\vartheta_3(w_3, 2\tau) + \vartheta_3(w_1, 2\tau)\,\vartheta_2(w_3, 2\tau),\\
\vartheta_1(v_1)\,\vartheta_1(v_3) &= -\vartheta_2(w_1, 2\tau)\,\vartheta_3(w_3, 2\tau) + \vartheta_3(w_1, 2\tau)\,\vartheta_2(w_3, 2\tau),
\end{aligned}$$

wobei gesetzt ist:

$$(2)\qquad w_1 = v_1 + v_3, \quad w_3 = v_1 - v_3.$$

Ähnliche Darstellungen ergeben sich für die Produkte:

$$\vartheta_s(v_2, n\tau)\,\vartheta_s(v_4, n\tau),$$

wobei auf den rechten Seiten die Argumente zu wählen sind:

$$(3)\qquad w_2 = v_2 + v_4, \quad w_4 = v_2 - v_4.$$

Wir wollen nun allgemein setzen:

$$(4)\qquad A_1(v_1, v_2) = \sum \varepsilon_s \vartheta_s(v_1, \tau)\,\vartheta_s(v_2, n\tau),$$

wobei $\varepsilon_s$ für $s = 3, 2, 0$ den Wert 1 besitzt, während unter $\varepsilon_1$ die Größe:

$$(-1)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

verstanden wird. Unter Zuhilfenahme der aufgestellten Formeln (1) kann dann das Produkt:

$$A_1(v_1, v_2)\,A_1(v_3, v_4)$$

durch die eingeführten Fundamentalfunktionen dargestellt werden, und zwar nimmt es die Form an:

$$\begin{aligned}
&2\,(I_0(w_1, w_2)\,I_0(w_3, w_4) + I_1(w_1, w_2)\,I_1(w_3, w_4)\\
&+ I_2(w_1, w_2)\,I_2'(w_3, w_4) + I_3(w_1, w_2)\,I_3'(w_3, w_4)).
\end{aligned}$$

Substituieren wir viertel Perioden, so ergeben sich drei neue Formeln. Wir führen dazu drei neue Funktionen ein und zwar durch die Gleichungen:



Digitized by Google

$$A_2(v_1, v_2) = \sum_{s=0}^{s=3} \varepsilon_s \vartheta_s\left(v_1 + \frac{\alpha}{4}, \tau\right) \vartheta_s\left(v_2 + \frac{\beta n}{4}, n\tau\right),$$

$$(5) \quad A_3(v_1, v_2) = \sum_{s=0}^{s=3} \varepsilon_s \vartheta_s\left[\frac{\alpha}{4}\right](v_1, \tau)\, \vartheta_s\left[\frac{\beta n}{4}\right](v_2, n\tau),$$

$$A_4(v_1, v_2) = \sum_{s=0}^{s=3} \varepsilon_s \vartheta_s\left[\frac{\alpha}{4}\right]\left(v_1 + \frac{\alpha}{4}, \tau\right) \vartheta_s\left[\frac{\beta n}{4}\right]\left(v_2 + \frac{\beta n}{4}, n\tau\right).$$

Dann können die drei Produkte:

$A_2(v_1, v_2) A_2(v_3, v_4)$, $A_3(v_1, v_2) A_3(v_3, v_4)$, $A_4(v_1, v_2) A_4(v_3, v_4)$

auch durch unsere Fundamentalfunktionen dargestellt werden, und zwar ergeben sich die Ausdrücke:

$$2\left(I_1(w_1, w_2) I_0(w_3, w_4) + I_0(w_1, w_2) I_1(w_3, w_4) + I_2(w_1, w_2) I_2'(w_3, w_4) + I_2(w_1, w_2) I_2'(w_3, w_4)\right),$$

$$2\left(I_2(w_1, w_2) I_0(w_3, w_4) + I_3(w_1, w_2) I_1(w_3, w_4) + I_0(w_1, w_2) I_2'(w_3, w_4) + I_1(w_1, w_2) I_3'(w_3, w_4)\right),$$

$$2\left(I_3(w_1, w_2) I_0(w_3, w_4) + I_2(w_1, w_2) I_1(w_3, w_4) + I_1(w_1, w_2) I_2'(w_3, w_4) + I_0(w_1, w_2) I_3'(w_3, w_4)\right).$$

*Jedenfalls also ist bewiesen, daß die vier Produkte:*

$$A(v_1, v_2) A(v_3, v_4)$$

*sich ganz und rational durch die Fundamentalfunktionen darstellen lassen.*

Diese Betrachtungen gelten für alle ungeraden Werte von $n$, die der Gleichung Genüge leisten:

$$\alpha^2 + n\beta^2 = 2^r.$$

## § 3.

### Untersuchung des Falles $r = 4$. Aufstellung von Thetarelationen, welche beim Nullsetzen der Argumente Modulargleichungen in der FIEDLERschen Form ergeben.[1])

Wir wollen jetzt diejenigen Werte von $n$ betrachten, die der Gleichung Genüge leisten:

---

1) In bezug auf die beiden letzten Paragraphen dieser Notiz werde auf die bekannte Arbeit von SCHROTER über Modulargleichungen sowie auf das kürzlich erschienene Werk über Thetafunktionen von KRAZER verwiesen.

Digitized by Google

$$\alpha^2 + n\beta^2 = 2^4.$$

Es sind dieses die beiden Werte $n = 15$ und $n = 7$.

Es gilt dann das Additionstheorem:

$$(1)\quad \begin{aligned} &2^4 \vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, n\tau) \\ &= \sum \vartheta_3\left[\frac{g_1}{4}\right]\left(w_1' + \frac{\varepsilon_1}{4}, \tau\right) \vartheta_3\left[\frac{g_2}{4}\right]\left(w_2' + \frac{\varepsilon_2}{4}, n\tau\right), \end{aligned}$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$(2)\quad \begin{aligned} 4w_1' &= \alpha v_1 + \beta v_2, & \varepsilon_1 &= \alpha\varepsilon_1' + \beta\varepsilon_2', \\ 4w_2' &= \beta n v_1 - \alpha v_2, & \varepsilon_2 &= \beta n\varepsilon_1' - \alpha\varepsilon_2', \\ g_1 &\equiv \alpha s_1 + \beta n s_2 \bmod 4, \\ g_2 &\equiv \beta n s_1 - \alpha n s_2 \bmod 4n, \end{aligned}$$

in denen $s_1$ und $s_2$ beliebige ganze Zahlen bedeuten, während $\varepsilon_1'$ und $\varepsilon_2'$ der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen. Wir können hieraus folgern, daß gesetzt werden kann:

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha g, & g_2 &= \beta n g, \\ \varepsilon_1 &= \alpha\varepsilon, & \varepsilon_2 &= \beta n\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei $g$ und $\varepsilon$ der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3 annehmen können.

Unter solchen Umständen folgt:

$$(3)\quad \begin{aligned} &2^2 \vartheta_3(v_1, \tau)\, \vartheta_3(v_2, n\tau) = 2^2 D_3(v_1, v_2) \\ &= A_1(w_1', w_2') + A_2(w_1', w_2') + A_3(w_1', w_2') + A_4(w_1', w_2'). \end{aligned}$$

Durch Substitution halber Perioden folgen die Gleichungen:

$$(4)\quad \begin{aligned} &2^2 \vartheta_0(v_1, \tau)\, \vartheta_0(v_2, n\tau) = 2^2 D_0(v_1, v_2) \\ &= A_1(w_1', w_2') + A_2(w_1', w_2') - A_3(w_1', w_2') - A_4(w_1', w_2'), \\ &2^2 \vartheta_2(v_1, \tau)\, \vartheta_2(v_2, n\tau) = 2^2 D_2(v_1, v_2) \\ &= A_1(w_1', w_2') - A_2(w_1', w_2') + A_3(w_1', w_2') - A_4(w_1', w_2'), \\ &(-1)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\, 2^2 \vartheta_1(v_1, \tau)\, \vartheta_1(v_2, n\tau) = 2^2 D_1(v_1, v_2) \\ &= A_1(w_1', w_2') - A_2(w_1', w_2') - A_3(w_1', w_2') + A_4(w_1', w_2'). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgt umgekehrt:

$$(5)\quad \begin{aligned} A_1(w_1', w_2') &= D_3(v_1, v_2) + D_0(v_1, v_2) + D_2(v_1, v_2) + D_1(v_1, v_2), \\ A_2(w_1', w_2') &= D_3(v_1, v_2) + D_0(v_1, v_2) - D_2(v_1, v_2) - D_1(v_1, v_2), \\ A_3(w_1', w_2') &= D_3(v_1, v_2) - D_0(v_1, v_2) + D_2(v_1, v_2) - D_1(v_1, v_2), \\ A_4(w_1', w_2') &= D_3(v_1, v_2) - D_0(v_1, v_2) - D_2(v_1, v_2) + D_1(v_1, v_2). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Bilden wir dieselben Gleichungen für die Argumente $w_3'$, $w_4'$, $v_3$, $v_4$ und multiplizieren die rechten und die linken Seiten entsprechender Gleichungen, *so erhalten wir, wenn die Indices auf der linken Seite gleich 2, 3, 4 sind, unter Berücksichtigung der Resultate des vorigen Paragraphen Gleichungen von der Form wie sie unter Nr. I des ersten Paragraphen skizziert worden sind.*

In der Tat, wählen wir den Index 2, so folgt zunächst:

$$A_2(w_1', w_2')\,A_2(w_3', w_4') = 2\,(I_0(v_1', v_2')\,I_1(v_3', v_4') + I_1(v_1', v_2')\,I_0(v_3', v_4') + I_2(v_1', v_2')\,I_3(v_3', v_4') + I_3(v_1', v_2')\,I_2(v_3', v_4')),$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$v_1' = w_1' + w_3', \quad v_2' = w_2' + w_4', \quad v_3' = w_1' - w_3', \quad v_4' = w_2' - w_4'.$$

Andererseits ist aber dieses Produkt gleich:

$$(D_3(v_1, v_2) + D_0(v_1, v_2) - D_2(v_1, v_2) - D_1(v_1, v_2))$$
$$(D_3(v_3, v_4) + D_0(v_3, v_4) - D_2(v_3, v_4) - D_1(v_3, v_4)).$$

Die Gleichsetzung der beiden Ausdrücke ergibt dann eine Gleichung der angedeuteten Art.

Es ist nicht schwer, hieraus eine Thetabeziehung von der unter Nr. II im ersten Paragraphen skizzierten Art abzuleiten. Es muß hierzu lediglich die Größe $I_0$ mit den entsprechenden Argumenten eliminiert werden. Nun hatten wir die Gleichung gefunden:

$$A_3(w_1', w_2') = D_3(v_1, v_2) - D_0(v_1, v_2) + D_2(v_1, v_2) - D_1(v_1, v_2).$$

Setzen wir in derselben links und rechts an Stelle von $\tau : 2\tau$, so folgt:

$$(6) \qquad I_2(w_1', w_2') + I_3(w_1', w_2') = I_0(v_1, v_2) - I_1(v_1, v_2).$$

Es läßt sich also die Größe $I_0$ linear durch die Größen $I_1$, $I_2$, $I_3$ ausdrücken, wobei die Argumente in der soeben angegebenen Weise zu wählen sind.

Hiermit sind wir am Ziel. Es braucht die Elimination von $I_0$ im allgemeinen Falle wohl kaum durchgeführt zu werden, wir wollen uns vielmehr darauf beschränken, die Argumente sämtlich der Null gleichzusetzen. Dann erhalten wir die beiden Gleichungen:

$$4\,(I_0 I_1 + I_2 I_3) = (\vartheta_3\theta_3 + \vartheta_0\theta_0 - \vartheta_2\theta_2)^2,$$
$$I_0 = I_1 + I_2 + I_3$$

Digitized by Google

und hieraus:

$$(7)\quad I_1^2 + I_2^2 + I_3^2 + I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_4 = (\vartheta_3\theta_3 + \vartheta_0\theta_0 + \vartheta_2\theta_2)^2.$$

Es bleibt lediglich übrig nachzuweisen, daß bei Einführung der Invarianten $Z$ sich die Fiedlerschen Formen ergeben. Zwischen diesen Invarianten besteht die Beziehung:

$$(8a)\quad Z_2' = Z_1^2 + 4Z_1 + 4Z_3 + 4,$$

wenn

$$n \equiv 7 \bmod 16,$$

dagegen die Beziehung:

$$(8b)\quad Z_2' = Z_1^2 - 4Z_1 - 4Z_3 + 4,$$

wenn

$$n \equiv 15 \bmod 16$$

ist.

Ferner ist:

$$\vartheta_3\theta_3 + \vartheta_0\theta_0 + \vartheta_2\theta_2$$

im ersten Falle gleich:

$$(Z_2' - 2Z_1 - 2Z_3 - 2)\,\vartheta_3\theta_3,$$

im zweiten gleich:

$$(Z_2' + 2Z_1 + 2Z_3 - 2)\,\vartheta_3\theta_3.$$

In beiden Fällen nimmt die Gleichung die Form an:

$$Z_1(Z_1 Z_2' + 4Z_3) = 0.$$

*Im Falle $n = 7$ ist nur der Faktor $Z_1$ zu gebrauchen, wir erhalten die Gleichung:*

$$Z_1 = 0,$$

*im zweiten Falle $n = 15$ dagegen wird:*

$$Z_1 Z_2' + 4Z_3 = 0.$$

*Es sind das die Fiedlerschen Formen.*

## § 4.

### Untersuchung des Falles $r = 5$.

Wir wollen jetzt den Fall $r = 5$ untersuchen, also die Zahlen $n$ in Betracht ziehen, die der Gleichung Genüge leisten:

$$\alpha^2 + n\beta^2 = 32.$$

Es sind dieses die Zahlen 31, 23, 7.

Digitized by Google

Für dieselben gilt das Additionstheorem:

$$(1)\qquad \begin{aligned} &2^6\vartheta_3(v_1, 2\tau)\,\vartheta_3(v_2, 2n\tau)\\ &-\sum \vartheta_3\Big[\tfrac{g_1}{4}\Big]\Big(w_1+\tfrac{\varepsilon_1}{8}, \tau\Big)\,\vartheta_3\Big[\tfrac{g_2}{4}\Big]\Big(w_2+\tfrac{\varepsilon_2}{8}, n\tau\Big), \end{aligned}$$

wobei die Beziehungen bestehen:

$$(2)\qquad \begin{aligned} 8w_1 &= \alpha v_1+\beta v_2, \qquad \varepsilon_1 = \alpha\varepsilon_1'+\beta\varepsilon_2',\\ 8w_2 &= \beta n v_1-\alpha v_2, \qquad \varepsilon_2 = n\beta\varepsilon_1'-\alpha\varepsilon_2'.\\ g_1 &\equiv \alpha s_1+n\beta s_2 \bmod 4,\\ g_2 &\equiv \beta n s_1-\alpha s_2 \bmod 4. \end{aligned}$$

Wir können dabei setzen:

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha g, \quad g_2 = \beta n g,\\ \varepsilon_1 &= \alpha\varepsilon, \quad \varepsilon_2 = \beta n\varepsilon, \end{aligned}$$

wobei $g$ der Reihe nach die Werte 0, 1, 2, 3; $\varepsilon$ der Reihe nach die Werte 0, 1, . . ., 7 annehmen kann. Mit Hilfe der Substitution halber Perioden und Addition folgt:

$$\begin{aligned} &2^5\left(\vartheta_3(v_1, 2\tau)\,\vartheta_3(v_2, 2n\tau)+\vartheta_2(v_1, 2\tau)\,\vartheta_2(v_2, 2n\tau)\right)\\ &=\sum{}' \vartheta_3\Big[\tfrac{g_1}{4}\Big]\Big(w_1+\tfrac{\varepsilon_1}{8}, \tau\Big)\,\vartheta_3\Big[\tfrac{g_2}{4}\Big]\Big(w_2+\tfrac{\varepsilon_2}{8}, n\tau\Big), \end{aligned}$$

wobei durch den Strich, der der Summe beigefügt ist, angedeutet werden soll, daß $\varepsilon_1$ und $\varepsilon_2$ beide gerade Zahlen sein müssen.

Diese Gleichung können wir schreiben:

$$(3a)\qquad \begin{aligned} &2^2\left(\vartheta_3(v_1, 2\tau)\,\vartheta_3(v_2, 2n\tau)+\vartheta_2(v_1, 2\tau)\,\vartheta_2(v_2, 2n\tau)\right)\\ &-A_1(w_1, w_2)+A_2(w_1, w_2)+A_3(w_1, w_2)+A_4(w_1, w_2) \end{aligned}$$

oder auch:

$$(3b)\qquad 2^2 I_0(v_1, v_2) = A_1(w_1, w_2)+A_2(w_1, w_2)+A_3(w_1, w_2)+A_4(w_1, w_2).$$

Genau so folgt:

$$(4)\qquad \begin{aligned} 2^2 I_1(v_1, v_2) &= A_1(w_1, w_2)+A_2(w_1, w_2)-A_3(w_1, w_2)-A_4(w_1, w_2),\\ 2^2 I_2(v_1, v_2) &= A_1(w_1, w_2)-A_3(w_1, w_2)+A_2(w_1, w_2)-A_4(w_1, w_2),\\ 2^2 I_3(v_1, v_2) &= A_1(w_1, w_2)-A_2(w_1, w_2)-A_3(w_1, w_2)+A_4(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich durch Addition:

$$(5)\qquad A_1(w_1, w_2) = I_0(v_1, v_2)+I_1(v_1, v_2)+I_2(v_1, v_2)+I_3(v_1, v_2).$$

Digitized by Google

*Das ist aber eine Thetarelation wie sie unter Nr. I des ersten Paragraphen charakterisiert worden ist.*

Es handelt sich jetzt noch darum, eine Thetarelation von der unter Nr. II des ersten Paragraphen angegebenen Form zu entwickeln.

Dazu erinnern wir an die Relation:

$$2\,I_0(2v_1,\,2v_2)\,I_0(2v_3,\,2v_4)$$
$$(6)\quad -\sum\vartheta_s(v_1+v_3,\,\tau)\,\vartheta_s(v_2+v_4,\,n\tau)\,\vartheta_s(v_1-v_3,\,\tau)\,\vartheta_s(v_2-v_4,\,n\tau).$$

Setzen wir in dieser Gleichung:

$$I_0(2v_1,\,2v_2)$$
$$= A_1(2w_1,\,2w_2) - I_1(2v_1,\,2v_2) - I_2(2v_1,\,2v_2) - I_3(2v_1,\,2v_2),$$
$$I_0(2v_3,\,2v_4)$$
$$= A_1(2w_3,\,2w_4) - I_1(2v_3,\,2v_4) - I_2(2v_3,\,2v_4) - I_3(2v_3,\,2v_4),$$

so ergibt sich die gesuchte Relation. Auch hier beschränken wir uns darauf die Argumente Null zu setzen. Wir erhalten die einfache Beziehung:

$$(7)\qquad 2(A_1 - I_1 - I_2 - I_3)^2 = \vartheta_3^2\theta_3^2 + \vartheta_0^2\theta_0^2 + \vartheta_2^2\theta_2^2.$$

Es erübrigt nachzuweisen, daß bei Einführung der Invarianten $Z$ sich die Fiedlerschen Gleichungsformen ergeben.

Nun ist für $n = 31$

$$A_1 - I_1 - I_2 - I_3 = (Z_2' + Z_1 + Z_3 - 1)\,\vartheta_3\theta_3,$$

so daß wir die Gleichung erhalten:

$$2(Z_2' + Z_1 + Z_3 - 1)^2\,\vartheta_3^2\theta_3^2 = \vartheta_3^2\theta_3^2 + \vartheta_0^2\theta_0^2 + \vartheta_2^2\theta_2^2.$$

Um die rechte Seite durch die Invarianten auszudrücken, gehen wir von der Beziehung aus:

$$\vartheta_0\theta_0 + \vartheta_2\theta_2 = (Z_2' + 2Z_1 + 2Z_3 - 3)\,\vartheta_3\theta_3.$$

Hieraus folgt durch Quadrieren:

$$(8)\quad \vartheta_3^2\theta_3^2 + \vartheta_0^2\theta_0^2 + \vartheta_2^2\theta_2^2 = [(Z_2' + 2Z_1 + 2Z_3 - 3)^2 + 1 - 2Z_3^2]\,\vartheta_3^2\theta_3^2.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die obige Gleichung ein, *so erhalten wir die Modulargleichung:*

$$(9)\qquad Z_2'^2 - 4Z_1Z_3 = 0.$$

*Es ist das die Gleichung, die auch Fiedler aufstellt.*

Digitized by Google

Im Falle $n = 23$ und $n = 7$ ergeben sich andere Resultate. Die Größe:

$$A_1 - I_1 - I_2 - I_3$$

nimmt die Form an:

$$(Z_1^2 + Z_1 + Z_3 + 1)\,\vartheta_3\theta_3,$$

die Größe:

$$\vartheta_3^3\theta_3^3 + \vartheta_0^3\theta_0^3 + \vartheta_2^3\theta_2^3$$

wird dagegen:

$$(Z_1^2 + 2Z_1 + 2Z_3 + 1)^3 + 1 - 2Z_3^2)\,\vartheta_3^3\theta_3^3.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir die Gleichung:

$$Z_1(Z_1^3 - 4Z_3) = 0.$$

*Für $n = 7$ wird:*

$$Z_1 = 0,$$

*für $n = 23$ dagegen:*

$$Z_1^3 - 4Z_3 = 0.$$

*Es sind das die* FIEDLERschen *Resultate.*

---

Druckfertig erklärt 22. III. 1904.]

Digitized by Google

Digitized by Google

# INHALT.


Seite

*Paul Flechsig*, Einige Bemerkungen über die Untersuchungsmethoden der Großhirnrinde, insbesondere des Menschen. Dem Zentralkomitee für Hirnforschung vorgelegt. Mit 4 Tafeln . 50

*G. Scheffers*, Ein Beitrag zur Geometrie der Berührungstransformationen in der Ebene. Mit 6 Figuren . . . . . 105

*M. Siegfried*, Über Protokyrine. . . . . 117

*Felix Kämpf*, Doppelbrechung in Kundtschen Spiegeln und Doppelbrechung von Metallspiegeln durch Zug . . . . . 123

*Martin Krause*, Zur Transformation der Thetafunktionen . . . 126

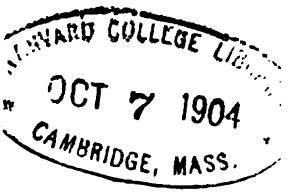


Druck von B. G. Teubner in Leipzig.



Digitized by Google

Z Soc 19.26.9




# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHSUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1904.

# III.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1904.

Digitized by Google

Digitized by Google

OCT 7 1904

# Beiträge zur Theorie der linearen Transformationen,

## als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie.

Dritter Teil.[1])

### Über Gleichungen fünften und sechsten Grades.

Von

W. Scheibner.

1*.

Es ist bereits Art. 16 angedeutet worden, daß die typische Gleichung auch für $m = 5$ und $m = 6$ etwas näher untersucht werden soll. Wir schicken zunächst einige allgemeinere Betrachtungen voraus.

Die assoziierten Kovarianten $h_i$ haben nach Artt. 8 und 15 die Form

$$\begin{aligned} f &= Ax^m + \widehat{m}_1 Bx^{m-1} + \cdots, \\ g &= -h_2 = -\tfrac{1}{2}[ff]_2 = A_1 x^{2m-4} + \cdots, \\ h &= -h_3 = 2[fg] = i_0 x^{3m-6} + \cdots, \\ h_4 &= \tfrac{1}{2}[ff]_4 = Gx^{2m-8} + \cdots, \\ h_5 &= 2[fh_4] = k_0 x^{3m-10} + \cdots, \\ h_6 &= \tfrac{1}{2}[ff]_6 = J_{11} x^{2m-12} + \cdots, \\ &\cdots\cdots \end{aligned}$$

wo wie früher $n = m\mu - 2p$ geschrieben ist und $A_1$, $G$ und $J_{11}$ für $m = 2$, $m = 4$ und $m = 6$ Invarianten bedeuten. Im Übrigen sind die *ersten* Koeffizienten $A A_1 i_0 G k_0 J_{11} \ldots$ unabhängig vom Grade $m$ von $f$ (für $m < i$ würde $h_i$ keine Bedeutung haben), wie aus der Definition der Kovarianten $f_i$ und $h_i$ hervorgeht. In der Tat folgt für $x = 0$

$$f_i(0) = -(i-1)a_{m-1}^i + \widehat{i}_2 a_m a_{m-1}^{i-2} a_{m-2} - \widehat{i}_3 a_m^2 a_{m-1}^{i-3} a_{m-3} \cdots + (-1)^i a_m^{i-1} a_{m-i},$$

1) Siehe Teil I S. 200—237, Teil II S. 322—383 des vorigen Jahrgangs.



Digitized by Google

mithin für den Koeffizienten $b_0$ von $x^n$ in $f_i$:

$$b_0 = a_0^{i-1}a_i - ia_0^{i-2}a_ia_{i-1} \pm \cdots + (-1)^i\{\hat{i}_2 a_0 a_1^{i-1}a_2 - (i-1)a_1^i\},$$

also unabhängig von $m$, und vermöge der zwischen den $f_i$ und $h_i$ bestehenden Relationen überträgt sich der Satz von selbst auf die Koeffizienten der höchsten Potenzen von $x$ in den assoziierten Kovarianten $h_i$.

Diese Eigenschaft kommt auch gewissen anderen Kovarianten zu, aber keineswegs allen, so daß es angezeigt erscheint, zur Unterscheidung eine besondere Benennung zu gebrauchen: es mögen derartige Kovarianten als *permanent*, kürzer als $P$-Kovarianten bezeichnet werden.

Als einfaches Beispiel betrachten wir für $n = 2m-4$ und $l = 4m-12$ die beiden Kovarianten

$$g = -\tfrac{1}{2}[ff]_2 = f_1f_1 - ff_{11} = A_1x^n + nB_1x^{n-1} + \hat{n}_2C_1x^{n-2} + \cdots,$$

und

$$-2[gg]_2 = 4(g_1g_1 - gg_{11}) = b_0x^l + lb_1x^{l-1} + \hat{l}_2b_2x^{l-2} + \cdots,$$

dann findet man leicht

$$A_1 = B^2 - AC, \quad B_1 = \tfrac{1}{2}(BC - AD),$$

$$C_1 = \frac{1}{2(n-1)}\{(m-1)C^2 - 2BD - (m-3)AE\},$$

nebst

$$b_0 = 4(B_1^2 - A_1C_1) = (BC - AD)^2 -$$

$$- \frac{2}{2m-5}(B^2 - AC)\{(m-1)C^2 - 2BD - (m-3)AE\}.$$

Während $A_1$ und $B_1$ von $m$ unabhängig sind, nimmt $b_0$ mit $C_1$ verschiedene Werte an: für $m=3$ wird $b_0 = J$, für $m=4$ folgt

$$b_0 = \tfrac{1}{8}(3A^2D^2 - 2A^2CE + 2AB^2E - 10ABCD +$$

$$+ 6AC^3 + 4B^3D - 3B^2C^2),$$

usw. Die Kovariante $[gg]_2$ gehört also *nicht*, wie $g$ zu den permanenten.

Dagegen ist man berechtigt, eine $P$-Kovariante von der Form

$$j = Jx^l + lJ_1x^{l-1} + \hat{l}_2J_2x^{l-2} + \cdots$$

zu bilden, indem man die Koeffizienten $J_k$ durch die Differentialgleichungen des Art. 8 aus $J$ ableitet. Denn da nicht allein

$$\mathrm{S}\, i a_{i-1}\frac{\partial b_0}{\partial a_i} = 0, \text{ sondern auch } (l-k)b_{k+1} = \mathrm{S}\,(m-i)a_{i+1}\frac{\partial b_k}{\partial a_i},$$

Digitized by Google

so hat man

$$\mathrm{S} i a_{i-1} \frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 \quad \text{und} \quad (l-k) J_{k+1} = \mathrm{S}(m-i) a_{i+1} \frac{\partial J_k}{\partial a_i}.$$

Cayley bezeichnet derartige von $m$ unabhängige Koeffizienten $b_0 = J$ als *Semiinvarianten*.

Auch der Hermite'sche Satz gibt das Mittel an die Hand, um die Kovariante $j$ zu finden. Denn da nach Art. 15 aus der Formel $b_n = F(a_0 a_1 .. a_m)$ folgt

$$b_0 = (-1)^p F(a_m a_{m-1} .. a_0) = \mathfrak{F}(a_0 a_1 .. a_{m-1} a_m),$$

so ergibt sich für die Kovariante $g = b_0 x^n + \cdots$ die Gleichung

$$f^{p-\mu} g x = \mathfrak{F}(1\,0\, f_2 .. f_m),$$

oder nach Einführung der $h_i$:

$$f^{p-\mu} g x = \Phi(f h_2 h_3 .. h_m).$$

Die Kovariante $\Phi$ ist also durch $f^{p-\mu}$ teilbar und für die höchste Potenz von $x$ hat man

$$A^{p-\mu} b_0 = \Phi(A A_1 i_0 G k_0 J_{,,} . .).$$

Wenden wir dies auf die gesuchte Kovariante

$$j = J x^{4m-12} + \cdots$$

an, so folgt wegen

$$b_0 = J = A^2 D^2 - 6 A B C D + 4 A C^3 + 4 B^3 D - 3 B^2 C^2,$$

$$f^2 j = f_2^2 + 4 f_2^3 = h^3 - 4 g^3 \quad \text{nebst} \quad A^2 J = i_0^3 - 4 A_1^3.$$

Die Differenz $4g^3 - h^2$ besitzt also den Faktor $f^2$. Etwas allgemeiner werden die Ausdrücke

$$\varphi_i = (2i-1) f_i^2 + (i-1)^2 f_{2i} \quad \text{und} \quad \psi_i = i^i f_i^{i+1} + (i-1)^{i+1} f_{i+1}^i$$

durch $f^2$ teilbar. Auch stellt sich heraus, daß die Kovarianten von den Gewichten 7 und resp. 10

$$h_2 h_5 - h_3 h_4 = f f_0 \quad \text{und} \quad h_5^2 + 4 h_2 h_4^2 = f \mathfrak{f}$$

durch $f$ teilbar sind, mithin drücken für $m > 4$ auch

$$f_0 = A_0 x^{4m-14} + \cdots \quad \text{und} \quad \mathfrak{f} = \mathfrak{A} f^{5m-20} + \cdots$$

permanente Kovarianten aus, für welche

$$A A_0 = G i_0 - A_1 k_0 \quad \text{und} \quad A \mathfrak{A} = k_0^2 - 4 A_1 G^2$$

werden.



Digitized by Google

2*.

In analoger Weise bestimmt man die permanente Kovariante

$$j_1 = Hx^{3m-12} + \cdots,$$

welche für $m = 4$ die Invariante

$$H = -\tfrac{1}{3}[fg]_4 = ACE - AD^2 - B^2E + 2BCD - C^3 = \begin{vmatrix} A & B & C \\ B & C & D \\ C & D & E \end{vmatrix}$$

darstellt.[1]) Daraus entspringt die Gleichung

$$f^3 j_1 = f_2 f_4 - f_3^2 = 4g^3 - h^2 - f^2 g h_4$$

oder

$$4g^3 - h^2 = f^2(fj_1 + gh_4),$$

und durch Verbindung mit dem Ausdruck für $f^2 j$:

$$j + fj_1 + gh_4 = 0 \quad \text{nebst} \quad J + AH + A_1 G = 0.$$

Für $m = 4$ und $j = -g_4$ folgt hieraus wie Art. 20

$$g_4 = fH + gG = -Jx^4 + \cdots$$

Auf demselben Wege ergeben sich für $m = 5$ die $P$-Kovarianten:

$$j = -g_8, \quad j_1 = g_3, \quad h_4 = g_2,$$
$$g_8 = fg_3 + gg_2 = -Jx^8 + \cdots,$$

sowie für $m = 6$ die $P$-Kovarianten:

$$j = -g_{12}, \quad j_1 = g_6, \quad h_4 = g_4,$$
$$g_{12} = fg_6 + gg_4 = -Jx^{12} + \cdots.$$

Man kann die vorstehende Gleichung

$$4g^3 - h^2 = -f^2 j = f^2(fj_1 + gh_4)$$

sowohl wie bei der kubischen Gleichung in der Form schreiben:

$$g^3 = \tfrac{1}{4}(h^2 - f^2 j) = \frac{h + f\sqrt{j}}{2} \cdot \frac{h - f\sqrt{j}}{2},$$

als wie bei der biquadratischen Gleichung in der Form:

$$h^2 = 4g^3 - f^2 g h_4 - f^3 j = 4 \prod (g - \lambda f)$$

wenn

$$4\lambda^3 = h_4 \lambda + j_1$$

---

1) $[fg]_4$ ist so wenig wie $[gg]_2$ eine permanente Kovariante.

Digitized by Google

gesetzt wird. Es folgt daraus dem Früheren analog

$$\Pi(v - g + \lambda f) = v^3 - 3gv^2 + (3g^2 - \tfrac{1}{4}f^2h_4)v - \tfrac{1}{4}h^2,$$

und neben dem Produkt

$$\Pi\sqrt{g - \lambda f} = \tfrac{1}{2}h$$

genügt die Summe

$$\Sigma\sqrt{g - \lambda f} = z$$

der biquadratischen Gleichung

$$z^4 = 6gz^2 + 4hz + 3g^2 - f^2h_4.$$

Allein man darf jetzt nicht mehr daraus schließen, daß weil das Produkt der Faktoren $\left\{\frac{h \pm f\sqrt{j}}{2}\right\}^{\frac{1}{3}}$ und das Produkt der Faktoren $\sqrt{g - \lambda f}$ eine ganze Funktion von $x$ darstellt, das Gleiche von den einzelnen Faktoren gelte. Vielmehr wird im ersteren Falle durch $\sqrt{j}$ jeder der beiden Faktoren irrational, während im zweiten mit $\lambda$ schon $g - \lambda f$ eine irrationale Funktion von $x$ ausdrückt. Wollte man dafür die Form eines Quadrates herbeiführen, so würde man etwa

$$g - \lambda f = (p\lambda^2 + 2q\lambda + r)^2$$

zu setzen und $pqr$ als (irrationale) Funktionen von $x$ durch die Gleichungen zu bestimmen haben:

$$\tfrac{1}{4}p^2h_4 + 2pr + 4q^2 = 0,$$

$$\tfrac{1}{2}p^2j_1 + pqh_4 + 4qr + f = 0,$$

und

$$pqj_1 + r^2 - g = 0.$$

Später werden wir noch für $m = 5$ die Invariante

$$K = -2[h_4h_4]_2,$$

sowie für $m = 6$ die Kovariante

$$g_2 = l_0x^2 + l_1x + l_2 = \tfrac{1}{2}[fh_4]_4,$$

nebst der Invariante

$$L = [fj_1]_6 = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & E \\ C & D & E & F \\ D & E & F & G \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{L} = 6[h_4h_4]_4$$

Digitized by Google

zu betrachten haben, um die permanenten Kovarianten abzuleiten:

$$j_2 = Kx^{4m-20} + \cdots$$

$$j_3 = l_0 x^{3m-16} + \cdots$$

und

$$j_4 = Lx^{4m-24} + \cdots$$

## 3*.

Symmetrische Funktionen der Wurzeldifferenzen, welche Kovarianten mit den gegebenen Maßzahlen darstellen, lassen sich ohne Schwierigkeit konstruieren.[1]) Da dies aber nicht ausreicht, um, auch abgesehen von einem numerischen Faktor, deren Identität in Anspruch zu nehmen, so sind nachstehend bei den eine weitere Prüfung erheischenden Gleichungen die betreffenden Kovarianten mit Klammern versehen worden:

$$g = \frac{1}{2m\widehat{m}_2} A^2 \sum_{\widehat{m}_2} (x_0 - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 \cdots (x - x_{m-1})^2,$$

$$h = \frac{1}{3m^2\widehat{m}_3} A^3 \sum_{6\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)(x - x_1)(x - x_3)^2 (x - x_3)^3 \cdots (x - x_{m-1})^3$$

$$= \frac{1}{2m^2\widehat{m}_4} A^3 \sum_{4\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \times$$

$$\times (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^3 \cdots (x - x_{m-1})^3,$$

---

1) Hierbei wird man sich namentlich zu versichern haben, daß die symmetrischen Summen nicht etwa identisch verschwinden. Dies kann z. B. durch einen Faktor $x_i - x_k$ herbeigeführt werden, der bei Vertauschung von $i$ und $k$ in den entgegengesetzten Wert übergeht, zuweilen aber ist die gegenseitige Aufhebung der Summenglieder weniger leicht zu übersehen. So könnte man beispielsweise versucht sein, für $m = 4$ eine Kovariante konstruieren zu wollen von der Form

$$g_2 = A^2 \sum_{12} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x - x_3)^2,$$

oder für $m = 6$ eine sogenannte „*schiefe*" Invariante vom *ungeraden* Gewicht 9:

$$J_{111} = A^3 \sum_{30} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_1 - x_2)(x_3 - x_4)(x_5 - x_0),$$

Ausdrücke, die sich gleichwohl bei näherer Betrachtung als verschwindend herausstellen.

Digitized by Google

$$h_4 = \frac{1}{4\widehat{m}_2\widehat{m}_4} A^2 \sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x - x_4)^2 \ldots (x - x_{m-1})^2$$

$$= \frac{1}{2\widehat{m}_2\widehat{m}_4} A^2 \sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0)(x - x_4)^2 \ldots (x - x_{m-1})^2,$$

$$(h_5) = * A^3 \sum_{60\widehat{m}_5} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_4) \times$$
$$\times (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)^2 (x - x_5)^3 \ldots (x - x_{m-1})^3,$$

$$= * A^3 \sum_{60\widehat{m}_5} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)(x_2 - x_4)(x_3 - x_5) \times$$
$$\times (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)^2 (x - x_4)^2 (x - x_5)^2 (x - x_6)^3 \ldots (x - x_{m-1})^3,$$

$$(h_6) = * A^3 \sum_{15\widehat{m}_6} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2 (x - x_6)^2 \ldots (x - x_{m-1})^2$$

$$= * A^3 \sum_{60\widehat{m}_6} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_0) \times$$
$$\times (x - x_6)^2 \ldots (x - x_{m-1})^2,$$
$$\ldots\ldots .^{1})$$

Um zu prüfen, ob die gegebenen Ausdrücke permanente Kovarianten darstellen, vergleichen wir die Koeffizienten der höchsten Potenzen von $x$ und verifizieren zunächst die Gleichung

$$A_1 = c_m A^2 \sum_{\widehat{m}_2} (x_0 - x_1)^2.$$

Man erhält leicht wegen $B = -\frac{1}{m} A \, \mathrm{S}\, x_0$, $C = \frac{1}{\widehat{m}_2} A \, \mathrm{S}\, x_0 x_1$:

$$A_1 = A^2 \{ \tfrac{1}{m^2} (\mathrm{S}\, x_0)^2 - \tfrac{1}{\widehat{m}_2} \mathrm{S}\, x_0 x_1 \} = A^2 \{ \tfrac{1}{m^2} \mathrm{S}\, x_0^2 - \tfrac{1}{m\widehat{m}_2} \mathrm{S}\, x_0 x_1 \},$$

neben

$$\sum_{\widehat{m}_2} (x_0 - x_1)^2 = (m-1) \mathrm{S}\, x_0^2 - 2 \, \mathrm{S}\, x_0 x_1.$$

---

1) In der Abhandlung des vorigen Jahrgangs dieser Berichte S. 349, Z. 8 und resp. Z. 2 v. u. sind die Gleichungen hinzuzufügen:

$$G = \tfrac{1}{3} \mathrm{S}\, \mu^2 = -\tfrac{1}{12} A^2 \mathrm{S}\, \varpi' \varpi'' = \tfrac{1}{12} A^2 \sum_{8} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0),$$

und

$$h = \tfrac{1}{192} A^3 \sum_{24} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)(x - x_1)(x - x_2)^2 (x - x_3)^3.$$

Auch mag bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, daß am Schlusse des Art. 5 (S. 213 des vor. Bandes) der Satz ausgefallen ist: „Vielmehr wird eine simultane Kovariante von $f$ und $g$ nur dann Kovariante von $f$ allein, wenn $g$ als Kovariante von $f$ gegeben ist; hat $g$ das Gewicht $p$, so wächst dadurch das Gewicht $q$ um $p\nu$."

Digitized by Google

Damit folgt für beliebige Werte von $m$ im Ausdruck für $g$:

$$c_m = \frac{1}{2m\widehat{m}_2}.$$

Für die Kovariante $h$ wird die Gleichung

$$i_0 = c'_m A^3 \sum_{6\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2) = c''_m A^3 \sum_{4\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3)$$

zu untersuchen sein. Offenbar hat man

$$i_0 = A^3 \left\{ \frac{2}{m^3} (\mathrm{S}\, x_0)^3 - \frac{3}{m\widehat{m}_2} \mathrm{S}\, x_0 \mathrm{S}\, x_0 x_1 + \frac{1}{\widehat{m}_3} \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 \right\}$$

$$= A^3 \left\{ \frac{2}{m^3} \mathrm{S}\, x_0^3 - \frac{3}{m^2\widehat{m}_2} \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 + \frac{4}{m^2\widehat{m}_3} \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 \right\},$$

$$\sum_{6\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2) = (m-1)(m-2)\, \mathrm{S}\, x_0^3 - \\ - 3(m-2)\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 + 12\, \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2,$$

$$\sum_{4\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) = \tfrac{1}{6}(m-1)(m-2)(m-3)\, \mathrm{S}\, x_0^3 - \\ - \tfrac{1}{2}(m-2)(m-3)\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 + 2(m-3)\, \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2,$$

mithin

$$c'_m = \frac{1}{3m^2\widehat{m}_3}, \qquad c''_m = \frac{1}{2m^2\widehat{m}_4}.$$

Für die Kovariante $h_4$ erhält man analog:

$$G = c'_m A^2 \sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 = c''_m A^2 \sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0),$$

wo

$$G = A^2 \left\{ \frac{3}{\widehat{m}_2^2} (\mathrm{S}\, x_0 x_1)^2 - \frac{4}{m\widehat{m}_3} \mathrm{S}\, x_0 \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 + \frac{1}{\widehat{m}_4} \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 x_3 \right\}$$

$$= A^2 \left\{ \frac{3}{\widehat{m}_2^2} \mathrm{S}\, x_0^2 x_1^2 - \frac{2}{\widehat{m}_2 \widehat{m}_3} \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 x_2 + \frac{3}{\widehat{m}_2 \widehat{m}_4} \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 x_3 \right\},$$

$$\sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 = (m-2)(m-3)\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1^2 - \\ - 2(m-3)\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 x_2 + 12\, \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 x_3,$$

$$\sum_{3\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0) = \tfrac{1}{2}(m-2)(m-3)\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1^2 - \\ - (m-3)\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 x_2 + 6\, \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 x_3,$$

$$c'_m = \frac{1}{4\widehat{m}_2 \widehat{m}_4}, \qquad c''_m = \frac{1}{2\widehat{m}_2 \widehat{m}_4}.$$

Digitized by Google

4*.

Die permanenten Kovarianten $g\ h\ h_4$ .. sind hierdurch auf symmetrische Summen der Wurzeldifferenzen zurückgeführt. Es fragt sich jetzt, ob die Gleichungen

$$m = 3: \quad J = -\tfrac{1}{27} A^4 (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_0)^2,$$

$$m = 4: \quad H = \tfrac{1}{432} A^3 \sum_6 (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3),$$

$$m = 5: \quad K = -\tfrac{1}{1250} A^4 \sum_{10} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_2)^2$$

$$= -\tfrac{1}{1250} A^4 \sum_{10} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_0)^2,$$

$$m = 6: \quad l_0 = * A^3 \sum_{45} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3),$$

$$L = * A^4 \sum_{15} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^4 (x_4 - x_5)^4$$

$$= * A^4 \sum_{45} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_5 - x_2)^2$$

$$= * A^4 \sum_{60} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_5 - x_0)^2,$$

in ähnlicher Weise verallgemeinert werden können, um dadurch Ausdrücke für die *permanenten* Kovarianten $j\ j_1\ j_2\ j_3\ j_4$ zu gewinnen. Die Gewichte sind $p = 6,\ 6,\ 10,\ 8,\ 12$, während $J\ H\ K\ L$ Invarianten bedeuten. Die Formeln für $J$ und $H$ ergeben jedoch, daß ihre Gültigkeit schon für $m > 3$ resp. $m > 4$ aufhört.

Dies zu zeigen beschränken wir uns der Einfachheit halber auf die Fälle $D = 0$ resp. $E = 0$, wodurch

$$J = 4AC^3 - 3B^2C^2 = A^4 \{ \tfrac{4}{\widehat{m}_2^3} (\mathrm{S}\, x_0 x_1)^3 - \tfrac{3}{m^2 \widehat{m}_2^2} (\mathrm{S}\, x_0)^2 (\mathrm{S}\, x_0 x_1)^2 \},$$

und

$$H = 2BCD - AD^2 - C^3 =$$

$$= A^3 \{ \tfrac{2}{m \widehat{m}_2 \widehat{m}_3} \mathrm{S}\, x_0\, \mathrm{S}\, x_0 x_1\, \mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2 - \tfrac{1}{\widehat{m}_3^2} (\mathrm{S}\, x_0 x_1 x_2)^2 - \tfrac{1}{\widehat{m}_2^3} (\mathrm{S}\, x_0 x_1)^3 \}.$$

Sollen nun $J$ und $H$ ausgedrückt werden durch

$$J = c_m A^4 \sum_{\widehat{m}_6} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_0)^2,$$

Digitized by Google

und

$$H = c'_m A^3 \sum_{6\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3),$$

so kann man mit $D$ auch die folgenden Koeffizienten $EF\ldots$ verschwinden lassen, oder $x_2 = x_3 \cdots = x_{m-1} = 0$ setzen. Dann wird

$$J = \frac{A^4}{\widehat{m}_2^2}\left\{4x_0^3x_1^3 - \frac{3\widehat{m}_2}{m^2}(x_0 + x_1)^2 x_0^2 x_1^2\right\} = c_m A^4 (m-2)(x_0 - x_1)^2 x_0^2 x_1^2,$$

und hier erhält man für $m = 3$ $c_3 = -\frac{1}{27}$, während für $m > 3$ ein widersprechendes Resultat hervorgeht.

Wir schließen daraus, daß die durch die symmetrische Summe

$$c_m A^4 \sum_{\widehat{m}_3} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_0)^2 (x - x_3)^4 \ldots (x - x_{m-1})^4$$

definierte Kovariante nur für $m = 3$ den ersten Koeffizienten $J$ hat, also nicht permanent sein kann. Da wie früher nachgewiesen, die Kovariante $-2[gg]_2$ mit den gleichen Maßzahlen sich ganz analog verhält, so könnte man an eine Identität beider denken, allein der oben bestimmte Koeffizient $b_0$ reduziert sich für $D = E = 0$ auf

$$B^2C^2 - \frac{2m-2}{2m-5} C^2(B^2 - AC) =$$
$$= \frac{A^4}{(2m-5)\widehat{m}_2^2}\left\{2(m-1)x_0^3x_1^3 - \frac{3\widehat{m}_2}{m^2}(x_0 + x_1)^2 x_0^2 x_1^2\right\},$$

führt also gleichfalls nur für $m = 3$ auf einen widerspruchsfreien Wert von $c_m$.

Für Kovarianten mit dem ersten Koeffizienten $H$ läßt sich mit dem gleichen Erfolge der entsprechende Nachweis führen, wenn man

$$0 = E = F \ldots \quad \text{oder} \quad x_3 = x_4 \cdots = x_{m-1} = 0$$

setzt. Denn dann wird

$$H = A^3\left\{\frac{2}{m\widehat{m}_2\widehat{m}_3} x_0x_1x_2 \mathrm{S}\, x_0 \mathrm{S}\, x_0x_1 - \frac{1}{\widehat{m}_2^3} x_0^2x_1^2x_2^2 - \frac{1}{\widehat{m}_2^3}(\mathrm{S}\, x_0x_1)^3\right\}$$
$$= \frac{1}{18\widehat{m}_2\widehat{m}_3^2} A^3\left\{6(m-1)(m-2)x_0x_1x_2 \mathrm{S}\, x_0 \mathrm{S}\, x_0x_1 - \right.$$
$$\left. - 9m(m-1)x_0^3x_1^3x_2^2 - 2(m-2)^2(\mathrm{S}\, x_0x_1)^3\right\},$$

Digitized by Google

während zugleich

$$H = c'_m A^3 \sum_{6\,\widehat{m}_4} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3)$$

$$= (m-3)\, c'_m A^3 \{ \mathrm{S}(x_0 - x_1)^2 x_2^2 (2x_0x_1 - x_0x_2 - x_1x_2) - (m-4)\, \mathrm{S}\, x_0^3 x_1^3 \}$$

sein soll. Substituiert man die Werte

$$(\mathrm{S}\, x_0 x_1)^3 = \mathrm{S}\, x_0^3 x_1^3 + 3 x_0 x_1 x_2\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 + 6 x_0^2 x_1^2 x_2^2,$$

$$\mathrm{S}(x_0 - x_1)^2 x_2^2 (2x_0x_1 - x_0x_2 - x_1x_2) = 3 x_0 x_1 x_2\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 - 12 x_0^2 x_1^2 x_2^2 - 2\, \mathrm{S}\, x_0^3 x_1^3,$$

so folgt

$$H = \frac{1}{18\,\widehat{m}_2 \widehat{m}_3^2} A^3 \{ 6(m-2) x_0 x_1 x_2\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 - 2(m-2)^2\, \mathrm{S}\, x_0^3 x_1^3 - 3(m^2 - m + 4) x_0^2 x_1^2 x_2^2 \},$$

neben

$$H = (m-3) c'_m A^3 \{ 3 x_0 x_1 x_2\, \mathrm{S}\, x_0^2 x_1 - (m-2)\, \mathrm{S}\, x_0^3 x_1^3 - 12 x_0^2 x_1^2 x_2^2 \},$$

mithin

$$c'_m = \frac{1}{72\,\widehat{m}_2 \widehat{m}_3 \widehat{m}_4} \{ 2(m-2) = \tfrac{1}{4}(m^2 - m + 4) \},$$

und diese Gleichung enthält nur für

$$m = 4, \quad c'_4 = \tfrac{1}{432} \quad \text{und} \quad m = 5, \quad c'_5 = \tfrac{1}{6000}$$

keinen Widerspruch.

## 5*.

## Die Gleichungen fünften Grades.

Wir gehen zunächst über zu dem Falle

$m = 5$ und erhalten für $z = \dfrac{f}{x-y} - f_1, \quad y = x - \dfrac{f}{z + f_1}$:

$$(x-y)z = (Ax^4 + 4Bx^3 + 6Cx^2 + 4Dx + E)y + (Bx^4 + 4Cx^3 + 6Dx^2 + 4Ex + F),$$

$$f^4 x f y = (x-y)^5 (z^5 + 10 f_2 z^3 + 10 f_3 z^2 + 5 f_4 z + f_5).$$

Setzt man aber

$$fy = Ay^5 + 5By^4 + 10Cy^3 + 10Dy^2 + 5Ey + F = 0,$$

Digitized by Google

so wird

$$s = (Ay+B)x^3+(Ay^2+5By+4C)x^2-(4D+5\frac{E}{y}+\frac{F}{y^2})-E-\frac{F}{y},$$

sowie

$$s^5 + 10f_2s^3 + 10f_3s^2 + 5f_4s + f_5 = 0,$$

oder wenn die Potenzsummen $\sigma_k = \mathfrak{S}_i s_i^k$ eingeführt werden:

$$s^5 = \tfrac{1}{2}\sigma_2 s^3 + \tfrac{1}{3}\sigma_3 s^2 + \tfrac{1}{4}(\sigma_4 - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2) + \tfrac{1}{5}(\sigma_5 - \tfrac{5}{6}\sigma_2\sigma_3).$$

Hier hat man

$$f_2 = h_2 = \tfrac{1}{2}[ff]_2 = ff_{11} - f_1^2, \quad \text{und für } f_2 = -g:$$

$$g = A_1x^6 + 6B_1x^5 + 15C_1x^4 + 20D_1x^3 + 15E_1x^2 + 6F_1x + G_1$$

$$= \tfrac{1}{100}A^2\sum_{10}(x_0-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)^2(x-x_4)^2,$$

eine Kovariante vom Grade 6, Dimension und Gewicht 2, deren Koeffizienten durch die Ausdrücke gegeben sind:

$$A_1 = B^2 - AC, \qquad E_1 = \tfrac{1}{5}(2D^2 - CE - BF)$$

$$B_1 = \tfrac{1}{2}(BC - AD), \qquad F_1 = \tfrac{1}{2}(DE - CF)$$

$$C_1 = \tfrac{1}{5}(2C^2 - BD - AE), \quad G_1 = E^2 - DF$$

$$D_1 = \tfrac{1}{20}(8CD - 7BE - AF).$$

Ferner wird

$$f_3 = h_3 = 2[fh_2] = -f_1^3 + 3ff_1f_{11} - f^2f_{111},$$

und wenn $h = 2[fg]$, also $f_3 = -h$:

$h = i_0x^9 + \cdots$, Grad 9, Dimension und Gewicht 3,

$$= \tfrac{1}{250}A^3\sum_{30}(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)(x-x_1)^2(x-x_2)^2(x-x_3)^2(x-x_4)^3$$

$$= \tfrac{1}{750}A^3\sum_{60}(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)(x-x_1)(x-x_2)^2(x-x_3)^3(x-x_4)^3,$$

$$i_0 = 3ABC - A^2D - 2B^3, \quad h(0) = 2E^3 - 3DEF + CF^2.$$

Weiter folgt

$$f_4 = f^2h_4 - 3h_2^2,$$

$$h_4 = \tfrac{1}{2}[ff]_4 = ff_{1111} - 4f_1f_{111} + 3f_{11}f_{11} = g_2,$$

Digitized by Google

$g_2 = Gx^2 + G'x + G''$, Grad und Dimension 2, Gewicht 4,

$$= \tfrac{1}{200} A^2 \sum_{15} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x - x_4)^2$$

$$= \tfrac{1}{100} A^2 \sum_{15} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0)(x - x_4)^2,$$

$$G = AE - 4BD + 3C^2, \quad G' = AF - 3BE + 2CD,$$

$$G'' = g(0) = BF - 4CE + 3D^2;$$

endlich

$$f_5 = f^2 h_5 - 2 h_3 h_3,$$

$$h_5 = 2[f h_4] = -f^2 f_{\text{V}} + 5 f f_{,} f_{\text{IV}} - 2 f f_{,,} f_{,,,} - 8 f_{,}^2 f_{,,,} + 6 f_{,} f_{,,}^2,$$

$$g_5 = 2[f g_2] = h_5 = k_0 x^5 + \cdots$$

$$= * A^3 \sum_{60} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_4)(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)^2,$$

Dimension 3, Grad und Gewicht 5, nebst

$$k_0 = A^2 F - 5ABE + 2ACD + 8B^2 D - 6BC^2,$$

$$g_5(0) = -AF^2 + 5BEF - 2CDF - 8CE^2 + 6D^2 E.$$

Die *typische* Gleichung für $s$ nimmt nunmehr die Gestalt an:

$$s^5 = 10 g s^3 + 10 h s^2 + 5(3g^2 - f^2 g_2) s + 2gh - f^2 g_5,$$

mit der Diskriminante $f^{12} D_5(f)$, während die Potenzsummen die Werte bekommen:

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 20 g, \quad \sigma_3 = 30 h,$$

$$\sigma_4 = 20(13 g^2 - f^2 g_2), \quad \sigma_5 = 5(102 gh - f^2 g_5),$$

$$\sigma_6 = 100(29 g^3 + 3h^2 - 3 f^2 g g_2),$$

$$\sigma_7 = 70(117 g^2 h - 5 f^2 g_2 h - f^2 g g_5),$$

$$\sigma_8 = 20(1645 g^4 + 408 g h^2 - 230 f^2 g^2 g_2 - 4 f^2 g_5 h + 5 f^4 g_2^2),$$

. . . . . .

6*.

Man kann nun die Invariante zu $g_2$ berechnen:

$$J_{\text{IV}} = G'G' - 4GG'' = -2[g_2 g_2]_2 = j_2 = K,$$

Dimension 4, Gewicht 10, und erhält

Digitized by Google

$$K = A^2F^2 - 10ABEF + 4ACDF + 16ACE^2 - 12AD^2E +$$
$$+ 16B^2DF + 9B^2E^2 - 12BC^2F - 76BCDE +$$
$$+ 48BD^3 + 48C^3E - 32C^2D^2$$
$$= -\frac{1}{1250}A^4\sum_{10}(x_0-x_1)^2(x_1-x_2)^2(x_2-x_3)^2(x_3-x_4)^2(x_4-x_0)^2$$
$$= -\frac{1}{1250}A^4\sum_{10}(x_0-x_1)^4(x_2-x_3)^2(x_3-x_4)^2(x_4-x_2)^2.$$

Diese Formel liefert nach dem Hermite'schen Satze

$$f^6J_{IV} = f_5^2 + 4f_2f_3f_5 + 16f_2f_4^2 - 12f_3^2f_4 + 48f_2^2f_4 - 32f_2^2f_3^2,$$

welcher Ausdruck jedoch nicht unwesentlich vereinfacht werden kann. Dies geschieht zunächst durch die Einführung der Werte $h_i$ oder $gg_2g_3h$, wodurch der gemeinschaftliche Faktor $f^2$ wegfällt, so daß

$$f^4J_{IV} = f^2g_5^2 - 16f^2gg_2^2 + 48g^3g_2 - 12g_2h^2.$$

Da aber auch hier das Aggregat der beiden letzten Glieder durch $f^2$ teilbar sein muß, so dürfen wir durch die Gleichung

$$4g^3 - h^2 = f^2g_8$$

eine neue Kovariante vom Grad 8, Dimension 4, Gewicht 6:

$$g_8 = -Jx^8 + \cdots = -j$$

einführen, den Resultaten des Art. 2* entsprechend. Damit wird

$$f^2K = f^2J_{IV} = g_5^2 - 16gg_2^2 + 12g_2g_8,$$

nebst

$$A^2K = k_0^2 - 16A_1G^2 - 12GJ.$$

Weitere Invarianten werden durch die symmetrischen Summen

$$J_{VIII} = A^8\sum_{60}(x_0-x_1)^6(x_2-x_3)^4(x_2-x_4)^3(x_3-x_4)^3(x_1-x_4)^2(x_0-x_2)(x_0-x_3)$$

$$J_{XII} = A^{12}\sum_{60}(x_0-x_1)^8(x_2-x_3)^6(x_2-x_4)^4(x_3-x_4)^4(x_1-x_4)^4(x_0-x_2)^2(x_0-x_3)^2$$

$$J_{XVIII} = A^{18}\sum_{120}(x_0-x_1)^{12}(x_2-x_3)^{10}(x_1-x_4)^6(x_3-x_4)^6(x_2-x_4)^5 \times$$
$$\times (x_0-x_2)^3(x_0-x_3)^3(x_0-x_4)$$

definiert und sind von den Dimensionen 8, 12 und 18 nebst den Gewichten 20, 30 und 45, so daß die Produkte $f^{12}J_{VIII}$, $f^{18}J_{XII}$ und $f^{27}J_{XVIII}$ ganzen Funktionen der $f_i$ oder $h_i$ gleich werden. $J_{XVIII}$ bezeichnet dann die sogen. *schiefe* Invariante von

Digitized by Google

Hermite, und ihr Quadrat ist durch $J_{IV}$, $J_{VIII}$ und $J_{XII}$ rational ausdrückbar.

Wir bilden jetzt für unsere Funktion $f$ vom 5. Grade die Kovariante $j_1 = g_3$ vom Grade und Dimension 3, Gewicht 6, welche durch

$$g_3 = -\tfrac{5}{12}[fg]_4 = -\tfrac{1}{5}[fg_2]_2 = Hx^3 + H'x^2 + H''x + H'''$$

$$? = \tfrac{1}{6000} A^3 \sum_{30} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3)(x - x_4)^3$$

gegeben ist, wo

$$H = ACE - AD^2 - B^2E + 2BCD - C^3,$$

$$H' = ACF - ADE - B^2F + BCE + BD^2 - C^2D,$$

$$H'' = ADF - AE^2 - BCF + BDE + C^2E - CD^2,$$

$$H''' = g_3(0) = BDF - BE^2 - C^2F + 2CDE - D^3.$$

Damit erhält man sogleich, wie bereits Art. 2* angegeben,

$$4g^3 - h^2 = f^2(fg_3 + gg_2) = f^2 g_3,$$

und wenn man in dem oben entwickelten Werte von $f^2 J_{IV}$ $g_3$ durch $g_3$ eliminiert:

$$f^2 J_{IV} = 12 f g_2 g_3 - 4 g g_2^2 + g_5^2,$$

mithin auch

$$A^2 K = 12 AGH - 4 A_1 G^2 + k_0^2,$$

und $g_5^2 - 4 g g_2^2$ wird durch $f$ teilbar. Schreibt man daher wie Art. 1*

$$g_5^2 - 4 g g_2^2 = f\mathfrak{f} = f\mathfrak{g}_5,$$

so wird $\mathfrak{g}_5 = \mathfrak{A}x^5 + \cdots$ eine Kovariante vom Gewicht 10, Grad und Dimension 5, nebst

$$k_0^2 - 4 A_1 G^2 = A\mathfrak{A},$$

$$fK = \mathfrak{g}_5 + 12 g_2 g_3 \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} = AK - 12 GH.$$

Die Kovariante $g_3$ kann man benutzen zur Aufstellung der zugehörigen Invariante $J$ oder

$$J_{XII} = 27 H^2 H'''^2 - 18 HH' H'' H''' + 4 HH''^3 + 4 H'^3 H''' - H'^2 H''^2,$$

die in Bezug auf $f$ auf die Dimension 12 und das Gewicht 30 steigt, und deren 228 Glieder von Faà di Bruno; S. 318 der *Einleitung in die Theorie der binären Formen* (in der Bearbeitung

Digitized by Google

von Noether-Walter), entwickelt worden sind. Für $B = D = 0$ reduziert sich der Ausdruck der Invariante auf die elf Glieder:

$$27C^{10}F^2 - 4C^9E^3 + 16AC^7E^4 - 72AC^8EF^2 - 24A^2C^6E^5 + \\ + 62A^2C^6E^2F^2 + 16A^3C^6E^3 - 16A^3C^4E^3F^2 - \\ - 4A^3C^5F^4 - 4A^4CE^7 - A^4C^2E^4F^1.$$

7*.

Kennt man eine Kovariante von der Form

$$g_4 = A'x^4 + 4B'x^3 + 6C'x^2 + 4D'x + E'$$

$$= *A^4 \sum_{10} (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_0)^2 (x_3 - x_4)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^2$$

$$= *A^4 \sum_{15} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2)^2 (x_1 - x_3)^2 (x_2 - x_3)^2 (x - x_4)^4,$$

Grad 4, Dimension 4, Gewicht 8, so werden die Invarianten

$$J_{VIII} = A'E' - 4B'D' + 3C'C' \quad \text{und}$$

$$J_{XII} = A'C'E' - A'D'^2 - B'^2E' + 2B'C'D' - C'^3$$

Invarianten von $f$ mit den Dimensionen 8 und 12 und den Gewichten 20 und 30. Die Ausdrücke $3[fg_3]_2$ und $2[gg_2]_2$ liefern solche Kovarianten vierten Grades, und man überzeugt sich ohne Schwierigkeit von der Relation

$$g_4 = 3[fg_3]_2 = 2[gg_2]_2 - \tfrac{3}{5}g_2g_2.$$

Hier folgt für $x = 0$:

$$3[fg_3]_2^0 = E' = 3DH''' - 2EH'' + FH' \quad \text{und}$$

$$2[gg_2]_2^0 = E_1G'' - F_1G' + G_1G, \qquad \text{mithin}$$

$$g_4(0) = 4BD^2F - 5BDE^2 - 3D^4 - 4C^2DF + 8CD^2E - \\ - 3ADEF + 3BCEF + 2AE^3 - 2C^2E^2 + ACF^2 - B^2F^2,$$

folglich

$$f^4g_4 = 4f_2^2f_4 - 3f_2^4 - 4f_2f_3^2 + f_3f_5 - f_4^2 \\ = 10f^2g^2g_2 - f^4g_2^2 - 24g^4 - f^2g_5h + 6gh^2.$$

Durch Elimination von $h^2$ (wobei freilich $h$ nicht wegfällt) ergibt sich

$$f^2g_4 = 4g^2g_2 - g_5h - 6fgg_3 - f^2g_2^2,$$

also ist

$$4g^2g_2 - g_5h = fg_9 = i_0x^9 + \cdots,$$

Digitized by Google

wo $g_9$ eine Kovariante vom Grade 9, Dimension 5, Gewicht 8, und

$$Ai_0 = 4A_1^2G - i_0k_0 \quad \text{oder} \quad i_0 = AA' + 6A_1H + AG^2.$$

Für die einzelnen Koeffizienten von $g_4$ gelten die Werte

$$\begin{aligned} A' &= AH'' - 2BH' + 3CH, \\ 4B' &= 3AH''' + BH'' - 5CH' + 9DH, \\ 2C' &= 3BH''' - CH'' - DH' + 3EH, \\ 4D' &= 9CH''' - 5DH'' + EH' + 3FH, \\ E' &= 3DH''' - 2EH'' + FH'. \end{aligned}$$

Die daraus hervorgehenden, ziemlich weitläufigen Ausdrücke von $J_{VIII}$ und $J_{XII}$ vereinfachen sich für $B = D = 0$, und ergeben dann wegen

$$\begin{aligned} H &= C(AE - C^2), & H' &= ACF \\ H'' &= E(C^2 - AE), & H''' &= -C^2F \\ A' &= -A^2E^2 + 4AC^2E - 3C^4, & B' &= -2AC^2F \\ C' &= 2CE(AE - C^2), & D' &= CF(AE - 3C^2) \end{aligned}$$

$$E' = 2AE^3 + ACF^2 - 2C^2E^2:$$

$$J_{VIII} = -2A^3E^5 - A^3CE^2F^2 + 22A^2C^2E^4 + 12A^2C^3EF^2 - \\ - 38AC^4E^3 - 27AC^5F^2 + 18C^6E^2,$$

während der Wert von $J_{XII}$ von dem bereits oben aus $g_3$ gefundenen nicht verschieden ist. Die Invariante $J_{IV}$ oder $K$ aber geht im gleichen Falle in den einfacheren Ausdruck über:

$$J_{IV} = A^2F^2 + 16ACE^2 + 48C^3E.$$

Die Diskriminante endlich

$$D_5(f) = \tfrac{1}{3125}A^8 \prod_{ik}^{*}(x_i - x_k)^2 = \tfrac{1}{5^5}A^8S_5 = \tfrac{1}{5^5}A^8 \,|\, s_is_{i+1} \ldots s_{i+4} \,|$$

ist als Invariante von der achten Dimension und dem Gewichte 20 durch die Gleichung bestimmt

$$D_5 = J_{IV}^2 - 128J_{VIII},^1)$$

1) Überhaupt läßt sich beweisen, daß für $m = 5$ *jede* Invariante durch eine ganze rationale Funktion von *vier* Invarianten mit den Dimensionen 4, 8, 12 und 18 gegeben ist, doch gehen wir der Kürze halber nicht auf eine nähere Erörterung des bekannten Satzes ein.



Digitized by Google

so daß für $B = D = 0$ der Wert erhalten wird:

$$D_5 = A^4F^4 + 256A^3E^5 + 160A^3CE^2F^2 - 2560A^2C^2E^4 -$$
$$- 1440A^2C^3EF^2 + 6400AC^4E^3 + 3456AC^5F^2$$
$$= A^4F^4 + 32ACF^2(5A^2E^2 - 45AC^2E + 108C^4) +$$
$$+ 256AE^3(A^2E^2 - 10AC^2E + 25C^4).$$

Von besonderem Interesse ist noch die Kovariante

$$g_6 = 3[fg_3] = -2[gg_2] = A_0x^6 + \cdots$$
$$= *A^4\sum(x_0-x_1)^2(x_0-x_2)^2(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_4)(x-x_3)^3(x-x_4)^3$$

vom Grade 6, Dimension 4, Gewicht 7, für welche

$$g_6(0) = 3EH''' - FH'' = G_1G' - 2F_1G''$$
$$= AE^2F - ADF^2 + BCF^2 + 2BDEF - 3BE^3 -$$
$$- 4C^2EF + CD^2F + 6CDE^2 - 3D^3E.$$

Damit wird

$$f^3g_6 = f_2f_5 - f_3^2f_3 - f_3f_4,$$

und nach Einführung von $ggg_5h$:

$$fg_6 = g_2h - gg_5, \quad AA_0 = Gi_0 - A_1k_0,$$

also teilbar durch $f$ resp. $A$, wie schon Art. 1* erwähnt wurde.

## 8*.

In den *Annali di Matematica* von 1883[1]) hat Brioschi den Satz ohne Beweis ausgesprochen, daß, wenn $g$ und $h$ zwei Kovarianten $n$ten Grades der Funktion $f(\overset{m}{x}) = a_0x^m + \cdots$ von den Dimensionen $\mu$ und $\nu$ bezeichnen, und $x$ aus der Gleichung $f = 0$ mittelst der neuen Variablen

$$\xi = \frac{h}{g}, \quad \xi_i = \frac{h(x_i)}{g(x_i)}, \quad g^2d\xi + n[gh]dx = 0$$

eliminiert wird, eine Gleichung von der Form hervorgeht:

$$\mathfrak{A}_0\xi^m + \mathfrak{A}_1\xi^{m-1} + \cdots + \mathfrak{A}_m = \mathfrak{f}(\overset{m}{\xi}) = 0,$$

in welcher die Koeffizienten $\mathfrak{A}_i$ durch Invarianten der Funktion $f$ ausgedrückt werden. Zur Verifikation findet sich a. a. O. S. 302

1) Ser. II, T. XI, p. 303.

Digitized by Google

für $m = 5$ und $h = g_6$ der Ausdruck $\mathfrak{f}$ unter $(P)$ vollständig entwickelt.

Der Brioschi'sche Satz enthält die Verallgemeinerung eines zuerst von Hermite[1]) bewiesenen Theorems, wonach für $\xi = \frac{h(x)}{f_1(x)}$ der transformierte Ausdruck $\mathfrak{f}\xi = \mathfrak{A}_0\xi^m + \cdots$ die verlangte Invarianteneigenschaft besitzt, wenn $h$ eine Kovariante vom Grade $n = m - 2$ bedeutet.

Zum Beweise schreiben wir

$$\mathfrak{f} = a_0^n \prod_i (\xi g(x_i) - h(x_i)) = \mathfrak{A}_0(\xi - \xi_0)(\xi - \xi_1) \cdots (\xi - \xi_m)$$

und führen die lineare Transformation $\varrho x = \delta\xi + \delta_1$, $\varrho = \delta_2\xi + \delta_3$ aus. Die Kovariantenbedingung

$$\varepsilon^p \varrho^n g(xb) = \chi(\xi\beta) \quad \text{oder} \quad \varepsilon^{n+p} g(x^\mu a) = \sigma^n g(\xi^\mu \alpha)$$

liefert

$$\varepsilon^{m(n+p)} \prod_i g(x_i) \prod_i \sigma_i^n \chi(\xi_i),$$

und da nach Art. 5, 6

$$p = \tfrac{1}{2}(m\mu - n), \quad \alpha_0 = a_0 \prod \sigma_i,$$

so folgt

$$\varepsilon^{\frac{1}{2}m(m\mu+n)} a_0^n \prod_i g(x_i) = \alpha_0^n \prod_i \chi(\xi_i),$$

mit anderen Worten

$$a_0^n \prod_i g(x_i) = \mathfrak{A}_0$$

ist eine Invariante von der Dimension $m\mu + n$.

Diese Invariante ist aber nicht verschieden von der Resultante $R(fg)$, sodaß die Funktion

$$\mathfrak{f} = R(f, \xi g - h)$$

geschrieben werden kann. In der Tat hat man jetzt nach der Bezeichnung des Art. 6 neben

$$\alpha_0 = a_0 \prod_i (\delta - \delta_2 x_i), \quad \beta_0 = \varepsilon^p b_0 \prod_k (\delta - \delta_2 y_k),$$

wie für $\xi = \infty$ die Gleichung $\left(\frac{\varepsilon}{\delta_2}\right)^m \beta_0 = \varepsilon^{n+p} g\left(\frac{\partial}{\delta_2}\right)$ ergibt, weil die Koeffizienten $b$ der Kovariante $g$ von den Koeffizienten $a$ in $f$

1) *Sur l'équation du cinquième degré* p. 11 (1866). Man vergleiche auch Brioschi in den *Mathemat. Annalen*, Bd. 13, S. 144, und Faà di Bruno *Binäre Formen*, deutsch von Walter, S. 191.



Digitized by Google

nicht unabhängig sind. Substituiert man diese Werte in die Gleichung

$$\varepsilon^{mn} a_0^n b_0^m \Pi_{ik}(x_i - y_k) =$$
$$= a_0^n \Pi_i(\delta - \delta_2 x_i)^n \cdot b_0^m \Pi_k(\delta - \delta_2 y_k)^m \cdot \Pi_{ik}(\xi_i - \eta_k),$$

so folgt wegen

$$R(fg) = a_0^n b_0^m \Pi_{ik}(x_i - y_k), \quad R(\varphi\chi) = \alpha_0^n \beta_0^m \Pi_{ik}(\xi_i - \eta_k):$$
$$\varepsilon^{m(n+p)} R(fg) = R(\varphi\chi),$$

d. h. die Resultante $R$ wird eine Invariante von $f$ vom Gewicht $m(n+p)$ und der Dimension $m\mu + n$.

Um die Invarianteneigenschaft auch der übrigen Koeffizienten $\mathfrak{A}_i$ abzuleiten, bemerken wir, daß die Gleichungen $f = 0$ und $\xi g = h$ durch die lineare Transformation übergehen in

$$\varphi = 0 \quad \text{und} \quad \xi\chi = \psi \quad \text{oder} \quad \varrho^m f = 0 \quad \text{und} \quad \xi \varepsilon^p \varrho^n g = \varepsilon^q \varrho^n h.$$

Die Gleichungen

$$f = 0 \quad \text{und} \quad \varepsilon^{p-q} \xi g = h$$

aber lehren, daß durch den Übergang von $x$ zu $\xi$ in der Gleichung $\mathfrak{f} = 0$ als dem Resultat der Elimination von $x$ aus $f = 0$ und $\xi = \frac{h}{g}$ die nämliche Wirkung erzielt wird, als wenn $\xi$ den Faktor $\varepsilon^{p-q}$ (resp. den Divisor $\varepsilon^{q-p}$) erhält, wo

$$p = \tfrac{1}{2}(m\mu - n), \quad q = \tfrac{1}{2}(m\nu - n) \quad \text{oder} \quad p - q = \tfrac{1}{2}m(\mu - \nu).$$

Es geht mithin $\mathfrak{f}$ über in

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{A}_0 \xi^m + \varepsilon^{q-p} \mathfrak{A}_1 \xi^{m-1} + \cdots + \varepsilon^{m(q-p)} \mathfrak{A}_m\} = 0,$$

wo sich der noch zu bestimmende konstante Faktor

$$\mathfrak{F} = \varepsilon^{\frac{1}{2}m(m\mu+n)}$$

ergibt, weil die Invariante $\mathfrak{A}_0$ das Gewicht $\frac{1}{2}m(m\mu + n)$ besitzt. Damit geht also $\mathfrak{A}_i$ über in $\varepsilon^{\frac{1}{2}m(m\mu+n)+i(q-p)}\mathfrak{A}_i$, mit anderen Worten, die Koeffizienten $\mathfrak{A}_i$ sind Invarianten von der Dimension $m\mu + n + i(\nu - \mu)$, übereinstimmend mit der Angabe Brioschi's a. a. O.

Digitized by Google

9*.

Den spezielleren Hermite'schen Satz erhält man für $n = m - 2$ aus der Transformation der Gleichungen $f = 0$ und $\xi f_1 = h$, wodurch neben

$$\varphi = 0, \quad \xi \varphi_1 = \psi \quad \text{oder} \quad \xi(\delta_2 \varrho^{m-1} f + \varepsilon \varrho^{m-2} f_1) = \varepsilon^2 \varrho^{m-2} h$$

hervorgeht. Wegen $q = \frac{1}{2} m(m\nu - m + 2)$ folgt aus der Gleichung

$$\xi f_1 = \varepsilon^{q-1} h = \varepsilon^{\frac{1}{2} m(\nu-1)} h,$$

daß $\xi$ den Divisor $\varepsilon^{\frac{1}{2} m(\nu-1)}$ erhält, sodaß jetzt durch Einführung von $\xi$

$$\mathfrak{f} = a_0^{m-2} \Pi_i (\xi f_1(x_i) - h(x_i)) = \mathfrak{A}_0 \Pi_i (\xi - \xi_i)$$

übergeht in

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{A}_0 \xi^m + \varepsilon^{\frac{1}{2} m(\nu-1)} \mathfrak{A}_1 \xi^{m-1} + \cdots + \varepsilon^{\frac{1}{2} m^2(\nu-1)} \mathfrak{A}_m\}.$$

Hier bedeutet aber

$$\mathfrak{A}_0 = a_0^{m-2} \Pi f_1(x_i) = \frac{1}{a_0} R(f f_1) = D_m(f)$$

die Diskriminante von $f$, also eine Invariante von der Dimension $2(m-1)$ und $\mathfrak{F} = \varepsilon^{m(m-1)}$.[1]) Damit verwandelt sich $\mathfrak{A}_i$ in

$$\varepsilon^{m(m-1)+\frac{1}{2} mi(\nu-1)} \mathfrak{A}_i,$$

d. h. die Koeffizienten in $\mathfrak{f}$ sind Invarianten von der Dimension $2(m-1) + i(\nu-1)$.

Übrigens ist aus den Elementen der Algebra bekannt, daß man einen Ausdruck wie $\xi_i = \frac{h(x_i)}{g(x_i)}$ ersetzen kann durch den analog gebildeten $x_i = \frac{\mathfrak{h}(\xi_i)}{\mathfrak{g}(\xi_i)}$, wo $\mathfrak{h}$ und $\mathfrak{g}$ ganze Funktionen $m-1$ ten Grades bedeuten. Man bilde etwa mittelst successiver Division das Gleichungensystem

$$h - \xi g = q f - r_1, \quad f = q_1 r_1 - r_2, \quad r_1 = q_2 r_2 - r_3 \cdots$$

bis $r_{m-3} = q_{m-2} r_{m-2} - r_{m-1}, \quad r_{m-2} = q_{m-1} r_{m-1} - r_m,$

---

1) Das nämliche Resultat ergibt der Wert

$$\mathfrak{A}_m = a_0^{m-\nu} \Pi_i h x_i = R(f h)$$

als Invariante von der Dimension $m\nu + m - 2$.

Digitized by Google

dann verschwinden mit $f$ und $h - \xi g$ die sämtlichen Reste $r_1 r_2 .. r_m$. Nun erhält man für $q$ und $r_1$ lineare Funktionen von $\xi$, dagegen vom Grade $n - m$ und resp. $m - 1$ in Bezug auf $x$; nur für $n = m' - 1 \leqq m - 1$ wird $q = 0$ und $r_1 = \xi g - h$, also vom Grade $m' - 1$. Im Übrigen ergibt sich die Form

$$q_i = \alpha_i x \xi + \beta_i x + \gamma_i \xi + \delta_i,$$

während $r_i$ vom Grade $m - i$ resp. $m' - i$ in Bezug auf $x$ und vom Grade $i$ in Bezug auf $\xi$ wird. Der letzte Rest $r_m$ kann sich nur durch einen konstanten Faktor von der Resultante $R(f, \xi g - h) = \mathfrak{f}(\xi)$ unterscheiden, dagegen ist

$$r_{m-1} = x \mathfrak{g} - \mathfrak{h},$$

wo $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ Funktionen $m - 1$ten Grades in Bezug auf die Variable $\xi$ bedeuten. Es geht daraus hervor, daß man für $f = 0$ statt der Gleichung $\xi = \frac{h(x)}{g(x)}$ auch die Gleichung $x = \frac{\mathfrak{h}(\xi)}{\mathfrak{g}(\xi)}$ zur Elimination von $x$ benutzen kann, und daß die Werte $\xi_i = \frac{h(x_i)}{g(x_i)}$ und $x_i = \frac{\mathfrak{h}(\xi_i)}{\mathfrak{g}(\xi_i)}$ einander entsprechen.

Zum Überfluß sei noch darauf hingewiesen, daß jede gebrochene Funktion von der Form $\frac{h x_i}{g x_i}$ auf eine *ganze* Funktion $m - 1$ten Grades reduziert werden kann, wenn man

$$\Pi_i g x_i = g x_i \gamma x_i \quad \text{einführt, wodurch} \quad \frac{h x_i \gamma x_i}{\Pi g x_i} = \frac{a_0^m}{\mathfrak{A}_0} h x_i \gamma x_i$$

hervorgeht, also eine ganze Funktion von $x_i$, für welche man den Rest bei der Division durch $f x_i = 0$ setzen darf. Die Funktion $\gamma x_i$, in welcher der Faktor $g x_i$ fehlt, ist als ganze symmetrische Funktion der Wurzeln der Gleichung $\frac{f}{x - x_i} = 0$, wie hinlänglich bekannt, eine ganze Funktion der Koeffizienten in $\frac{fx - fx_i}{x - x_i}$, also auch von $x_i$.

Es soll jetzt nach dem Vorgange von Hermite und Brioschi für $h = g_6$, also

$$\xi = \frac{g_6}{g}, \quad m = 5, \quad n = 6, \quad \mu = 2, \quad \nu = 4, \quad g^3 d\xi + 6[g g_6] dx = 0$$

die Funktion $\mathfrak{f}\xi$ aus $fx$ abgeleitet werden. Damit erhält man

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_0 \xi^5 + \mathfrak{A}_1 \xi^4 + \mathfrak{A}_2 \xi^3 + \mathfrak{A}_3 \xi^2 + \mathfrak{A}_4 \xi + \mathfrak{A}_5 = 0,$$

Digitized by Google

wo $\mathfrak{A}_i$ eine Invariante von der Dimension $2i+16$ wird und $\mathfrak{A}_0 = R(fg)$. In diesem Falle läßt sich jedoch der Wert von $\xi$ auf die Form des Hermite'schen Satzes bringen, wodurch die Dimension der Koeffizienten infolge des Wegfalls des gemeinschaftlichen Faktors $D_5(f)$ sich wesentlich erniedrigt. Da nämlich die Kovarianten

$$g = f_1 f_1 - f f_{11} \quad \text{uud} \quad g_6 = 3[f g_3] \qquad \text{für } f = 0$$

die Werte $g = f_1 f_1$ und $g_6 = 3 f g_3$ annehmen,

so folgt $\xi = 3\frac{g_3}{f_1}$, und es wird $h = g_3$,

also $n = m - 2 = \nu = 3$ und $\mathfrak{A}_0 = D_5(f)$,

sodaß die Dimension der Koeffizienten $\mathfrak{A}_i$ auf $2i+8$ herabsinkt.

Nun besitzt die Funktion $f(\overset{5}{x})$ keine Invarianten 10ter und 14ter Dimension, während

$$\mathfrak{A}_5 = R(f g_3) = J_{\text{XVIII}}$$

durch die sogenannte schiefe Invariante Hermite's ausgedrückt wird. Mithin müssen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_3$ verschwinden, sodaß $\mathfrak{f}$ die Gestalt annimmt:

$$\mathfrak{f} = D_5 \xi^5 + 10\mathfrak{C}\xi^3 + 5\mathfrak{E}\xi + \mathfrak{F} = 0.$$

Für $\zeta = \xi\sqrt{\mathfrak{D}_5}$ erhält man hieraus die *kanonische* Gleichung Hermite's[1]):

$$\zeta^5 + 10\mathfrak{C}\zeta^3 + 5\mathfrak{E}\Delta\zeta + \mathfrak{F}\Delta^{5/2} = 0,$$

mit der Diskriminante

$$\mathfrak{D} = \Delta^3\{\mathfrak{F}^4\Delta^3 + 32\mathfrak{C}\mathfrak{F}^3(5\mathfrak{E}^2\Delta^2 - 45\mathfrak{E}^3\mathfrak{C}\Delta + 108\mathfrak{C}^4) + \\ + 256\mathfrak{E}^3(\mathfrak{E}\Delta^2 - 10\mathfrak{C}\mathfrak{E}\Delta + 25\mathfrak{C}^4)\},$$

wo kurz $\Delta = D_5(f)$ geschrieben ist.

Auch ist seit Bring (1786) und Jerrard (1834) bekannt, daß mittelst einer geeigneten Tschirnhaus-Transformation (1683) noch eines der beiden mittleren Glieder entfernt werden kann, wodurch die Wurzel der Gleichung fünften Grades als Funktion eines einzigen Arguments erscheint.

---

1) Brief an Borchardt 1861, Crelle's *Journal* Bd. 59, S. 305.

Digitized by Google

10*.

Es mag bei dieser Gelegenheit bemerkt werden, daß Eisenstein — jedenfalls unabhängig von Jerrard oder Bring — als Student die *„allgemeine"* Gleichung fünften Grades mit Hilfe dreier Funktionen $\varphi$, $\chi$ und $\psi$ aufgelöst hat, welche den Gleichungen

$$\lambda = \varphi^3 = \psi^5 = \chi^5 + \chi$$

genügen (Crelle's Journal Bd. 27, S. 81, Jan. 1844). Jacobi dagegen teilt (das. Bd. 13, S. 347, Dez. 1834) als Kuriosum mit, daß, wie er *olim* als *puer studiosus* gefunden, die *„allgemeine"* Gleichung fünften Grades von der Form

$$x^5 = 10q^2x + p$$

durch die Substitution $x = y + \frac{q}{y}$ in die Gleichung

$$y^{10} + 5qy^8 + 5q^4y^2 + q^5 = py^5$$

übergehe, die natürlich nicht algebraisch auflösbar sei, während die ähnlich gebildete Gleichung

$$y^{10} - 5qy^8 - 5q^4y^2 + q^5 = py^5$$

die Wurzeln

$$2y = \eta + \eta_1 \pm \sqrt{\eta^2 + \eta_1^2}$$

habe, wo

$$2\eta^5 = p + \sqrt{p^2 - 128q^5}, \quad 2\eta_1^5 = p - \sqrt{p^2 - 128q^5}.$$

Auch zeigt Jacobi a. a. O., daß für die alternierend zyklische Funktion der Wurzeln einer Gleichung fünften Grades $f = 0$

$$y = A\{x_0x_1 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_0 - x_0x_2 - x_2x_4 - x_4x_1 - x_1x_3 - x_3x_0\},$$

die bikubische Resolvente

$$y^6 + a_2y^4 + a_4y^2 + a_6 = \pm 800Ay\sqrt{5D_5(f)}$$

rationale Koeffizienten $a$ besitzt, so daß z. B.

$$a_2 = 200(AE - 4BD + 3C^2) = 200G^1)$$

sei, während die Werte von $a_4$ und $a_6$ *paullo ampliores calculos* erfordern. Diese Rechnungen sind von Cayley geleistet worden (*Philos. Transact.* 1861, p. 271, siehe auch Crelle's *Journal*

1) In Band 3 der *Gesammelten Werke* S. 278 findet sich der berichtigte Wert $a_2 = -100G$.

Digitized by Google

Bd. 113, S. 42)[1]) und haben ergeben, daß die Koeffizienten keine Invarianten sind.

Dagegen kann man mit Hilfe einer zweiten alternierend zyklischen Funktion der Wurzeln $x_k$

$$\mathfrak{y} = A\{x_0x_1x_2 + x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_3x_4x_0 + x_4x_0x_1 - \\ - x_0x_2x_4 - x_2x_4x_1 - x_4x_1x_3 - x_1x_3x_0 - x_3x_0x_2\}$$

eine in $x$ lineare Funktion

$$z = \frac{1}{\sqrt{20}}(xy - \mathfrak{y})$$

einführen, welche die bikubische Gleichung

$$z^6 - 5g_2z^4 + 5(g_2^2 - 2g_4)z^2 - 5(g_2^3 + 2g_2g_4 + 16g_3^2 + gK) = f \cdot z\sqrt{D_5}$$

erfüllt und die Jacobische Resolvente liefert, wenn man nur die Koeffizienten der höchsten Potenzen von $x$ in $z$ und den resp. Kovarianten beibehält, für $x = 0$ erhält man dann die analog gebildete Resolvente für die Funktion $\mathfrak{y}$. Selbstverständlich kann durch geeignete Bestimmung des Wertes von $x$, wenn man will, eines der Glieder dieser Gleichung zum Verschwinden gebracht werden, sodaß z. B. für $x = x_i$ die Resolvente die Form einer kubischen Gleichung

$$z^6 + a_2z^4 + a_4z^2 + a_6 = 0$$

annimmt.

Im Wesentlichen, wenn auch in anderer Form, findet sich diese Verallgemeinerung bereits in der zitierten Abhandlung von Cayley, auch Brioschi hat sich damit beschäftigt in den *Memorie del R. Istituto Lombardo* T. IX, p. 215—31 (siehe auch *Mathem. Annal.* Bd. 13, S. 153), wo er anführt, daß wenn die Gleichung fünften Grades in der kanonischen Form

$$\mathfrak{A}\xi^5 + 10\mathfrak{C}\xi^3 + 5\mathfrak{E}x + \mathfrak{F} = 0$$

gegeben ist, schon Malfatti (1771) und Ruffini (1806) die Koeffizienten der bikubischen Resolvente in der Gestalt entwickelt haben:

$$a_2 = -100(3\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{A}\mathfrak{E}), \quad a_4 = 2000(15\mathfrak{C}^4 - 2\mathfrak{A}\mathfrak{C}^2\mathfrak{E} + 3\mathfrak{A}^2\mathfrak{E}^2),$$
$$a_6 = -40000(25\mathfrak{C}^6 - 35\mathfrak{A}\mathfrak{C}^4\mathfrak{E} + 11\mathfrak{A}^2\mathfrak{C}^2\mathfrak{E}^2 - \mathfrak{A}^3\mathfrak{E}^3 - \mathfrak{A}^3\mathfrak{C}\mathfrak{F}^2).$$

1) Vergl. Salmon-Fiedler, *Algebra der linearen Transformationen*, 2. Aufl. S. 327, wo die angegebenen Werte der Koeffizienten sich auf die Form $A_0x^6 + A_1x^4 + A_4x^2 + A_5x + A_6$ beziehen, und der Wert von $A_6$ durch 40000 zu multiplizieren ist.

Digitized by Google

## 11*.

## Die bikubischen Gleichungen.

Wir wenden uns schließlich zum Falle $m = 6$ oder

$$f = Ax^6 + 6Bx^5 + 15Cx^4 + 20Dx^3 + 15Ex^2 + 6Fx + G.$$

Zur Aufstellung der typischen Gleichung für

$$z = \frac{f}{x-y} - f_{,}, \quad fy = 0,$$

$$z^6 + 15f_2z^4 + 20f_3z^3 + 15f_4z^2 + 6f_5z + f_6 = 0$$

erhält man die Kovariantenwerte

$$f_2 = -g, \qquad f_3 = -h, \qquad f_4 = f^2g_4 - 3g^2,$$

$$f_5 = f^2g_8 - 2gh \quad \text{und} \quad f_6 = f^4J_{,,} + 15f^2gg_4 - 45g^3 + 10h^2.$$

Hier werden die assoziierten Kovarianten

$$g = -h_2, \quad h = -h_3, \quad g_4 = h_4, \quad g_8 = h_5$$

mit der Invariante $J_{,,} = h_6$ und den zugehörigen Maßzahlen $n, \mu, p = 8, 2, 2;\ 12, 3, 3;\ 4, 2, 4;\ 8, 3, 5$ und $0, 2, 6$ durch die Ausdrücke definiert:

$$g = -\tfrac{1}{2}[ff]_2 = B_0x^8 + 8B_1x^7 + 28B_2x^6 + 56B_3x^5 + \\ + 70B_4x^4 + 56B_5x^3 + 28B_6x^2 + 8B_7x + B_8,$$

$$h = 2[fg] = i_0x^{12} + 12i_1x^{11} + \cdot\cdot,$$

$$g_4 = \tfrac{1}{2}[ff]_4 = G_0x^4 + 4G_1x^3 + 6G_2x^2 + 4G_3x + G_4,$$

$$g_8 = 2[fg_4] = k_0x^8 + 8k_1x^7 + \cdot\cdot,$$

$$J_{,,} = \tfrac{1}{2}[ff]_6 = AG - 6BF + 15CE - 10D^2.$$

Die Koeffizienten in $g$ sind gegeben durch

$$B_0 = B^2 - AC = A_1, \qquad B_1 = \tfrac{1}{2}(BC - AD),$$

$$B_2 = \tfrac{1}{14}(5C^2 - 2BD - 3AE), \qquad B_3 = \tfrac{1}{14}(5CD - 4BE - AF),$$

$$B_4 = \tfrac{1}{70}(20D^2 - 5CE - 14BF - AG),$$

$$B_5 = \tfrac{1}{14}(5DE - 4CF - BG), \qquad B_6 = \tfrac{1}{14}(5E^2 - 2DF - 3CG),$$

$$B_7 = \tfrac{1}{2}(EF - DG), \qquad B_8 = F^2 - EG,$$

und in $g_4$ durch:

$$G_0 = AE - 4BD + 3C^2 (= G),$$

$$G_1 = \tfrac{1}{2}(AF - 3BE + 2CD), \quad G_2 = \tfrac{1}{6}(AG - 9CE + 8D^2),$$

$$G_3 = \tfrac{1}{2}(BG - 3CF + 2DE) \quad \text{und} \quad G_4 = CG - 4DF + 3E^2.$$

Digitized by Google

Außerdem hat man wie früher

$$i_0 = 3ABC - A^2D - 2B^3, \qquad \text{sowie}$$
$$k_0 = A^2F - 5ABE + 2ACD + 8B^2D - 6BC^2.$$

Ferner wird

$$g = \tfrac{1}{180} A^2 \sum_{15} (x_0 - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^2 (x - x_5)^2,$$

$$h = \tfrac{1}{2160} A^3 \sum_{120} (x_0 - x_1)^2 (x_0 - x_2) \times \times (x - x_1)(x - x_2)^2 (x - x_3)^3 (x - x_4)^3 (x - x_5)^3,$$

$$= \tfrac{1}{1080} A^3 \sum_{60} (x_0 - x_1)(x_0 - x_2)(x_0 - x_3) \times \times (x - x_1)^2 (x - x_2)^2 (x - x_3)^2 (x - x_4)^3 (x - x_5)^3,$$

$$g_4 = \tfrac{1}{900} A^2 \sum_{45} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x - x_4)^2 (x - x_5)^2,$$

$$= \tfrac{1}{450} A^2 \sum_{45} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_0)(x - x_4)^2 (x - x_5)^2,$$

$$(g_3) = * A^3 \sum_{360} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_0 - x_4) \times \times (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)^2 (x - x_5)^3,$$

$$= * A^3 \sum_{60} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_2 - x_5) \times \times (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)^2 (x - x_4)^2 (x - x_5)^2,$$

$$(J_{11}) = * A^3 \sum_{15} (x_0 - x_1)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_4 - x_5)^2,$$

$$= * A^3 \sum_{60} (x_0 - x_1)(x_1 - x_2)(x_2 - x_3)(x_3 - x_4)(x_4 - x_5)(x_5 - x_0),$$

bei welchen Formeln allerdings auf die Eingangsbemerkung zu Art. 3* zu verweisen ist.

Die Einführung der Potenzsummen $\sigma_k = \mathrm{S}_i x_i^k$ liefert

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = 30g, \quad \sigma_3 = 60h,$$
$$\sigma_4 = 30(21g^2 - 2f^2 g_4), \quad \sigma_5 = 30(52gh - f^2 g_3),$$
$$\sigma_6 = 6(1845g^3 + 190h^2 - 240f^2 g g_4 - f^4 J_{11}),$$
$$\cdots$$

damit geht die typische Gleichung hervor:

$$z^6 = 15gz^4 + 20hz^3 + 15(3g^2 - f^2 g_4)z^2 + 6(2gh - f^2 g_3)z + + 45g^3 - 10h^2 - 15f^2 g g_4 - f^4 J_{11}$$
$$= \tfrac{1}{2}\sigma_2 z^4 + \tfrac{1}{3}\sigma_3 z^3 + \tfrac{1}{4}(\sigma_4 - \tfrac{1}{2}\sigma_2^2)z^2 + \tfrac{1}{5}(\sigma_5 - \tfrac{5}{6}\sigma_2\sigma_3)z + + \tfrac{1}{6}(\sigma_6 - \tfrac{5}{4}\sigma_2\sigma_4 - \tfrac{1}{3}\sigma_3^2 + \tfrac{1}{8}\sigma_2^3)$$

Digitized by Google

mit der Diskriminante $f^{20}D_6(f)$, wo

$$D_6(f) = -\frac{1}{6^6}A^{10}\,|\,s_i s_{i+1} s_{i+2}\cdots s_{i+5}\,| = -\frac{1}{6^6}A^{10}\prod_{ik}^{*}(x_i - x_k)^2,$$

die zugehörige Invariante aber ist $f^4 J_{11}$.

12*.

Es handelt sich jetzt noch für $m = 6$ um die Entwickelung der *permanenten* Kovarianten

$$j = Jx^{12} + \cdots = -g_{12}, \quad j_1 = Hx^6 + \cdots = g_6,$$
$$j_2 = Kx^4 + \cdots = \gamma_4, \qquad j_3 = l_0 x^3 + \cdots = g_3,$$

nebst der Invariante

$$j_4 = L = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & E \\ C & D & E & F \\ D & E & F & G \end{vmatrix} \quad \text{oder} \quad j_4 = \Omega = [g_4 g_4]_4.$$

Wir bestimmen zunächst $g_6$ durch die Gleichung

$$g_6 = -\tfrac{5}{12}[fg]_4 - \tfrac{1}{28}[fg_4]_2 = Hx^6 + \cdots,$$

während für $m = 5$:

$$g_3 = -\tfrac{5}{2}[fg]_4 = -\tfrac{1}{8}[fg_2]_2 = Hx^3 + \cdots$$

und für $m = 4$: $H = -\frac{1}{3}[fg]_4$ erhalten wurde, weil die betreffenden Überschiebungswerte keine permanenten Kovarianten darstellen. Nun wird für $x = 0$:

$$70[fg]_4^0 = 70\{CB_6 - 4DB_7 + 6EB_6 - 4FB_5 + GB_4\}$$
$$= -AG^2 + 6BFG - 165CEG + 150CF^2 + 160D^2G - 300DEF + 150E^3,$$

$$6[fg_4]_2^0 = 6\{EG_4 - 2FG_3 + GG_2\}$$
$$= AG^2 - 6BFG - 3CEG + 18CF^2 + 8D^2G - 36DEF + 18E^3,$$

mithin der *letzte* Koeffizient in $g_6$:

$$-\tfrac{5}{12}[fg]_4^0 - \tfrac{1}{28}[fg_4]_2^0 = CEG - CF^2 - D^2G + 2DEF - E^3,$$

und hieraus geht auf bekannte Weise durch Buchstabenvertauschung der Wert des *ersten* Koeffizienten $H$ in $j_1$ hervor.

Nach dem Hermite'schen Satze folgt

$$f^3 g_6 = f_2 f_4 - f_3^2 - f_2^3 = 4g^3 - h^2 - f^2 g g_4,$$

Digitized by Google

oder für $$g_{12} = -Jx^{12} + \cdots$$

$$4g^3 - h^2 = f^2(gg_4 + fg_6) = f^2 g_{12},$$

so daß in Übereinstimmung mit Art. 2* $j$ durch

$$j + gg_4 + fg_6 = 0$$

gegeben ist.

Ferner wird

$$g_3 = \tfrac{1}{2}[fg_4]_4 = l_0x^3 + l_1x + l_2 = j_3$$

$$g_3 = *A^3 \sum (x_0 - x_1)^2(x_2 - x_3)^2(x_4 - x_5)^2(x_0 - x_2)(x_1 - x_3)(x - x_4)(x - x_5)$$

$$l_0 = ACG - 3ADF + 2AE^2 - B^2G + 3BCF - BDE - 3C^2E + 2CD^2$$

$$l_1 = ADG - AEF - BCG - 8BDF + 9BE^2 + 9C^2F - 17CDE + 8D^3$$

$$l_2 = AEG - AF^2 - 3BDG + 3BEF + 2C^2G - CDF - 3CE^2 + 2D^2E,$$

und hieraus entspringt die Invariante sechster Dimension

$$J_{VI} = l_1l_1 - 4l_0l_2 = -2[g_2g_2]_2.$$

Aus $g_3(0) = l_2$ ergibt sich

$$f^5g_3 = f_3f_6 - 3f_5f_5 + 2f_4^2 - 3f_3^2f_4 + 2f_3f_5^2$$
$$= 2f^4g_4^2 - f^4gJ_{II} - 30f^2g^3g_4 + 3f^2g_8h + 18g(4g^3 - h^2),$$

woraus nach Division durch $f^2$ erhalten wird:

$$f^3g_3 = 2f^2g_4^2 - f^2gJ_{II} + 18fgg_6 - 12g^2g_4 + 3g_8h.$$

Folglich muß $g_8h - 4g^3g_4$ durch $f$ teilbar sein oder

$$k_0i_0 - 4A_1^2G$$

den Faktor $A$ besitzen. Nach Art. 1* aber ist

$$h_2h_5 - h_3h_4 = ff_0, \quad f_0 = A_0x^{4m-14} + \cdots,$$

also für $m = 6$:

$$g_4h - gg_8 = ff_0, \quad f_0 = A_0x^{10} + \cdots.$$

Durch Kombination beider Ausdrücke erhält man die Formel des Art. 1*

$$h_5^2 + 4h_3h_4^2 = f\mathfrak{f} \quad \text{oder}$$

$$g_8^2 - 4gg_4^3 = fg_{10}, \quad g_{10} = \mathfrak{A}x^{10} + \cdots$$

nebst

$$k_0^2 - 4A_1G^2 = A\mathfrak{A},$$

den Resultaten der Artt. 1* und 6* entsprechend.

Digitized by Google

13*.

Um die Kovariante $j_2$ zu bestimmen, kehren wir zu dem Werte des Art. 6* für $K = J_{IV}$ zurück:

$$f^6 K = f_5^2 + 4 f_2 f_3 f_5 + 16 f_2 f_4^2 - 12 f_3^2 f_4 + 48 f_2^2 f_4 - 32 f_2^3 f_3^2,$$

welcher für $m = 6$ liefert

$$f^4 j_2 = f^2 g_6^2 - 16 f^2 g g_4^2 + 48 g^2 g_4 - 12 g_4 h^2$$

oder

$$f^2 j_2 = g_6^2 - 4 g g_4^2 + 12 f g_4 g_6 = g_6^2 - 16 g g_4^2 + 12 g_4 g_{12},$$

wo wiederum $g_6^2 - 4 g g_4^2$ durch $f$ teilbar erscheint. Man kann folglich auch setzen:

$$f j_2 = g_{10} + 12 g_4 g_6 \quad \text{nebst} \quad AK = \mathfrak{A} + 12 GH,$$

während $j_2 = \gamma_4$ vom Grade 4, Dimension 4, Gewicht 10 wird.

Eine dritte biquadratische Kovariante ergibt sich durch

$$g_4 = 2[g_2 g_4] = \mathfrak{G}_0 x^4 + 4 \mathfrak{G}_1 x^3 + 6 \mathfrak{G}_2 x^2 + 4 \mathfrak{G}_3 x + \mathfrak{G}_4,$$

wo die Koeffizienten von der 5. Dimension werden, also das Gewicht $p = 13$. Hier findet man leicht

$$\mathfrak{G}_0 = l_0 (AF - 3BE + 2CD) - l_1 (AE - 4BD + 3C^2).$$

Die Kovariante $g_4$ liefert sogleich die beiden Invarianten vierter und sechster Dimension

$$J_{IV} = G_0 G_4 - 4 G_1 G_3 + 3 G_2^2$$

$$J_{VI} = G_0 G_2 G_4 - G_0 G_3^2 - G_1^2 G_4 + 2 G_1 G_2 G_3 - G_2^3,$$

während mittelst der Kovariante $g_4$ auf dem gleichen Wege die Invarianten 10ter und 15ter Dimension $J_X = D_6(f)$ und die schiefe Invariante $J_{XV}$ vom Gewicht 45 erhalten werden können. Mittelst der Wurzeldifferenzen kann man die symmetrische Summe bilden:

$$J_{XV} = A^{15} \sum (x_0 - x_1)^{10} (x_2 - x_3)^{10} (x_4 - x_5)^{10} (x_0 - x_2)^5 \times$$
$$\times (x_1 - x_4)^5 (x_2 - x_5)^5 (x_3 - x_4)^2 (x_1 - x_5)^2$$

Wir beschränken uns indessen auf die Ableitung des Ausdruckes für $J_{IV} = L$, für welchen früher die allgemeine Form $L = [f g_6]_6$, $\mathfrak{L} = 6[h_4 h_4]_1$, $j_4 = L x^{4m-24} + \cdots$ resp. $j_4 = \mathfrak{L} x^{4m-24} + \cdots$

Digitized by Google

aufgestellt worden ist, und bemerken nur, daß man drei verschiedene Ausdrücke erhalten kann, je nachdem man die Invarianten $6[g_4 g_4]_4$ oder $\frac{1}{2}[g g]_8$ oder $[f g_6]_6$ zu Grunde legt. Diesen entsprechen die bereits Art. 9* gegebenen Ausdrücke durch die Wurzeldifferenzen:

$$J_{IV} = *A^4 \sum (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^4 (x_4 - x_5)^4,$$

$$J_{IV} = *A^4 \sum (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_5 - x_2)^2,$$

$$J_{IV} = *A^4 \sum (x_0 - x_1)^2 (x_1 - x_2)^2 (x_2 - x_3)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_4 - x_5)^2 (x_5 - x_0)^2;$$

sie unterscheiden sich voneinander durch Vielfache von $J_{II}^2$.

Man erhält durch eine leichte Rechnung für

$$L = \begin{vmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & E \\ C & D & E & F \\ D & E & F & G \end{vmatrix}, \quad \mathfrak{L} = J_{II} J_{II} - 36 L:$$

$$L = ACEG - ACF^2 - AD^2G + 2ADEF - AE^3 - B^2EG + \\ + B^2F^2 + 2BCDG - 2BCEF - 2BD^2F + 2BDE^2 - \\ - C^3G + 2C^2DF + C^2E^2 - 3CD^2E + D^4.$$

Die Einführung der assoziierten Kovarianten ergibt:

$$f^6 L = f_2 f_4 f_6 - f_2 f_5^2 - f_3^2 f_6 + 2 f_2 f_3 f_4 - f_4^3 - f_2^2 f_6 + \\ + 2 f_2^2 f_3 f_5 + f_2^2 f_4^2 - 3 f_2 f_3^2 f_4 + f_3^4,$$

$$f^4 L = f^3 g_6 J_{II} - 9 f^2 g_4^2 + g g_6^2 + 4 g^2 g_4^2 - 2 g_4 g_6 h,^1)$$

---

1) Die Rechnung läßt sich etwas abkürzen, wenn man in dem Ausdruck von

$$\frac{1}{2}[g_4 g_4]_4 = G_0 G_4 - 4 G_1 G_3 + 3 G_2^2 = \frac{1}{12}\mathfrak{L}$$

die Werte substituiert,

für $G_0 = AE - 4BD + 3C^2$: $\quad f_4 + 3 f_2^2 = f^2 g_4$,

für $G_1 = \frac{1}{2}(AF - 3BE + 2CD)$: $\quad \frac{1}{2} f_5 + f_2 f_3 = \frac{1}{2} f^2 g_5$,

für $G_2 = \frac{1}{6}(AG - 9CE + 8D^2)$:

$$\frac{1}{6} f_6 - \frac{1}{2} f_3 f_4 + \frac{1}{3} f_3^2 = f^2 (\frac{1}{6} f^2 J_{II} - 3 f g_6 + g g_4),$$

für $G_3 = \frac{1}{2}(BG - 3CF + 2DE)$: $\quad -\frac{1}{2} f_3 f_5 + f_6 f_4 = f^2 (\frac{3}{2} g g_6 - g_4 h)$,

für $G_4 = CG - 4DF + 3E^2$:

$$f_3 f_6 - f_5 f_5 + 3 f_4^2 = f^2 (3 f^2 g_4^2 - f^2 g J_{II} + 18 f g g_6 - 15 g^2 g_4 + 4 g_6 h).$$

Digitized by Google

wo das Aggregat $g g_8^2 + 4 g^3 g_4^2 - 2 g_4 g_8 h$ durch $f^2$ teilbar sein muß, was sich auch direkt verifizieren läßt und zu Gleichungen führt von der Form:

$$\mathfrak{f} g + 2 f_0 g_8 = f g_{12}, \quad g g_4^2 + g_{12} = f g_6 \quad \text{und} \quad f L = g_6 J_n - g_6.$$

14*.

Die in den Artt. 8 und 9 abgeleiteten Sätze von Hermite und Brioschi führen zur kanonischen Transformation der bikubischen Gleichung, wenn man $x$ durch

$$\xi = \frac{g_8}{g}, \quad g^3 d\xi + 8[g g_8] dx = 0$$

eliminiert, also

$$h = g_8, \quad m = 6, \quad n = 8, \quad \mu = 2 \quad \text{und} \quad \nu = 3$$

setzt. Auch entspricht nach dem Früheren der Formel $\xi_i = \frac{h(x_i)}{g(x_i)}$ eine andere $x_i = \frac{\mathfrak{h}(\xi_i)}{\mathfrak{g}(\xi_i)}$, die auf elementarem Wege gefunden werden kann. Wegen

$$g = -\tfrac{1}{2}[ff] \quad \text{und} \quad g_8 = 2[f g_4] \quad \text{folgt aber für } f x_i = 0:$$

$$g = f_1 f_1 \quad \text{und} \quad g_8 = 2 f_1 g_4,$$

sodaß man für $x = x_i$

$$\xi = 2 \frac{g_4}{f_1}$$

einführen kann. Dadurch wird

$$h = g_4, \quad n = m - 2 = 4, \quad \nu = 2,$$

und man erhält:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_0 \xi^6 + \mathfrak{A}_1 \xi^5 + \mathfrak{A}_2 \xi^4 + \mathfrak{A}_3 \xi^3 + \mathfrak{A}_4 \xi^2 + \mathfrak{A}_5 \xi + \mathfrak{A}_6$$

nebst $\mathfrak{A}_0 = D_6(f)$. Mithin werden die Invarianten $\mathfrak{A}_i$ von der Dimension

$$(\nu - 1) i + 2(m - 1) = i + 10,$$

und da die bikubische Funktion $f(\overset{6}{x})$ keine Invarianten von der 11ten und 13ten Dimension besitzt, so müssen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_3$ verschwinden, sodaß die Gleichung hervorgeht:

$$\mathfrak{f} = \mathfrak{A}_0 \xi^6 + \mathfrak{A}_2 \xi^4 + \mathfrak{A}_4 \xi^2 + \mathfrak{A}_5 \xi + \mathfrak{A}_6 = 0.^{1})$$

1) Brioschi, *Annali di Matem.* Ser. II, T. XI, p. 303 (1883).

Digitized by Google

Setzt man nun

$$z = \xi \sqrt{\mathfrak{A}_0},$$

so ergibt sich die *kanonische Form* der bikubischen Gleichung

$$\xi^6 + \mathfrak{A}_2 \xi^4 + \mathfrak{A}_4 \mathfrak{A}_0 \xi^2 + \mathfrak{A}_6 \mathfrak{A}_0^2 = - \mathfrak{A}_5 \mathfrak{A}_0^{5/2} \xi,$$

wofür wir

$$\xi^6 + 15 A_2 \xi^4 + 15 A_4 \xi^2 + A_6 = - A_5 z \sqrt{D_6}^{1})$$

schreiben wollen, also in formeller Übereinstimmung mit der bikubischen Resolvente von Jacobi.

Man kann daraus schließen, daß, wenn eine bikubische Gleichung von solcher Beschaffenheit ist, daß ihre kanonische Form sich auf die Jacobi'sche Resolvente einer Gleichung fünften Grades zurückführen läßt, die bikubischen Wurzeln durch die Wurzeln der letzteren Gleichung ausgedrückt werden können, mit anderen Worten, die Gleichung fünften Grades erscheint dann als Resolvente der Gleichung sechsten Grades.

Um die dazu erforderlichen Bedingungen etwas näher ins Auge zu fassen, legen wir die stets herbeiführbare kanonische Form des Art. 9* für die Gleichung fünften Grades zu Grunde, und setzen

$$B = D = 0, \quad \text{sodaß} \quad f(\overset{5}{x}) = A x^4 + 10 C x^3 + 5 E x + F,$$

mit der Jacobi'schen Resolvente für $z = \frac{y}{\sqrt{20}} = \frac{A}{\sqrt{20}} S \pm x_0 x_1$:

$$z^6 - 5 G z^4 + 5 (G^2 - 2 A') z^2 - 5 (G^3 + 2 G A' + 16 H^2 + A_1 K) =$$
$$= \pm A z \sqrt{D_5}.$$

Hier sind nach dem Früheren wegen $B = D = 0$ die Werte zu substituieren:

---

1) Selbstverständlich läßt sich eine der vier Konstanten dieser Formel entfernen, wenn man $z$ mit einem passenden Faktor multipliziert. Bekanntlich hat Herr Brill im Bd. 20 der *Mathem. Annalen* S. 345/6 die beiden kanonischen Formen abgeleitet:

$$x^6 + 2px^5 + 3qx^4 + 4rx^3 + 3x^2 + 2px + q,$$

und

$$x^6 + ax^4 + 6bx^3 + cx^2 + 1,$$

welche gleichfalls nur *drei* wesentliche Konstanten enthalten, und von denen die letztere auch von Stephanos erhalten worden ist.



Digitized by Google

$$A_1 = -AC, \quad A' = -A^2E^2 + 4AC^2E - 3C^4, \quad G = AE + 3C^2,$$
$$H = ACE - C^3, \quad K = A^2F^2 + 16ACE^2 + 48C^3E,$$
$$D_5 = A^4F^4 + 32ACF^2(5A^2E^2 - 45AC^2E + 108C^4) +$$
$$+ 256AE^3(A^2E^2 - 10AC^2E + 25C^4).$$

In der Funktion $f(\overset{5}{x})$ sind die Koeffizienten $ACEF$ so zu bestimmen, daß die Jacobi'sche Resolvente mit der bikubischen kanonischen Gleichung identifiziert werden kann. Dies geschieht durch die Erfüllung der Bedingungsgleichungen:

$$G = -3A_2, \quad G^2 - 2A' = 3A_4$$
$$G^3 + 2GA' + 16H^2 + A_1 J_{IV} = -\tfrac{1}{5}A_6 \quad \text{und} \quad A^2 D_5 = A_5^2 D_6^3.$$

Es ist nun bemerkenswert, daß mittels *quadratischer* Gleichungen die Werte von

$$A^2F^2 = \alpha, \quad AE = \beta \quad \text{und} \quad C = \gamma$$

gefunden werden können aus:

$$\beta + 3\gamma^2 = -3A_2, \quad 3\beta^2 - 2\beta\gamma^2 + 15\gamma^4 = 3A_4$$

und

$$\beta^3 - 11\beta^2\gamma^2 + 35\beta\gamma^4 - 25\gamma^6 + \alpha\gamma = \tfrac{1}{5}A_6,$$

während

$$A^2 D_5 = \alpha^2 + 32\alpha\gamma(5\beta^2 - 45\beta\gamma^2 + 108\gamma^4) +$$
$$+ 256\beta^3(\beta^2 - 10\beta\gamma^2 + 25\gamma^4) = A_5^2 D_6^3$$

sein muß. Da die Koeffizienten $A_2 A_4 A_5 A_6$ nebst der Diskriminante $D_6$ als Invarianten von den Koeffizienten in $f(\overset{5}{x})$ rational abhängen, so ergibt die Elimination von $\alpha\beta\gamma$ aus den vorstehenden Formeln in rationaler Form die Bedingungsgleichung, welche zwischen den Koeffizienten der bikubischen Funktion $f(\overset{6}{x})$ erfüllt sein muß, damit ihre Wurzeln durch die der Funktion $f(\overset{5}{x})$ auf dem hier angedeuteten Wege rational ausdrückbar werden.

Wir schließen mit der Bemerkung, daß für Gleichungen *fünften* Grades und reelle Werte von $x$, bei Benutzung der typischen Gleichung, der Sturm'sche Satz auf die Zeichenwechsel in der Reihe der folgenden Größen führt:

$$1, \quad g, \quad 9fg_2 + 5gg_3, \quad 12g_2g_4 + 4g_3^2 - 216g_5^2 - Kg$$
$$\text{und} \quad D_5 = K^2 - 128 J_{VIII}.$$

---

Digitized by Google

## Inhaltsübersicht zu Teil III.

Seite

Über Gleichungen fünften und sechsten Grades. . . 139

Art. 1*—2*. Allgemeine Betrachtungen über assoziierte und *permanente* Kovarianten . . . . . 139

Art. 3*—4*. Darstellung durch symmetrische Funktionen der Wurzeldifferenzen von $f$ . . . . . 144

Art. 5*. Die Gleichungen *fünften* Grades in der typischen Form nebst ihren assoziierten Kovarianten . . . . . 149

Art. 6*—7*. Entwicklung einiger weiteren zugehörigen Kovarianten und Invarianten . . . . . 151

Art. 8*—9*. Die Sätze von Hermite und Brioschi zur Ableitung der *kanonischen* Form für die Gleichung fünften Grades . . 156

Art. 10*. Sätze von Jacobi und Eisenstein: Aufstellung der *Jacobischen Resolvente* nebst deren Verallgemeinerung . . . 162

Art. 11*. Die *bikubischen* Gleichungen in der typischen Form nebst den assoziierten Kovarianten . . . . . 164

Art. 12*—13*. Die einfachsten sonstigen Kovarianten und Invarianten . . . . . 166

Art. 14*. Ableitung der *kanonischen* Form nebst Identifizierung mit der Resolvente von Jacobi. Bedingungsgleichung für die Koeffizienten einer bikubischen Funktion, wenn diese eine Graderniedrigung um eine Einheit gestatten, und eine Gleichung fünften Grades als ihre Resolvente auftreten soll 170

Inhaltsübersicht und Druckfehler . . . . . 173

Einige Zusätze und Berichtigungen . . . . . 174

Art. 1. zu den *Berichten* vom 4. März 1889 . . . . . 174

Art. 2. zu der *Abhandlung* über die Mondbewegung (1899) . . . 175

Errata . . . . . 176

---

## Druckfehler.

I. S. 222, Z. 7 v. u. lies $(-1)^q$ statt $(-1)^s$

I. S. 236, Z. 14 v. u. lies „stehen: namentlich sind für reelle Werte von $x$ die Wurzeln $y$ und $z$ gleichzeitig reell und komplex".

II. S. 327, „ 1 v. u. lies $z_0 - z_1 j + z_2 j^2$

II. S. 329, „ 10 v. o. lies $-2g^3$ statt $-3g^3$, und füge die Worte hinzu: „Dabei hat man $ax+b$ durch $\{(ax+b)z+(a'x+b')^2\}\varrho$ und $a'x+b'$ durch $\{(a'x+b')z+(ax+b)^2\}\varrho^2$ zu ersetzen."

II. S. 335, „ 16 v. u. lies „Wurzeln $x$ von $h$"

II. S. 338, „ 4 v. u. lies $E(Q \mp Q')$ statt $E(Q \mp Q'')$

II. S. 339, am Schlusse des Art. 22 einzuschalten:

$$PQ' = (\lambda' - \lambda)P'' + P'Q, \quad Q'R = (\lambda - \lambda')R'' + QR'.$$

II. S. 339, „ 2 u. 3 v. u. lies $2Q'Q' - P'R'' - P''R'$



Digitized by Google

II. S. 343, Z. 9 v. o. lies „$\lambda$ in $\lambda f$, während gleichzeitig
$P^2 + 2Qx + R = \sqrt{g - \lambda f}$ durch $s^2 + \frac{hs}{g - \lambda f} + g + 2\lambda f$
zu multiplizieren ist."

II. S. 351, „ 12 v. o. lies $H = 4\lambda_0\lambda_1\lambda_2$

II. S. 357, „ 9 v. u. lies $w = -\frac{3H}{G}$

II. S. 358, „ 13 v. u. lies $\mathfrak{z} + \mathfrak{f}$, oder $\mathfrak{z} = \frac{\mathfrak{f}}{x - \xi} - \mathfrak{f}$,

II. S. 360, „ 10 v. u. in der ersten Spalte lies 0.0

---

## Einige Zusätze und Berichtigungen.

Ich möchte die Gelegenheit benutzen, um zu ein paar früheren Aufsätzen einige Zusätze und Berichtigungen zu geben.

1.

In meiner Abhandlung *über den Zusammenhang der Thetafunktionen mit den elliptischen Integralen* (Leipziger *Berichte* vom 4. März 1889, sowie *Math. Annalen* Bd. 34, S. 395) ist die bekannte Additionsformel

$$(A) \qquad \vartheta^2\vartheta_1(u+v)\vartheta_1(u-v) = \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v$$

an die Spitze gestellt und in Art. 4 die elementare Multiplikationsgleichung

$$(C) \quad \vartheta_2(u,q)\vartheta_2(v,q) = \vartheta_2(u+v,q^2)\vartheta_2(u-v,q^2) + \vartheta_2(u+v,q^2)\vartheta_2(u-v,q^2)$$

benutzt. Es ist dabei unterlassen zu bemerken, daß die Formel $(A)$ leicht aus $(C)$ hergeleitet werden kann. In der Tat braucht man für $q = e^{-\lambda}$ nur $u$ um $\frac{\pi + h i}{2}$, $v$ um $\frac{h i}{2}$ zu ändern, um die Gleichung zu erhalten:

$$\vartheta_1 u\,\vartheta_2 v = \vartheta_1(u+v,q^2)\vartheta(u-v,q^2) + \vartheta(u+v,q^2)\vartheta_1(u-v,q^2).$$

Durch bloße Buchstabenvertauschung folgen hieraus die Gleichungen

$$\vartheta_1\left(\frac{u+v}{2}, \sqrt{q}\right)\vartheta_2\left(\frac{u-v}{2}, \sqrt{q}\right) = \vartheta_1 u\,\vartheta v + \vartheta u\,\vartheta_1 v,$$

$$\vartheta_1\left(\frac{u-v}{2}, \sqrt{q}\right)\vartheta_2\left(\frac{u+v}{2}, \sqrt{q}\right) = \vartheta_1 u\,\vartheta v - \vartheta u\,\vartheta_1 v,$$

nebst

$$\vartheta_1\left(\frac{u+v}{2}, \sqrt{q}\right)\vartheta_2\left(\frac{u+v}{2}, \sqrt{q}\right) = \vartheta\,\vartheta_1(u+v),$$

$$\vartheta_1\left(\frac{u-v}{2}, \sqrt{q}\right)\vartheta_2\left(\frac{u-v}{2}, \sqrt{q}\right) = \vartheta\,\vartheta_1(u-v).$$

Multipliziert man diese Ausdrücke miteinander, so geht die gesuchte Gleichung $(A)$ hervor.

Digitized by Google

2.

Zum Inhalte der in Band XXV der *Abhandlungen der mathem.-physischen Klasse* enthaltenen Arbeit *über die Differentialgleichungen der Mondbewegung* erlaube ich mir aus einem an Herrn Professor Harzer in Kiel gerichteten Schreiben vom Mai 1899 das Folgende mitzuteilen:

„Der Inhalt der auf S. 155 beigefügten Anmerkung bedarf vielleicht einer näheren Erläuterung. Die Zerlegung der Störungswerte $\delta\chi$ $\delta\sigma$ und $\delta\Phi$ in zwei Teile ist S. 135 zu dem Zwecke erfolgt, in der Bewegung der Apsiden- und der Knotenlinie die der Zeit proportionalen Glieder abzutrennen, so daß $\chi_1$ $\sigma_1$ und $\Phi_1$ die *mittleren* Geschwindigkeiten dieser Bewegungen darstellen. Allein die Gültigkeit der in der Abhandlung entwickelten Störungsformeln ist von dieser Bedeutung unabhängig, dieselben gelten vielmehr für jede beliebige Zerlegung

$$\delta\chi = \delta\chi_1 + \delta\chi_2 \text{ usw.}$$

Auch ist bei der numerischen Berechnung die *strenge* Durchführung jenes Zerlegungsprinzips keineswegs notwendig und für kleinere Glieder jedenfalls unwesentlich. Deshalb hat Hansen die numerische Bestimmung von $y$ oder $\chi_1$ auf eine formell abweichende Bedingung gegründet, von der sich indes leicht zeigen läßt, daß sie für die Mondstörungen in der ersten Approximation materiell das nämliche Resultat liefert, wie die vorher gegebene Definition.

Hierzu entnehmen wir den Wert von $\chi_1$ aus der Gleichung

$$\chi' = \chi_1 + \chi_2 = \frac{\Delta}{\mu e}\{-\cos f\delta\mathfrak{R} + (1+\frac{r}{p})\sin f\delta\mathfrak{S}\}$$

und substituieren ihn in den für $(\frac{\partial\delta L}{\partial t})$ S. 140 entwickelten Ausdruck. Bei Beschränkung auf die Glieder erster Ordnung dürfen wir $\psi$ durch $f$ ersetzen und den Index o weglassen, wodurch

$$(\frac{\partial\delta L}{\partial t}) = \frac{2\bar{r}}{\Delta}\{\sin(f-\bar{f})\delta\mathfrak{R} + (1+\frac{r}{p})\cos(f-\bar{f})\delta\mathfrak{S} - \frac{r}{p}(1+\frac{p}{2\bar{r}})\delta\mathfrak{S}\} - \\ - 2\chi_1\frac{\bar{r}e\sin\bar{f}}{p}$$

hervorgeht. Die Elimination von $\chi_1$ liefert

$$2\chi_1\frac{\bar{r}e\sin\bar{f}}{p} = -2\chi_2\frac{\bar{r}e\sin\bar{f}}{p} + \frac{2\bar{r}\sin\bar{f}}{\Delta}\{-\cos f\delta\mathfrak{R} + (1+\frac{r}{p})\sin f\delta\mathfrak{S}\},$$

mithin

$$(\frac{\partial\delta L}{\partial t}) = \frac{2\bar{r}}{\Delta}\{\sin f\cos\bar{f}\delta\mathfrak{R} + (1+\frac{r}{p})\cos f\cos\bar{f}\delta\mathfrak{S} - \frac{r}{p}(1+\frac{p}{2\bar{r}})\delta\mathfrak{S}\} + \\ + 2\chi_2\frac{\bar{r}e\sin\bar{f}}{p},$$

Digitized by Google

wo

$$\delta \mathfrak{R} = \delta\mu \frac{\partial \Omega}{\partial r}, \quad \delta \mathfrak{S} = \delta\mu \frac{1}{r} \frac{\partial \Omega}{\partial f}$$

zu substituieren bleiben. Bei der Entwickelung in trigonometrische Reihen ergeben sich hieraus nur Sinusglieder, woraus folgt, daß bei der Integration keine der Zeit proportionalen Glieder auftreten können. Damit ist der Nachweis erbracht, daß die adoptierte Definition von $\chi_1$ mit der von Hansen vorgenommenen Bestimmung von $\chi$ wenigstens für die Glieder erster Ordnung in Übereinstimmung steht."

Wir erinnern hier noch an S. 36 der *Fundamenta nova investigationis orbitae verae quam Luna perlustrat*, wo Hansen nach Aufstellung von fünf Differentialgleichungen für die Elemente die Bemerkung hinzufügt:

*„Aequationem pro $d\chi = d\varpi + \cos i\, d\Theta$ omisi, quia hac opus non est. Quinque enim aequationes praecedentes ad locum corporis coelestis per methodum nostram determinandum sufficiunt, quamquam locus corporis coelestis alicuius non minus quam aequationes praecedentes ipsae ex elementis sex pendet, quod paradoxon expendendum lectori perito relinquo."* Vergl. auch *Astron. Nachr.* Nr. 425, Art. 20.

*Errata* zu Bd. XXV der *Abhandlungen* (Mondbewegung).

S. 149, Z. 10 v. o. lies $\cos rr_2$ statt $\cos rr_1$.
S. 156, Z. 14 v. o. lies $\delta \mathfrak{U}_2$ statt $\delta U_2$.
S. 156, Z. 16 v. o. *S*, 140 statt 142.

*Errata* zu Bd. XXVII der *Abhandlungen*

(Das Symbol $\left(\frac{n}{m}\right)$, als Ergänzung zu S. 752).

S. 676, Z. 6 v. o. lies 433* statt 434*.
S. 678, Z. 9 v. u. lies „normalen" statt „ungeraden".
S. 682, Z. 2 v. u. lies $\pm N \equiv 1$ statt $N \equiv 1$.
S. 691, Z. 10 v. o. lies „während" statt „mithin auch".
S. 699, Z. 2 v. u. lies $\mathfrak{p} \equiv \pm N$ statt $p \equiv N$.
S. 699, Z. 1 v. u. fehlt der Faktor $(-1)^{\frac{N-1}{2}}$.
S. 700, Z. 3 v. o. lies $i^{\frac{1}{2}q}$ statt $i^{\frac{1}{2}q}$.
S. 703, Z. 3 v. o. lies $\omega_1$ statt $\omega_i$.
S. 727, Z. 3 v. u. lies $l \equiv \frac{1}{2}q$ statt $l = \frac{1}{2}q$.
S. 742, Z. 7 v. o. lies $q \equiv 0$ statt $q \equiv 1$.
S. 747, Z. 9 v. u. lies $j^{\alpha-\beta}$ statt $j^{\alpha-\beta}$.

---

Druckfertig erklärt 20. IV. 1904.]

Digitized by Google

SITZUNG VOM 11. JANUAR 1904.

# Einige Bemerkungen über die Untersuchungsmethoden der Großhirnrinde, insbesondere des Menschen.

Dem Zentralkomitee für Hirnforschung vorgelegt

von

Paul Flechsig.

(Fortsetzung und Schluß.)

Die vorstehend skizzierte Flächengliederung der menschlichen Großhirnoberfläche auf Grund der myelogenetischen Differenzierung beansprucht, was die Hauptgrundzüge anlangt, naturgemäß auch für das ausgebildete Organ Geltung. Nicht nur die Unterschiede in bezug auf die Form und Anordnung der *Ganglienzellen* in den verschiedenen Feldern sind von Dauer; auch die Veränderungen, welche nach dem vierten Lebensmonat an den Leitungsbahnen vor sich gehen, bestehen allem Anscheine nach *nicht* sowohl in der Bildung weiterer Neuronengruppen, in der nachträglichen Entstehung vollständig neuer Leitungen, welche die Physiognomie des zentralen Mechanismus von Grund auf ändern, sondern es handelt sich im wesentlichen nur um die Vervollständigung der Kollateralsysteme durch Auswachsen schon angelegter Axonen und um die Ummarkung zahlreicher Kollateralen und einzelner mehr netzförmig angeordneter Fasern zwischen den bereits markhaltigen Faserzügen bez. Bündeln. Um hier zur Klarheit zu gelangen, bleibt nichts übrig, als Serienschnitte aus dem normalen ausgebildeten Gehirn (Weigert-Pal-Präparate) mit solchen viermonatlicher Kinder Schnitt für Schnitt zu vergleichen. Hierbei gelingt es *nicht*, dort Stabkranzbündel nachzuweisen, welche nicht schon bei letzteren vorhanden sind. Die Angaben in der Literatur über einen schon makroskopisch sicht-

Digitized by Google

baren Stabkranz in der dritten Temporalwindung, dem Gyrus angularis etc., beruhen, wie gutgefärbte feine Schnitte zeigen, auf der Verwechslung von Balken- und Projektionsfasern.

Die augenfälligsten Umwandlungen in bezug auf den Reichtum an markhaltigen Fasern gehen in der Großhirnrinde selbst vor sich, in welcher noch bei fünfmonatlichen Kindern im Verhältnis zum reifen Alter besonders in den Terminalgebieten sehr wenig markhaltige Fasern vorhanden sind, so daß an WEIGERT-Präparaten streckenweise noch ganze Schichten von Fasernetzen bez. Horizontalfasern vermißt werden. Ein Ausgleich der Unterschiede, welche die verschiedenen Felder noch im vierten Monat in bezug auf die Ausstattung mit *Projektionssystemen* zeigen, tritt nicht ein.[1]) Die Überleitung dieses Zustandes in den vollständig ausgebildeten nimmt überaus lange Zeit in Anspruch, so daß sie selbst zu Ende der Pubertät noch nicht abgeschlossen ist. (KAES u. a.)

Es kommt dabei zu einer Vervollständigung der Verbindungen verschiedener Punkte bez. Felder der Rinde untereinander[2]), nicht aber der Rinde mit subkortikalen Zentren bez. peripheren Endorganen. Aber auch wenn die Markbildung in der Rinde völlig beendet ist, sind die Unterschiede in der Zahl und Anordnung der Markfasern in den verschiedenen Rindenfeldern *nicht ausgeglichen*, sondern treten bei aufmerksamer Beobachtung kaum minder deutlich hervor, wie die Flächengliederung am Neugeborenen. Die mit Sinnesleitungen bezw. motorischen Projektionssystemen ausgestatteten Felder haben beim Erwachsenen eine wesentlich andere Struktur als die jener Faserzüge entbehrenden Zonen. Der Reichtum an horizontal und schräg verlaufenden markhaltigen Fasern ist auch beim Erwachsenen in den primären Sinnessphären ein viel größerer als z. B. in den Terminal-

1) Wieviel Fasern nötig sein würden, um die gesamten Windungen bez. Felder gleichmäßig mit Projektionssystemen zu versorgen, ersieht man leicht an dem Medianschnitt des Balkens. Derselbe führt *mindestens um das Dreifache mehr* Fasern als der Gesamtquerschnitt des Projektionssystems beträgt. Die gesamte graue Masse des Thalamus, aus welcher angeblich Stabkranzbündel für sämtliche Windungen hervorgehen, erreicht noch nicht das Volumen der grauen Rinde einer einzigen mittelgroßen Windung wie z. B. die dritte Stirnwindung.

2) Zweifellos ist hier ein Objekt für Untersuchungen von Tragweite gegeben, welche zahlreiche Kräfte zu beschäftigen geeignet sind.

Digitized by Google

gebieten.[1]) Die fraglichen Elemente gehen zum größten Teile aus Fasern der Sinnesleitungen hervor, und sie müssen infolgedessen da, wo letztere fehlen, in der Rinde viel spärlicher sein als in den Sinnessphären. Die Struktur der Hirnrinde spiegelt also am Erwachsenen die myelogenetischen Rindenfelder noch so deutlich[2]) wieder, daß von einem Ausgleich der Unterschiede, welche im frühesten Kindesalter vorhanden sind, nicht die Rede sein kann. Im allgemeinen kann man die Unterschiede, welche beim Erwachsenen hervortreten, kurz dahin präzisieren, daß an der Rinde der Sinnessphären die Fasern überaus reich entwickelt sind, welche letztere mit der Peripherie und die einzelnen Teile jeder Sinnessphäre untereinander auf das innigste verbinden (intrakortikale Assoziationssysteme), während in den Feldern 16—36 die (radiären) Fasern durchaus überwiegen, welche *verschiedene Windungen* und Felder miteinander verknüpfen (extrakortikale Assoziationssysteme).

Im übrigen läßt sich auch am erwachsenen Gehirn, an stark aber nicht völlig entfärbten Weigert-Pal-Präparaten nachweisen, daß ganz wie bei drei- bis viermonatlichen Kindern gewisse Stabkranzbündel, welche direkten Laufes auf die nächstliegende Rinde zuzustreben scheinen, unweit derselben plötzlich ihre Richtung ändern und nach weit entfernten Bezirken verlaufen, wie z. B. der vordere Sehhügelstiel. Diese Verhältnisse sind speziell in der Anatomie des Gehirns von Dejerine auf den Abbildungen gut dargestellt, während der Text des Werkes mit den durchaus objektiv gehaltenen Zeichnungen vielfach in Widerspruch steht. Die *exakte* Anatomie des ausgebildeten normalen Gehirns liefert tatsächlich *keinerlei sichere Beweise* gegen die oben gegebene anatomische Theorie der myelogenetischen Rindenfelder — sie stützt dieselbe nur!

Da aber am *normalen ausgebildeten* Gehirn die Verhältnisse

---

1) Der Unterschied ist ein so beträchtlicher, daß die Faserarmut der Terminalgebiete und vieler Randzonen mehrfach selbst zuverlässige Forscher verleitet hat, die Erscheinung als pathologisch (Faserschwund) aufzufassen und zu beschreiben. Auch Kaes, welcher zuerst auf diese Unterschiede hingewiesen hat, ist sich über deren genauere Lokalisation und Bedeutung nicht klar geworden.

2) Auch z. B. Feld 12 des Gyrus subangularis hebt sich durch seinen Reichtum an Horizontalfasern von der gesamten Umgebung deutlich ab!

Digitized by Google

des Faserverlaufs vielfach zu kompliziert sind, um die Verfolgung der einzelnen Leitungen auf weite Strecken zu gestatten, auch da wo die myelogenetische Methode völlig klare Anschauungen vermittelt, gewährt die Untersuchung jener Gehirne kaum wesentlich neue Aufschlüsse über die Flächengliederung der Großhirnrinde. Weit mehr leistet in dieser Hinsicht die *Differenzierung* der zentralen Fasermassen *durch pathologische Prozesse*, speziell die *sekundären Degenerationen* und das klinische Studium der bei Verletzung einzelner Rindenfelder auftretenden Symptome. Tatsächlich sind diese Forschungsmethoden weit wichtiger als vergleichende Anatomie und Physiologie, wenn es gilt, die Bedeutung jedes einzelnen myelogenetischen Rindenfeldes *beim Menschen* klarzustellen.

Ist doch nicht einmal für die Anthropoiden anzunehmen, daß sie die myelogenetischen Felder des Menschen sämtlich in gleicher Form und gleicher relativer Ausdehnung besitzen, geschweige für die niederen Affen und die übrigen Säuger. Zweifellos sind bei diesen Tieren im allgemeinen mehr oder weniger dieselben Prinzipien der Oberflächengliederung des Gehirns realisiert wie beim Menschen — im einzelnen sind aber die Unterschiede so beträchtlich, daß es notwendig ist, für den letzteren alle wichtigen Einzelheiten besonders festzustellen, um den abweichenden Befunden am Tier nicht von vornherein irgendwelche selbständige Beweiskraft für den Menschen zuzuschreiben.

Für den Nachweis der leitenden Verbindungen der einzelnen Rindenfelder kommt unter den pathologischen Methoden den *sekundären Degenerationen* die größere Bedeutung zu. Aber auch hier gilt es, sich von vornherein vor einer Überschätzung ihrer Leistungsfähigkeit zu hüten. Experimentell am Tier erzeugt, wo wenigstens für gewisse Spezies ein fast unerschöpfliches Material zu Gebote steht, liefern die sekundären Degenerationen besonders bei Anwendung der MARCHIschen Methode vielfach außerordentlich klare Aufschlüsse. Läßt sich doch unter sonst günstigen Verhältnissen auf diesem Wege selbst eine einzelne Faser über weite Strecken, ja durch die gesamte Länge des Medullarrohres verfolgen. Ganz anders liegen die Verhältnisse beim Menschen! Speziell für die Feststellung der den einzelnen Rindenfeldern eigenen Leitungen ist das verfügbare Untersuchungsmaterial so spärlich, daß selbst die unter besten Bedingungen arbeitenden Forscher wie DEJERINE u. a. kaum für *ein einziges* Rindenfeld die not-

Digitized by Google

wendigsten Unterlagen aufzuweisen vermögen. Es ist lediglich ein günstiger Zufall, wenn einem Forscher ein Fall unter die Hände kommt, der allen wissenschaftlichen Anforderungen an Beweiskraft genügt, d. h. ein Fall reiner Rindenverletzung, wo *lediglich* zu der lädierten Rinde in Verbindung stehende Faserzüge degeneriert sind — nicht auch vorüberziehende, und wo sich diese Verletzung auf *ein* myelogenetisches Rindenfeld beschränkt. Kaum jemals kommen demselben Forscher mehrere völlig gleiche Fälle dieser Art vor, sodaß er die Befunde auf *Gesetzmäßigkeit* (Allgemeingültigkeit) zu prüfen vermag, wozu unter anderem auch die Anwendung verschiedener Schnittrichtungen gehört. Es handelt sich hier um Schwierigkeiten, gegenüber denen der Einzelne machtlos ist, und welche vielleicht *durch Zentralinstitute* für Hirnforschung, *durch Kooperation* zahlreicher Ärzte, Hospitäler usw. überwunden werden können. Von einem wirklich planmäßigen Vorgehen kann aber kaum jemals die Rede sein. Tatsächlich ist das, was die Pathologie vorläufig zu leisten vermochte, nur Stückwerk, und man darf sich angesichts der in zahlreiche moderne Lehrbücher übergegangenen, zum Teil recht groben Irrtümer, welche das Studium der sekundären Degeneration am Menschen geliefert hat, geradezu fragen, ob die Methode nicht mindestens ebenso viel Schaden als Nutzen gebracht hat.

Wäre die Methode der sekundären Degeneration so überaus fruchtbar an gesicherten Aufschlüssen, wie dies z. B. von Monakow hinstellt, so würde es doch, nachdem dieselbe bereits über 50 Jahre geübt worden ist, möglich sein, mit ihrer Hilfe und lediglich auf sie gestützt eine exakte Einteilung der Hirnoberfläche in Felder verschiedener Einschaltungsweise zu geben. In Wirklichkeit würde sich eine solche Karte, soweit das menschliche Gehirn in Betracht kommt, höchst sonderbar ausnehmen. Mit Hilfe der sekundären Degeneration ist *am Menschen* auch nicht für ein einziges Fasersystem der Ursprungsbezirk bez. das Endgebiet in der Hirnrinde exakt abgegrenzt worden. So schroff dieser Satz erscheinen mag gegenüber der in der modernen Literatur weitverbreiteten Bewertung der sekundären Degeneration, so läßt sich doch seine Richtigkeit leicht beweisen. Ich verweise nur auf die nachfolgenden Bemerkungen über zwei derselben: Die Pyramidenbahn und die Sehleitung, deren Ursprünge und Verlauf beim Menschen mit Hilfe der sekundären Degeneration noch am besten festgestellt worden sind u. a. m.

Digitized by Google

Ich gebe nun einen kurzen Überblick über die bereits vorliegenden Befunde beim Menschen, füge aber zur Vergleichung noch einige experimentell am Tier gewonnene Aufschlüsse bei, wobei ich mich aber lediglich auf die Affen beschränke, da nur hier der Windungstypus zu entscheiden gestattet, inwiefern bei Verletzungen der Rindenoberfläche Zentren getroffen sind, welche bekannten des Menschen entsprechen. Die experimentellen Befunde an niederen Säugern werde ich erst später näher würdigen.

Ich beschränke mich streng auf die sekundären Degenerationen, welche *Faserzüge der Großhirnrinde* betreffen, seien es kortikopetale oder -fugale Leitungen; eine weitere Ausdehnung der Kritik würde zu weit führen.

Ich unterlasse es zunächst über die einzelnen Methoden zur Untersuchung der sekundären Degeneration mich zu äußern; ich werde bei den Einzelbefunden hierauf eingehen. Die aus der Degenerationsrichtung sich etwa ergebenden Aufschlüsse sind wenig sicher. Die speziell an den kortikalen Faserzügen bemerkbare Besonderheit, daß sie sowohl aufsteigend als absteigend, also bald in der Richtung der Leitung, bald entgegengesetzt degenerieren, beeinträchtigt nicht unwesentlich die Verwertbarkeit für die Physiologie.

Sowohl VON MONAKOW als DEJERINE grenzen in der Umgebung der Zentralfurche eine größere Rindenzone ab, welche sie beide als physiologisch zusammengehöriges Gebiet betrachten. Bei DEJERINE erscheint dasselbe als Secteur moyen de l'hémisphère, also einfach mit topographischer Bezeichnung, und umfaßt beide Zentralwindungen, den Fuß sämtlicher Stirnwindungen und den vorderen Teil beider Parietalwindungen. Dieselbe Zone, nur vermindert um Teile der 2. Parietalwindung, bildet VON MONAKOW (Hirnpathologie Fig. 108) als Zone der „motorischen Felder" ab. Beide Abgrenzungen erweisen sich bei näherer Untersuchung als Kunstprodukte, als Konglomerate richtiger und falscher Beobachtungen. Betrachte ich zunächst die DEJERINEsche Zone, so verhalten sich deren einzelne Bestandteile höchst verschiedenartig; irgend etwas *allen* Gemeinsames kommt den hier zusammengefaßten Rindenabschnitten nicht zu. Die Zone zerfällt in Wirklichkeit in mindestens *drei* Unterabteilungen, deren jede ihre Besonderheiten in bezug auf die leitenden Verbindungen hat. Nur ein Teil ist mit Projektionssystemen ausgestattet, wie nicht nur die Myelogenese, sondern nicht minder klar die sekundären Degenerationen zeigen

Digitized by Google

Ich teile zur Betrachtung der letzteren den Secteur moyen in drei Unterabteilungen und analysiere jede derselben besonders.

1. Die Zentralwindungen.

Bei Zerstörung der Zentralwindungen degenerieren mit Regelmäßigkeit außer unilateralen Assoziationssystemen und Balkenfasern nachfolgende Projektionssysteme:

1. Kortiko-spinale Leitungen, die Pyramidenbahn.
2. Kortiko-bulbäre Leitungen, zum Teil in der Hauptschleife (Flechsig) verlaufend.
3. Kortiko-pontine Leitungen (Arnoldsche Bündel).
   NB. 1—3 setzen den Großhirnschenkelfuß in seinen inneren $^3/_4$ zusammen.
4. Kortiko-thalamische Bahnen (lateraler Sehhügelkern).
5. Thalamo-kortikale Bahnen (ventro-lateraler Kern, Zentralkern, schalenförmiger Körper, Flechsig).
6. Linsenkern-Rindenbahnen (vom Globus pallidus ausgehend).
7. Bahnen der Subst. nigra Söm.
8. Kortiko-quadrigeminale Bahnen (den Thalamus durchquerend).
9. Bahnen des roten Kerns.
10. Bahnen der Hinterstrangkerne auf dem Weg der Hauptschleife.

Von diesen Leitungen sind beim Menschen nur die sub 1—5 völlig sicher gestellt. Bezüglich 6—10 bestehen noch Unklarheiten. Nr. 9 und 10 degenerieren wohl nur indirekt.

1. Die Degeneration der *Pyramidenbahn* bei Erkrankung der Zentralwindungen ist zwar bereits von Türk gefunden, aber erst von Charcot gewürdigt worden. Doch hat auch letzterer die Verteilung ihrer Ursprünge über die Zentralzone nicht völlig klargestellt, insofern, als er die vordere und hintere Zentralwindung als gleichwertig ansah und erst Dejerine auf die Beziehung der verschiedenen Höhenabschnitte zu den verschiedenen Querschnittsfeldern des Hirnschenkelfußes hingewiesen hat. Während nun Dejerine in dieser Hinsicht einen wichtigen Fortschritt angebahnt hat, unterscheidet auch er nicht prinzipiell die vordere und die hintere Zentralwindung, welche tatsächlich ein ganz verschiedenes Verhalten zu den Pyramidenbahnen zeigen. Die hintere Zentralwindung kann auf weite Strecken unterminiert sein, *ohne* daß es zur Degeneration dieser Bahnen oder irgend welcher anderer Bündel des Hirnschenkelfußes kommt, sofern nur der Stabkranz der vorderen Zentralwindung intakt ist. Die Pyramidenbahn geht auch nach diesen Befunden beim Menschen ganz über-

Digitized by Google

wiegend aus der vorderen Zentralwindung hervor, und zwar degeneriert sie in der Hauptsache nur bei Zerstörungen im Bereiche des mittleren und oberen Drittels sowie des Lobulus paracentralis. Bei Zerstörung des unteren Drittels ist die Zahl der degenerierten Pyramidenfasern so gering, daß sich *in der Regel* ein distinktes degeneriertes Areal innerhalb der Pyramide nicht abgrenzt; die fraglichen Bahnen der motorischen Hirnnerven verlaufen *in der Regel* mit der Schleifenschicht bezw. an der Grenze der letzteren gegen die Pyramiden.

Für irrtümlich halte ich die Angabe DEJERINES, daß sich die kortikalen Ursprünge der Pyramidenbahn beim Menschen vom Fuße der Stirnwindungen durch beide Zentralwindungen hindurch bis in die vorderen Abschnitte der Parietalwindungen erstrecken.[1]) (Fig. 49, Bd. II der Hirn-Anatomie.) Der Beweis hierfür würde nur gegeben sein, wenn Fälle *isolierter* oberflächlicher Läsion des Pes frontalis II, oder der vorderen Partie der Pariet. II oder des Feldes Nr. 16 vorlägen, wo *bei Intaktheit* der Zentralwindungen und ihres Stabkranzes sekundäre Degeneration der Pyramidenbahn bestand. Solche Fälle sind nie beobachtet worden; bei allen von Rindenverletzungen abhängigen Degenerationen der Pyramidenbahnen war auch die vordere Zentralwindung bez. der Lob. paracentralis oder deren Stabkranz in der Tiefe zerstört; und aus demselben Grunde ist der Anteil der hinteren Zentralwindung an der Entstehung sekundärer Degeneration der Pyramidenbahnen nicht exakt erwiesen.

Wie die kortikalen Ursprünge schildert DEJERINE auch die Lage der Pyramidenbahnen im Pes pedunculi nicht richtig. Die Myelogenese lehrt *einwandsfrei*, daß die Pyramidenbahn *in der Regel* wenigstens in den proximalen Abschnitten des Fußes nur dessen drittes Viertel (von innen gerechnet) einnimmt. Zwischen die ARNOLDschen Bündel mischen sich Pyramidenfasern *nicht*. Wenn DEJERINE das Gegenteil behauptet, so stützt er sich auf Fälle, welche der Beweiskraft entbehren, weil die primären Läsionen über die Ursprungszonen der Pyramiden hinausgehen. Die letzteren sind bei reifen Neugeborenen durchgehend mit so starken Markscheiden ausgestattet, daß man jede einzelne Faser

1) DEJERINE kopiert hier offenbar die von HORSLEY und BEEVOR bei Macacus gefundene Ausdehnung der motorischen Zone — ohne die besondere Stellung des Menschen zu würdigen.

Digitized by Google

nachweisen könnte, welche sich etwa zwischen die noch absolut marklosen Arnoldschen Bündel mischen sollte. Man kann aber in der Regel auch nicht eine markhaltige Faser hier wahrnehmen. Die Ergebnisse der sekundären Degeneration sind diesen überaus klaren Bildern gegenüber zu vieldeutig, als daß man Gewicht auf sie legen könnte.

2. und 3. Die *kortiko-bulbären* und *kortiko-pontinen* Bahnen der Zentralwindungen sind nicht scharf auseinanderzuhalten; es bestehen hier noch viele Unsicherheiten. Nach innen von der Pyramidenbahn differenziert sich bei der menschlichen Frucht im proximalen Pes pedunculi noch vor erlangter Reife (ca. 51 cm) ein Bündel, welches im Hinblick auf diese relativ frühe Ummarkung den Pyramidenbahnen näher steht als den Arnoldschen Bündeln. *Es verläuft individuell sehr wechselnd;* bald geht es der Pyramidenbahn dicht anliegend in die Brückenlängsfasern über, bald wechselt es in der mittleren Höhe des Pes pedunculi seine Lage, indem es bald nach innen bis nahe zur Medianlinie (Bündel vom Fuß zur Haube, Meynert), bald nach hinten zieht (motorische[1]) Fußschleife, Pyramiden-Schleifenbahn, Flechsig). Es führt (Hoche) Fasern für die motorischen Kerne des V. VII. X. und XII. Paares. Die weiter nach innen gelegenen Fasern des Pes pedunculi (Arnoldsche Bündel Meynert) stehen nicht sicher zu den motorischen Hirnnervenkernen in direkter Beziehung. Sie enden, wie es scheint, an der Subst. nigra Sömmeringii (Dejerine) und überwiegend am großen Brückenganglion; doch ist hier noch vieles unsicher.

Nach Dejerine kommen die nach innen von der Pyramidenbahn gelegenen Bündel des Pes pedunculi meist aus dem unteren Viertel der Zentralwindungen und der anliegenden Pars opercularis der dritten Stirnwindung. Doch gestattet das vorliegende Untersuchungsmaterial nicht, die beteiligte Zone[2]) der letzteren

---

1) Die zur motorischen gehörige *sensible* Fußschleife hat eine *konstante* Lagerung — hinter der Pyramidenbahn; beide bilden ein konjugiertes Strangpaar, vermutlich für das Feld $5^b$, wenigstens einen Teil desselben. (Vergl. Flechsig, Neurolog. Zentralbl. 1898, Nr. 21.)

2) Ein Vergleich mit Fig. 5, Taf. III ergibt, daß das myelogenetische Feld Nr. $2^a$ ($5^b$) auf die dritte Stirnwindung übergreift, einesteils am oberen andernteils am unteren Rande der dritten Stirnwindung. Es ist unerwiesen, daß das *dazwischen liegende Feld*, welches weitaus den

Digitized by Google

Windung exakt zu bestimmen; es sind mehr Vermutungen, auf welche DEJERINE[1]) (wie auch VON MONAKOW) seine Abgrenzung gründet. Jedenfalls geht aus einer ganzen Reihe von Fällen hervor, daß ein erheblicher Teil des hinteren Abschnittes der dritten Stirnwindung (Feld $18^b$) zerstört sein kann, ohne daß sekundäre Degeneration im Pes pedunculi eintritt; eine für die Deutung der motorischen Aphasie wichtige Tatsache.[2]) Die exakte Umgrenzung dieses Teiles muß der Zukunft vorbehalten bleiben. Und das nämliche gilt für den Fuß der zweiten Stirnwindung, soweit derselbe nicht zu Feld 2 gehört. Auch für diesen Rindenabschnitt sind isolierte Erkrankungen oberflächlicher Art (d. h. ohne Verletzung vorüberziehender Stabkranzbündel benachbarter Windungen) *nicht beschrieben*. Die Annahme DEJERINES wie VON MONAKOWS, für die Felder 18 und $18^b$ sei ein Stabkranz nachgewiesen, entbehrt *der exakten Begründung*.

Man kann dagegen nicht einwenden, daß sowohl DEJERINE[3]) als VON MONAKOW Fälle beschreiben, wo die dritte (bez. auch zweite) Stirnwindung herdförmig zerstört waren und eine sekundäre Degeneration im vorderen Sehhügelstiel bez. medialen und vorderen lateralen Sehhügelkern bestand. Die fraglichen Herde gehören bei näherer Besichtigung *sämtlich* zu den für genauere Aufschlüsse unbrauchbaren.

Es handelt sich nicht um Verletzungen lediglich der Rinde oder der angrenzenden Markleisten innerhalb der Windungen,

---

größten Teil der Pars opercularis bildet, mit dem Pes pedunculi zusammenhängt.

1) In einem von DEJERINE mitgeteilten Falle läßt die Abbildung (Fig. 137, Hirnanatomie Bd. II) deutlich erkennen, daß die Pars opercularis der dritten Stirnwindung weitgehend zerstört ist, ohne daß der Pes pedunculi eine Degeneration zeigt. Fig. 137 und 138, sowie Fig. 137 und der Text decken sich nicht! Auf Fig. 137 reicht die *Rinden*zerstörung bis über den aufsteigenden Ast der Fossa sylvii nach rückwärts, auf Fig. 138 (Oberflächenskizze) nicht!

2) Bei der Aphasie, welche bei Zerstörung der hinteren Region des Front. III (BROCASche Windung) eintritt, handelt es sich *nicht* um Zerstörung eines motorischen Projektionssystems. Myelogenetisch erscheint das Feld $18^b$ als *Randzone* von $5^b$, d. h. des Feldes der motorischen Hirnnerven, insbesondere der facio-pharyngo-laryngolingualen Gruppe; zahlreiche Assoziationssysteme verbinden beide (s. u.).

3) Vergl. Fig. 137 bei DEJERINE a. a. O.

Digitized by Google

sondern um Zerstörungen, welche weit über die Markleisten hinaus bis tief in den Markkern des Stirnlappens hineinreichen und so unmittelbar den Stabkranz *im* Stirnlappen durchbrechen. Dieser Stabkranz steht aber weder zur dritten noch zur zweiten Frontalwindung in Beziehung (ausgenommen Feld 11[1]), d. h. die Querwindung der dritten Stirnwindung nahe der *Basis*), sondern verläuft in der Hauptsache zur frontalen Abteilung der Zentralzone (Feld 15, $15^a$, wahrscheinlich auch 8, $8^a$ etc.). Es handelt sich also in den fraglichen Fällen um Zerstörung von an der zweiten und dritten Stirnwindung vorüberziehenden Fasersystemen.

4. und 5. Die Verbindungen der Zentralwindungen mit dem Sehhügel sind zahlreich. Beteiligt ist besonders der laterale Kern mit Ausnahme der dorsalsten (zonalen) Schichten, sowie der Zentralkern und der schalenförmige Körper. Die kortikopetalen und kortikofugalen Leitungen lassen sich nur schwer auseinanderhalten, desgleichen die Faserzüge der vorderen und hinteren Zentralwindung. Einen guten Überblick in letzterer Hinsicht gewährt ein von mir und Hösel untersuchter Fall, wo (Arch. f. Psychiatrie Bd. 24) links der lobulus paracentralis und die Zentralwindungen, besonders die hintere in den oberen zwei Dritteln in großer Ausdehnung, im unteren Drittel nur wenig zerstört waren; von der vorderen Zentralwindung war meist nur die hintere Hälfte erweicht. Dieser Fall ist auch insofern von besonderer Wichtigkeit, *weil alle Stirnwindungen inkl. des Fußteils, desgleichen die 1. und 2. Parietalwindung und das zugehörige Mark* nur soweit abnorm erscheinen, als (recht spärliche) *sekundär* degenerierte Faserzüge in sie eindringen, während sie von dem primären Erweichungsherd *vollständig* verschont werden.[2]) Hier

---

1) Dejerine weist dieser Gegend einen Stabkranz zu, und zwar Bündel zum innersten Abschnitt des Pes pedunculi (innerste Arnoldsche Bündel). Die Begründung ist ungenügend, wenn auch keineswegs unbeachtlich. Die Myelogenese weist u. a. auf Verbindungen mit Bahnen der Subst. perforata anterior bez. des Sehhügels (s. o.) hin — doch sind auch diese Daten unsicher!

2) Wenn von Monakow diesen Fall als eine primäre Läsion des *gesamten* Parietalmarkes hinzustellen sucht, so muß dies als objektiv vollständig unbegründet zurückgewiesen werden. Dieser, soweit ich sehe, in der Literatur einzig dastehende Fall ist allerdings insofern von prinzipieller Bedeutung, als er alle Hypothesen von Monakows über die Stellung des Parietallappens innerhalb des zentralen Mechanismus



Digitized by Google

war speziell die hintere Hälfte der lateralen Kerne (außer den dorsalen Schichten) sekundär degeneriert, besonders gegen die Basis zu, nur im lateralen (inkl. ventrolateralen) Kern findet sich ausgeprägter, ja streckenweise totaler Schwund von Ganglienzellen, nicht so deutlich in meinem „schalenförmigen Körper" und im Zentralkern (centre médian LUYS), welche indes *etwa auf die Hälfte* des Normalvolumens reduziert sind. Im Globus pallidus bez. dessen Marklamellen finden sich einige auf Degeneration verdächtige *vereinzelte* Faserbündel. Ein primärer Herd ist *nicht*[1]) zu finden. Nach abwärts vom Thalamus sind degeneriert die Hauptschleife bis an die Hinterstrangkerne (Kern der zarten Stränge und *innere* Kerne der Keilstränge), desgleichen der rote Kern mit dem oberen Kleinhirnstiel und Teile der sensiblen Trigeminuskerne. Die subst. nigra zeigt nur wenig Veränderungen,

---

auf das bündigste widerlegt, weil das Mark der *Parietal*windungen und der zugehörigen zentralen Markmassen von primären Läsionen *durchaus frei* sind, so daß er in dieser Hinsicht geradezu als ideal betrachtet werden kann. Weder die von HÖSEL veröffentlichten Zeichnungen noch die Präparate selbst berechtigen zu Zweifeln. Daß VON MONAKOW aus ersteren auch den Schluß zieht, im Fall HÖSEL seien nur 70% der Schleife degeneriert gewesen, ist objektiv unbegründet. Im Mittelhirn fehlt die Hauptschleife *ganz* bis auf das Primärsystem des Globus pallidus, weiter abwärts gesellen sich die Schleifenbündel der Subst. nigra hinzu. Irgend welche Reste, welche man von der intakten ersten und zweiten Parietalwindung ableiten könnte, sind nicht vorhanden. VON MONAKOWS Einwände versagen nach *allen* Richtungen. Auch ist keiner der von ihm selbst publizierten Fälle so klar und einwandsfrei, daß man die Befunde im Fall HÖSEL als mit gesicherten Tatsachen in Widerspruch stehend und deshalb als wenig zuverlässig betrachten müßte. Er entspricht strengen wissenschaftlichen Ansprüchen weit mehr als alle Fälle von Scheitellappen-Erkrankung, welche VON MONAKOW zusammengebracht hat, und dies um so mehr, als durch das 52 Jahre lange Bestehen des Erweichungsherdes *anatomisch alle* Konsequenzen gezogen waren, welche eine derartige Erkrankung überhaupt mit sich bringen kann.

1) Auch in dieser Hinsicht irrt also VON MONAKOW, welcher „übersehene Herde" im Zwischenhirn zur Erklärung der Befunde herbeiziehen möchte. — Die Degeneration des lateralen Sehhügelkerns im Fall HÖSEL deckt sich genau mit der von DEJERINE beschriebenen und abgebildeten im Fall NAUDIN (Läsion des oberen Drittels beider Zentralwindungen — a. a. O. Fig. 114 — es liegt lediglich *sekundäre* Deg. vor).

Digitized by Google

außer daß die Fasern zwischen den Zellgruppen etwas spärlicher erscheinen, desgleichen Längsfasern der formatio reticularis. Die *vorderen* Abschnitte des lateralen Thalamuskerns erscheinen *wenig* verändert, was offenbar darauf beruht, daß das mit ihnen zusammenhängende untere Drittel der Zentralwindungen in der Hauptsache intakt war.

Dieser Fall ist insofern von großer Wichtigkeit, als er anzeigt, daß, wenn in einem gegebenen Falle hintere Zentralwindung und benachbarte mehr oder weniger große Abschnitte der ersten und zweiten Parietalwindung zerstört sind und hierbei eine Degeneration von Schleife und rotem Kern gefunden wird, diese Degeneration mit der Zerstörung der hinteren Zentralwindung in Beziehung zu bringen ist, nicht mit der Zerstörung der ersten und zweiten Parietalwindung. Der Fall Hösel beweist, wenn auch nicht direkte, so doch indirekte Beziehungen der Zentralwindungen zum roten Kern der Haube, und dasselbe gilt für die *Kerne der Hinterstränge.*[1]) Auf dem Wege der Addition und Subtraktion in von Monakows Weise durch Vergleichung *vieler komplizierter* Fälle wird man schwerlich zu gleich zuverlässigen Resultaten gelangen. Beziehungen der ersten und zweiten Parietalwindung zum roten Kern und zu den Kernen der Hinterstränge könnten dem oben Gesagten gegenüber nur bewiesen werden durch Fälle, wo die erste und zweite Parietalwindung *ohne jede Beteiligung der hinteren Zentralwindung oder ihres Stabkranzes zerstört sind* und der rote Kern degeneriert gefunden wird. Solche Fälle existieren bisher in der Literatur *nicht*, wohl aber verfüge ich über *eine ganze Reihe* von Schnittserien, wo bei ausgedehnten Herden in der zweiten Scheitelwindung (Gyrus supramarginalis und angularis) ohne Beteiligung der hinteren Zentralwindung auch nicht die leiseste Andeutung einer Degeneration in den oben genannten Thalamuskernen bez. ihren Stabkranzbündeln zu finden ist. Hierdurch halte ich die Ansicht von Monakows für endgültig widerlegt, daß die Schleife (und dadurch die Hinterstränge etc.) durch die ventrolateralen Thalamuskerne mit dem Gyrus supramarginalis und angularis in Verbindung tritt. Die Schleife steht *nur mit der hinteren Zentralwindung* und Teilen der vorderen in Verbindung; sekundäre Degenerationen und Myelogenese weisen mit gleicher Deutlichkeit

1) Höchst wahrscheinlich auch zu Teilen der Gowersschen Bündel der Seitenstränge etc.



Digitized by Google

*übereinstimmend* darauf hin. Bezüglich der ersten Parietalwindung (Feld 16) muß nur insofern eine Ausnahme gemacht werden, als infolge einer variabelen Lage des Sulcus calloso-marginalis mitunter ein kleiner Teil des Feldes Nr. 2 in den Praecuneus bez. die erste Parietalwindung zu liegen kommt. Zwei von DEJERINE angeführte Fälle, welche denselben veranlassen, Beziehungen des roten Kernes zum *„Scheitellappen"* anzunehmen, sind hierzu viel zu kompliziert, weshalb DEJERINE selbst mit Recht die kortikalen Beziehungen des roten Kernes für dunkel erklärt.

Nur darin kann ich VON MONAKOWS Ansichten beipflichten, daß der größte Teil der Hauptschleife nicht ununterbrochen den Thalamus durchläuft (wie der Fall HÖSEL bei oberflächlicher Betrachtung nahelegte), sondern sich aufsplittert. In bezug auf die Thalamuskerne, welche hierbei speziell in Betracht kommen, sind VON MONAKOWS Angaben *nicht* befriedigend; es kommen nicht nur ventrale Zellgruppen in Betracht, sondern auch laterale (ventrolaterale FLECHSIG), sowie der Zentralkern, welchen dieser Autor zur medialen Gruppe rechnet; die von ihm verarbeiteten Fälle sind zur exakten Lösung der einschlagenden Fragen durchaus ungenügend. Die Angaben VON MONAKOWS über die Beziehungen der einzelnen Windungsgebiete zu den Thalamuskernen sind demgemäß unzuverlässig. Als feststehend zu betrachten ist, daß die hintere Zentralwindung in bezug auf Verbindungen, Stabkranz usw. wesentlich andere Verhältnisse darbietet als die erste und zweite Parietalwindung, sodaß letztere nicht mit der ersteren zusammengeworfen werden dürfen. Beide bilden weder genetisch noch anatomisch noch funktionell eine zusammengehörige einheitliche Rindenzone; der sulcus postcentralis deutet eine wichtige Grenzmarke an, wobei freilich nicht außer acht zu lassen ist, daß meist schon der hintere Abhang der hinteren Zentralwindung stabkranzfrei ist und den Bau der Parietalwindungen zeigt.

6. und 7. Der Globus pallidus hat, nach dem Verhalten der sekundären Degenerationen zu schließen, nur wenig ausgiebige Beziehungen zu den Zentralwindungen. Im Fall HÖSEL fand ich nur wenige punktförmige, der Degeneration verdächtige Stellen, vorwiegend in der lam. medullaris externa. In der Literatur finden sich exakte Mitteilungen nicht vor.

Bezüglich der *subst. nigra* teilt DEJERINE ein große Anzahl Beobachtungen mit, welche auf Beziehungen derselben zur Zentral-

Digitized by Google

zone hinweisen. Nirgends findet sich ein strikter Beweis dafür, daß irgendwo *außerhalb* der Zentralwindungen Rindenbezirke existieren, deren Zerstörung Degeneration in der *subst. nigra* zur Folge hat. Nach Dejerines, mir nicht ganz klar gewordenen Angaben kommt einesteils das untere Viertel, andernteils „hauptsächlich" das *obere* Drittel der Zentralwindungen in Betracht. Eventuell handelt es sich auch hier um ein konjugiertes Strangpaar, motorische Bündel des Fußes und (durch den globus pallidus verlaufende?) indirekte — kortikopetale — Fortsetzungen von Schleifenbündeln.

Hiernach sind auf dem Wege der sekundären Degeneration ausschließlich für die Zentralwindungen und den lobulus paracentralis ein Stabkranz, kompakte Projektionssysteme kortikopetaler und kortikofugaler Leitung nachgewiesen. Die Behauptung, auch die anliegenden Zonen der Stirn-[1]) und Parietalwindungen seien damit ausgestattet, beruht auf ungenauen Untersuchungen. Herderkrankungen, welche *hinter* dem sulcus postcentralis gelegen sind, führen immer nur zur sekundären Degeneration *im Pulvinar* des Sehhügels — eine Tatsache von großer Bedeutung, worüber in der Folge mehr.

Der secteur moyen Dejerines ist sonach ein Konglomerat verschiedenartiger Rindenbezirke und insofern ein Kunstprodukt.

Die sekundären Degenerationen, welche nach Zerstörungen in der Umgebung des *Hinterhauptpoles* eintreten, haben von Monakow als Grundlage für die Konstruktion des Projektionssystems der *Sehsphäre* gedient. Gerade hier aber zeigt sich die Unzuverlässigkeit dieser Untersuchungsmethode, sofern nicht ein hinreichend großes Material vorliegt. Im Anschluß an Zerstörung der Sehsphäre degenerieren verschiedene Faserzüge, welche in die Zusammensetzung der Sehstrahlung Gratiolets eingehen, von innen gerechnet nächst der Balkenschicht, die meist feinfasrige, in mittleren Höhen vielfach in deutliche Bündel getrennte innere sagittale Schicht (sekundäre Sehstrahlung Flechsig) und die dickfasrige äußere sagittale Schicht (fasciculus longitud. inferior Burdach, primäre Sehstrahlung Flechsig). Bei Herden in der Umgebung der fissura calcarina tritt, falls die Dauer der Erkrankung lang genug währt, in allen drei Schichten sekundäre Degeneration bez. Atrophie auf, ganz besonders früh und regelmäßig aber in der

1) Mit Ausnahme der ersten Stirnwindung (Feld 8).

Digitized by Google

*sekundären* Sehstrahlung. Die primäre Sehstrahlung[1]) degeneriert rindenwärts, wenn sie in ihrem Verlauf unterbrochen wird, wofür mir mehrere vorzügliche Fälle zu Gebote stehen, die sekundäre Sehstrahlung thalamuswärts. *In einem jener Fälle, welcher eine totale aufsteigende Degeneration der primären Sehstrahlung darstellt, lassen sich die degenerierten Bündel der letzteren ausschließlich in das Gebiet des VICQ D'AZYRschen Streifens verfolgen.*

Schon hieraus geht mit Wahrscheinlichkeit hervor, daß die primäre Sehstrahlung die eigentliche sensible Leitung der Sehsphäre darstellt, und es ist um so weniger Grund vorhanden, hieran zu zweifeln, als nicht nur an reifen Früchten das Hervorgehen des sogenannten fasciculus longitudinalis inf. aus dem äußeren Kniehöcker und einem Teil des Pulvinars, welchen ich als primäres (phylogenetisch älteres) Pulvinar[2]) bezeichnet habe, auf das

1) Vermutlich ist auch die Degeneration der primären Sehstrahlung bei Zerstörung im Bereiche der Sehsphäre selbst eine aufsteigende, nicht eine absteigende; wenn die Lippen der Fissura calcarina in der Mitte oder noch weiter nach vorn zerstört werden, so bewirkt dies eine sekundäre Degeneration der von hier bis zum Okzipitalpol verlaufenden primären Sehstrahlung. Indem in der Regel, wenn nicht ausnahmslos, die Erweichung bis in die Sehstrahlung selbst hereinragt, wird diese letztere direkt zerstört, so daß die konsekutive sekundäre Degeneration nicht von Verletzungen der Rinde, sondern von Kontinuitätstrennungen des Stabkranzes selbst abhängt. Es liegt hier ein allgemeines Gesetz vor, von dem nur sehr kleine Herde (unter 1 qcm) eine Ausnahme machen. Erweichung der Rinde fällt zusammen mit der Erweichung eines Markkegels, dessen Spitze bis in die Nähe des Ependyms reicht. Dasselbe zeigt sich im Schläfenlappen. Nur die Zentralzone macht eine Ausnahme. — Das Verhalten der Sehstrahlung ist komplizierter als es nach den Angaben VON MONAKOWS den Anschein gewinnt; ja selbst die sonst so eingehenden Schilderungen DEJERINES sind hier lückenhaft, besonders weil derselbe sich nicht von dem Vorurteil trennen kann, daß die degenerierenden Bündel der Sehstrahlung zum guten Teil Assoziationssysteme darstellen. VON MONAKOW bildet einen Fall ab (Hirnpathologie Fig. 134), wo bei partieller Zerstörung der Sehsphäre (Gebiet des VICQ D'AZYRschen Streifens) in der Hauptsache die *sekundäre* Sehstrahlung *intensiv* degeneriert ist, während die primäre in der Hauptsache intakt erscheint. Gerade hier ist die Sehstrahlung selbst nicht oder nur wenig vom Herd getroffen, so daß der Fall eine meist von der Rinde abhängige Degeneration darstellt.

2) Das primäre Pulvinar in meinem Sinne umfaßt die Abschnitte, in welche Fasern des Tractus opticus eintreten, und ist mehr außen

Digitized by Google

deutlichste zutage tritt, sondern auch in einem von Henschen beschriebenen, in der Litteratur einzig dastehenden Fall von fast unkomplizierter Zerstörung des äußeren Kniehöckers genau das Primärsystem der Sehstrahlung, d. h. meine primäre Sehstrahlung isoliert bis zur Rinde der Fissura calcarina, also aufsteigend degeneriert war.

Die absteigende sekundäre Degeneration der Sehstrahlung im weiteren Sinn setzt sich auf das *sekundäre* Pulvinar und den vorderen Vierhügel fort — die retrograde Degeneration der primären Sehstrahlung führt zu einer Zellatrophie im äußeren Kniehöcker. Im Pulvinar degenerieren auch Abschnitte, in welche Fasern des Tractus opticus *nicht* verfolgt werden können, welche also vermutlich mit dem Sehen nichts zu tun haben.

Indem von Monakow die sekundäre (*motorische* s. u.) Sehstrahlung als Sehleitung betrachtet, beruht schon insofern seine Auffassung der Sehsphäre auf falschen Voraussetzungen. Und der Irrtum wird vergrößert dadurch, daß von Monakow auch die Ursprungsregionen dieser Bündel in der Rinde nicht richtig erkannt hat. Auch die sekundäre Sehstrahlung steht höchst wahrscheinlich *nur zur Rinde* der fissura calcarina (Zone des Vicq d'Azyrschen Streifens) in Beziehung. Dafür, daß weitere Rindenfelder (17, 17$^b$, 20 etc., 9 etc.) in Betracht kommen, fehlt vorläufig noch jeder sichere Anhaltspunkt. Die Prinzipien, nach welchen von Monakow den Umfang der Sehsphäre bemißt, sind im wesentlichen klinischer Natur, insbesondere das häufige Erhaltenbleiben des zentralsten Sehens bei ausgedehnten Erkrankungen der medialen Okzipitalfläche. In Wirklichkeit ist bei nachweislich totaler Zerstörung meiner primären Sehsphäre (= Henschens Sehsphäre s. u.) niemals ein Teil des Gesichtsfeldes erhalten gefunden worden. Fälle, wo nicht lückenlose Serienschnitte angefertigt werden, sind durchaus unzuverlässig.[1])

---

und hinten gelegen, das sekundäre Pulvinar umfaßt die übrigen Abschnitte, welche mehr nach vorn innen zu liegen, und mit dem medialen Kern zusammenfließen.

1) Die primäre Sehstrahlung wird begleitet von lockeren Bündeln, welche aus der Gegend der Sehsphäre zu den vorderen Abschnitten vom Feld 36 gelangen und sich hier in die Rinde verlieren. Diese langen Assoziationsfasern entwickeln sich mehrere Monate später als das Stratum sagittale externum; auch sie verknüpfen aber *nicht* Seh- und Hörsphäre direkt miteinander, sondern enden in einem Rinden-

Digitized by Google

Das vorhandene pathologisch-anatomische Material reicht für den Menschen noch nicht aus, um *lediglich* daraufhin die kortikale Ausbreitung der Sehleitungen und der zugeordneten motorischen Bahnen für die Augenbewegungen *exakt* zu umgrenzen. Für die Affen liegt eine größere Reihe Untersuchungen vor. Von den Exstirpationsversuchen erwecken besonderes Interesse die Beobachtungen von HORSLEY und BEEVOR, insofern als aus denselben hervorgeht, daß bei Macacus durch Verletzung des Gebietes des GENNARISCHEN Streifens eine Bahn zum vorderen Vierhügel degeneriert, und daß *diese Fasern um so zahlreicher entarten, je vollständiger das Gebiet des GENNARISCHEN Streifens entfernt wird.*[1]) Durchaus in Übereinstimmung hiermit haben SHERRINGTON und GRÜNBAUM am Gorilla gefunden, daß die elektrische Reizung lediglich des Gebietes des VICQ D'AZYRSCHEN Streifens vom Hinterhauptshirn aus Augenbewegungen auslöst. Ich halte diese Ergebnisse für überaus wichtig, besonders in prinzipieller Hinsicht. Darnach besitzt die Region des VICQ D'AZYRSCHEN Streifens und allem Anschein ausschließlich[2]) dieser Teil des Okzipitallappens ein konjugiertes Strangpaar[3]) optischer und motorischer Leitungen (wie die ROLANDOsche Zone in Pyramidenbahn und Schleifenschicht).

Die okzipitalen Innervationsbahnen der Augenmuskeln entspringen aus demselben Rindenfeld, worin die Sehleitung endet. Hiermit stimmen auch meine eigenen Untersuchungen am Menschen überein, insofern als ich intensive Degeneration der sekundären Sehstrahlung schon bei kleinen Verletzungen des Feldes 5 nachweisen konnte.

Die sekundären Degenerationen *im Pulvinar* nach Verletzung der Sehsphäre betreffen keineswegs nur kortikopetale Leitungen,

---

gebiete, zu welchem von der Hörsphäre her lediglich lange Assoziationsfasern gelangen.

1) Eine zweite durch sek. Deg. nachweisbare kortiko-mesencephale Leitung (zum vorderen Vierhügel) kommt nach BEEVOR und HORSLEY aus der ROLANDOschen Zone, also gleichfalls einem Primordialgebiet.

2) Die Annahme von SACHS u. a., daß die Außenfläche des gesamten Okzipitallappens eine der Sehsphäre beigeordnete motorische Zone darstelle, erweist sich als unbegründete Vermutung; speziell die anatomischen Grundlagen sind ungenügend.

3) Es ist im höchsten Grade wahrscheinlich, daß hier die Bahnen degeneriert sind, deren Reizung Augenbewegungen auslöst.

Digitized by Google

sondern höchstwahrscheinlich auch kortikofugale Fasern, welche Erregungszustände der Sehsphäre auf das sekundäre Pulvinar und *von da vielleicht auf andere Sehhügelkerne,* seien es wenige, seien es die Mehrzahl oder alle, übertragen[1]), worüber sich indes vorläufig etwas Sicheres nicht angeben läßt (s. u.).

So ist das, was die sekundären Degenerationen *am Menschen* über die Projektionssysteme des Hinterhauptlappens ergaben, zwar noch vielfach lückenhaft, und es reichen zur endgültigen Entscheidung der Frage, ob und in welcher Menge auch die Felder 9, 17, $17^b$, 20, 24 Stabkranzbündel enthalten, die vorhandenen Untersuchungen nicht aus. Zweifellos tritt aber schon in den vorliegenden Untersuchungsergebnissen ein strikter Gegensatz zwischen dem Feld 5 und allen übrigen Feldern des Okzipitallappens insofern hervor, als das Feld 5 zweifellos kompakte sensible und motorische Projektionssysteme besitzt, während dafür, daß die übrigen Felder, besonders die an der Außenfläche der Hemisphären einen wenn auch nur kleinen Stabkranzanteil erhalten, irgend ein Beweis nicht vorliegt.[2])

Was die Aufschlüsse der sekundären Degenerationen über die Bahnen des Schläfenlappens anlangt, so hebt von Monakow besonders bez. ausschließlich die Beobachtungen über die Degeneration des Türkschen Bündels und des *inneren Kniehöckers* hervor. Hierbei zeigt sich eine erhebliche Diskrepanz zwischen von Monakows und Dejerines Anschauungen insofern, als ersterer

---

1) Hier liegen Leitungen vor, welche wahrscheinlich nicht eigentlich zum Projektionssystem gehören, insofern als sie nicht zwischen Rinde und periphere Endorgane eingeschaltet sind.

2) Wenn Ferrier und Turner angeben, daß sie nach Zerstörung des Pulvinars bei Macacus degenerierte Fasern im Gyrus angularis und im *ganzen* Hinterhauptlappen gefunden haben, so läßt sich dieser Befund nicht ohne weiteres auf den Menschen übertragen. Es ist durchaus unsicher, ob niedere Affen eine dem Feld 24 (II. Okzipitalwindung) des Menschen entsprechende Rindenzone besitzen. Auch brauchen nicht alle Fasern, welche vom Pulvinar ausgehen, zur Sehleitung zu gehören (vergl. u.). — Nach meinen Untersuchungen über die Windungen der Affengehirne tritt der Angularis erst bei den höheren Affen auf; was Ferrier bei Macacus als Angularis bezeichnet, entspricht, wie mir scheint, im wesentlichen den Feldern $14^b$ und 19 (auch 12 u. 13?) des Menschen. Speziell am Tschego läßt sich erkennen, daß von diesem Windungszuge der Angularis sich erst später abzweigt.

Digitized by Google

angibt, daß das TÜRKsche Bündel bei Herden im Mark der Okzipito-Temporalwindung degeneriere, während DEJERINE (der eine größere Zahl von Fällen untersucht hat) lediglich den mittleren Abschnitt der drei *äußeren* Temporalwindungen und zwar insbesondere der zweiten und dritten zur Degeneration besagten Bündels in Beziehung bringt. Nach meinen ausgedehnten Erfahrungen haben beide Autoren sich geirrt, da weder die Rinde der zweiten und dritten Temporalwindung noch die des Gyrus occip. temporalis mit den TÜRKschen Bündeln *irgend welchen* Zusammenhang hat. Gerade hier zeigt sich wieder die mangelhafte Leistungsfähigkeit der pathologisch-anatomischen Methode am menschlichen Gehirn, wenn dieselbe ohne Zuhilfenahme anderer klarerer Methoden angewandt wird. Bezüglich *des inneren Kniehöckers* gebührt VON MONAKOW zweifellos das Verdienst, die Degeneration desselben im Anschluß an Erkrankungen des Temporallappens zuerst nachgewiesen zu haben. Meines Erachtens ist es aber VON MONAKOW nicht gelungen, über die Ursprungsregionen volle Klarheit zu gewinnen, da er außer der meist beteiligten ersten auch die zweite und dritte Temporalwindung herbeizieht, wofür irgendwie zuverlässige Anhaltspunkte nicht einmal andeutungsweise vorliegen.

Der mittlere Teil der zweiten und dritten Schläfenwindung deckt sich fast vollständig mit meinem Rindenfeld Nr. 36, also einem meiner Zentralgebiete. Eine nähere Untersuchung seiner leitenden Verbindungen ergibt, daß höchstwahrscheinlich *auch nicht eine Faser* des TÜRKschen Bündels daraus entspringt. Bereits 1883 habe ich in meinem Plan des menschlichen Gehirns dargestellt, daß das TÜRKsche Bündel[1]) zum großen Teil aus dem Schläfenlappen hervorgeht, da ich myelogenetisch seinen Verlauf dahin verfolgt hatte (während MEYNERT und CHARCOT es ausschließlich in den Hinterhauptlappen gelangen ließen). Das TÜRKsche Bündel läßt sich bei reifen und überreifen Neugeborenen insofern gut verfolgen, als es unter den Faserzügen des hinteren

1) Ich habe es temporo-okzipitale Großhirnrinden-Brücken-Bahn genannt, weil ich die von MEYNERT gewählte Bezeichnung TÜRKsches Bündel als unrichtig erkannte. Die TÜRKschen Untersuchungen über Hemianästhesie haben speziell mit diesem Bündel *gar nichts zu tun*. Doch habe ich mich offenbar getäuscht in der Annahme, daß einzelne Bündel zu dem Okzipitalhirn in Beziehung stehen. Das Verdienst, diesen Irrtum beseitigt zu haben, gebührt DEJERINE.

Digitized by Google

Abschnittes der inneren Kapsel den einzigen kompakten Strang darstellt, welcher völlig marklos erscheint. Es ergibt sich hierbei, daß das Türksche Bündel unmittelbar nach seinem Eintritt in die innere Kapsel (von unten her gerechnet) sich *in mehrere Abteilungen* spaltet, eine auf- und eine absteigende. Die innersten (der Pyramidenbahn anliegenden) Faserbündel steigen in der inneren Kapsel *senkrecht* empor, gelangen bis zum *oberen Rand* des Sehhügels, ziehen hier nach außen und treten in die obersten Abschnitte der temporalen Querwindung ein. Die äußere Abteilung des Türkschen Bündels verläßt schon *tief unten* die innere Kapsel und verschmilzt zunächst mit den ventralen Abschnitten der Sehstrahlung; mit dieser tritt es gegenüber der Mitte der zweiten und dritten Temporalwindung in den Schläfenlappen (vgl. Dejerine Hirnanatomie Bd. II Fig. 7. Die Abbildung gibt auch hier die Verhältnisse naturgetreu wieder, während der Text inkorrekt ist), lassen sich aber nicht weiter verfolgen. In fünf Fällen sekundärer Degeneration des Türkschen Bündels fand ich, daß die innere Partie des Türkschen Bündels häufig isoliert degeneriert und daß auch die äußere isoliert degenerieren kann. Ersteres findet sich stets bei Herden, welche die temporale Querwindung *hinten oben* zerstören, d. h. in der Regel bei Herden, welche vom Scheitellappen her in die Fossa Sylvii hereinragen. Die äußere Partie des Türkschen Bündels degeneriert bei Herden im Schläfenlappen um so vollständiger, je mehr der primäre Herd der Mitte des Schläfenlappens sich nähert und *hier in der Tiefe bis zur Sehstrahlung reicht, da eben hier in der Sehstrahlung die Stabkranzbündel der äußeren vorderen* Abschnitte der temporalen Querwindung verlaufen. Bei Herden, welche die gesamte Querwindung zerstören, einschließlich des mittleren Teils der ersten Schläfenwindung, entartet das gesamte Türksche Bündel (eigene Beobachtung). Herde, *welche lediglich das vordere Drittel der ersten Temporalwindung zerstören,* lassen nach meinen Untersuchungen das Türksche Bündel intakt. Dasselbe gilt von Zerstörung lediglich des hintersten Abschnittes der ersten Temporalwindung. Hieraus ist zu schließen, daß die Rindenbezirke, deren Zerstörung sekundäre Degeneration des Türkschen Bündels im Gefolge hat, sich in der Hauptsache decken mit der Hörsphäre. Da aber die Fasern des Türkschen Bündels, welche vom äußersten Teil der Querwindung kommen, zunächst zur Sehstrahlung verlaufen und von dieser, unter der Fossa Sylvii hinweg, zur inneren

Digitized by Google

Kapsel, so müssen sie einen Weg zurücklegen, welcher weit ab liegt von der medialen aufsteigenden Partie. Beide werden deshalb leicht gesondert zerstört. Mit dieser Anschauung, welche ich nach meinen eigenen Untersuchungen als *annähernd* sichergestellt bezeichnen kann, lassen sich auch sehr gut die Beobachtungen DEJERINES in Einklang bringen, obwohl derselbe zu ganz anderen Schlußfolgerungen gelangt ist.[1])

Dieser Autor hat drei angeblich gleiche Fälle beobachtet, wo im Anschluß an Zerstörung des mittleren Teiles der drei Temporalwindungen das TÜRKsche Bündel *total* degeneriert erschien. Auffallenderweise gibt er auch von diesen überaus wichtigen Fällen nicht einmal eine kursorische Beschreibung und kargt mit Abbildungen.[2]) Es findet sich nur von einem Falle eine summarische Übersicht der Befunde (cas NEUMANN), aber im ganzen so ungenügend, daß es schwer fällt, die Ausdehnung des Herdes in der Tiefe unmittelbar zu beurteilen; bezüglich der zwei anderen Fälle verweist DEJERINE einfach auf den cas NEUMANN. Wenn DEJERINE angibt, daß in letzterem *nur das oberflächliche Mark des Schläfenlappens* neben der Rinde erkrankt gewesen sei, so steht der Text hierzu *in direktem Widerspruche*. Denn dieser

1) Das äußere Fünftel des Hirnschenkelfußes fand ich, wie schon oben erwähnt, bereits bei einem 16 Tage alten Kinde *teilweise* markhaltig (s. o.). Ob es sich hier um ein wirklich gesetzmäßiges Verhalten handelt, aus welchem auf eine Zusammensetzung des TÜRKschen Bündels aus zwei verschiedenen Fasersystemen geschlossen werden *muß*, vermag ich nicht zu entscheiden; es bedarf weiterer Untersuchungen, da im Großhirnschenkelfuß ungemein häufig individuelle Veränderungen in der Lage der einzelnen Bündel vorkommen. Vielleicht betraf die Markumhüllung *überhaupt nicht* Fasern des TÜRKschen Bündels.

2) Die von DEJERINE wiedergegebene Ausdehnung des Herdes an der Oberfläche ist keinerlei Maßstab für die primär zerstörten Hirnabschnitte. Bei derselben Oberflächenzerstörung können in der Tiefe die verschiedenartigsten Destruktionen bestehen. Es ist deshalb unerläßlich, die Ausdehnung der Herde in die Tiefe genau darzustellen, zumal die oberflächliche Ausdehnung Unkundige leicht zu Irrtümern verleitet. Was hier vom Fall NEUMANN gilt, gilt implizite auch von den zwei anderen angeblich-gleichen Fällen DEJERINES, welche er nur erwähnt. — Richtiger wäre es gewesen, wenn DEJERINE sich dahin ausgedrückt hätte, daß seine Fälle darauf hinweisen, daß das TÜRKsche Bündel in der Nähe der mittleren Abschnitte der zweiten und dritten Temporalwindung *verläuft* oder entspringt.

Digitized by Google

berichtet ausdrücklich von einer sekundären Degeneration des Fasciculus longitudinalis inferior bis an den Okzipitalpol. Da besagtes Faszikel zur Rinde des Schläfenlappens, besonders der Mitte, in keiner Beziehung steht, vielmehr ein Stabkranzbündel des Okzipitallappens darstellt, welches den Temporallappen nur durchläuft, so ist durch obige Textangabe bewiesen, daß die Sehstrahlung zerstört war, und *mit ihr* die in der Sehstrahlung verlaufenden Fasern des Türkschen Bündels. Die sekundäre Degeneration des letzteren hängt also gar nicht von der Erkrankung der *Rinde* der zweiten und dritten Temporalwindung ab, sondern einesteils von einer Leitungsunterbrechung in der Sehstrahlung, andernteils von Zerstörung der Hörsphäre selbst, welche gleichfalls aus den kurzen Notizen Dejerines mit Sicherheit zu erschließen ist. Berichtet letzterer doch, daß außer dem gesamten Türkschen Bündel auch der innere Kniehöcker, das Brachium conjunctivum posticum und der hintere Vierhügel in seiner oberflächlichen Schicht Degeneration zeigten. Die Beteiligung dieser Glieder der Hörleitung erklärt sich naturgemäß aus der Zerstörung der ersten Temporalwindung, welche gerade an der Stelle betroffen erscheint, wo die Querwindung einmündet. Wenn schon Dejerine nicht angibt, wie weit sich hier die Erweichung in die Tiefe erstreckt, so ist aus der Degeneration auch der inneren Türkschen Bündel zu erschließen, daß sie die gesamte Querwindung zum mindesten unterminiert. *Es handelt sich also* im cas Neumann in erster Linie um eine Zerstörung der gesamten Hörsphäre und nebenher um eine Erweichung des mittleren Teiles der zweiten und dritten Temporalwindung. Mit welchem Recht, darf man fragen, leitet nun Dejerine die Degeneration der Türkschen Bündel speziell von der Zerstörung der *Rinde* der zweiten und dritten Temporalwindung ab? Es wäre dies nur zulässig, wenn er den Beweis führen könnte, daß bei Zerstörung der Hörsphäre spez. der Querwindung das Türksche Bündel intakt bleibt. Man wird indes hiernach vergeblich bei ihm forschen. Der Schluß Dejerines, daß durch seine Fälle die Beziehungen der Türkschen Bündel *zur Rinde* speziell der zweiten und dritten Temporalwindung nachgewiesen seien, bedeutet sonach nicht nur einen materiellen Irrtum, sondern auch einen *Verstoß gegen die Logik.*

Mit meiner Auffassung der Dejerineschen Fälle harmoniert es durchaus, daß *die Hörstrahlung, der innere Kniehöcker und die Türkschen Bündel in der Regel gleichseitig degenerieren,* daß

Digitized by Google

sich bei einer deutlichen Degeneration der Hörstrahlung auch *regelmäßig* Teile der Türkschen Bündel degeneriert finden. Es weist diese Tatsache von vornherein darauf hin, daß beide Bündel nicht nur ein wenigstens in der Hauptsache sich deckendes Rindenfeld besitzen, sondern daß sie höchst wahrscheinlich auch dicht nebeneinander verlaufen. Und eine nähere Prüfung der Hörstrahlung ergibt denn auch genügende Beweise hierfür. Auch die Hörstrahlung zerfällt in einen Teil, welcher vom inneren Kniehöcker aus an der Außenfläche des Thalamus zum oberen Teil der inneren Kapsel emporsteigt und von da zum oberen hinteren Ende der Querwindung gelangt, und in einen zweiten *unter* der Fossa Sylvii hinwegziehenden Teil. Die letzteren Bündel der Hörstrahlung vermischen sich mit der Sehstrahlung und laufen in derselben zunächst nach vorn, bevor sie sich loslösen und zur Querwindung nach oben hinten emporsteigen. Diese Bündel sind speziell beim Neugeborenen sehr leicht zu verfolgen. Nimmt man an, daß die zugehörigen Türkschen[1]) Bündel genau denselben Verlauf nehmen, so lassen sich alle Mitteilungen über sekundäre Degeneration der Türkschen Bündel gut in Übereinstimmung bringen. Ich finde in der Literatur keinen Fall, wo ausgeprägte Degeneration des inneren Kniehöckers ohne sekundäre Degeneration der Türkschen Bündel bestanden hätte. Auch in den wenigen Fällen, wo nach den Angaben der Autoren nur das eine oder andere Bündel erkrankt ist, lehren die Abbildungen das Gegenteil.[2]) Immerhin ist es möglich, daß

---

1) Ich habe 1901 (Vortrag beim Physiologen-Kongreß in Turin) den Verlauf der Türkschen Bündel noch nicht hinreichend gekannt, wenigstens nicht alle hier gegebenen Details. Ich bin erst durch das Studium weiterer zahlreicher Fälle sekundärer Degeneration zu den hier vorgetragenen Anschauungen gelangt. In Turin habe ich die zweite Temporalwindung, soweit sie in der ersten Temporalfurche gelegen ist, zu den Ursprüngen gerechnet, was mir jetzt unsicher erscheint.

2) So ist z. B. im Fall Rivaud bei Dejerine mit sekundärer Degeneration des inneren Kniehöckers das Türksche Bündel nicht, wie der Text sagt, intakt, sondern nach der Abbildung mindestens auf die Hälfte reduziert; es ist nur die innere Hälfte degeneriert entsprechend der Tatsache, daß von der ersten Temporalwindung die Außenfläche in ganzer Länge erhalten ist. Das Türksche Bündel mißt kaum den 15. Teil des Querschnittes des intakten Pes pedunculi der anderen

Digitized by Google

beide nicht immer in gleicher Intensität erkrankt gefunden werden, da das Türksche Bündel absteigend, die Hörstrahlung aufsteigend leitet, was auf die Geschwindigkeit, mit welcher die sekundäre Degeneration zutage tritt, Einfluß hat. Man wird auf Grund dieses Verhältnisses eher erwarten dürfen, daß einmal eine sekundäre Degeneration des Türkschen Bündels ohne Degeneration des inneren Kniehöckers gefunden wird, als umgekehrt. Hörstrahlung und Türksches Bündel stellen also ein konjugiertes Strangpaar dar, welches zusammengehört wie die vorderen und hinteren Wurzeln, Schleife und Pyramidenbahnen etc. Schließlich sei noch darauf hingewiesen, daß nach den Untersuchungen Ferriers und Turners bei Affen Exstirpation der ersten Schläfenwindung sekundäre Degeneration (Marchi) des inneren Kniehöckers *und des Türkschen Bündels* bis zur Brücke im Gefolge hat, was mit den von mir entwickelten Grundsätzen, nicht mit denen Dejerines übereinkommt.

Ist hiernach der Ursprung des Türkschen Bündels *nicht* in der zweiten und dritten Schläfenwindung bezw. im Feld 36 zu suchen, so besitzt letzteres *überhaupt keinen Stabkranz*, da Verbindungen mit anderen subkortikalen grauen Massen *nicht* nachweisbar sind. Die Degenerationen im Sehhügel, welche bei ausgedehnten Zerstörungen im Schläfenlappen beobachtet werden, beruhen lediglich auf Unterbrechung der Sehstrahlung oder von Stabkranzbündeln des Gyrus hippocampi.

Bei Zerstörung des letzteren degeneriert außer der vorderen Kommissur[1]) besonders regelmäßig der Fornix inferior in seinen kortikofugalen bis zum Corpus mammillare verfolgbaren Bündeln, gelegentlich auch das letztere selbst. Auch Degenerationen des Fornix longus bis ins Septum pellucidum werden beschrieben, sowie partielle Degenerationen der Sehstrahlung, welche einzelne Bündel für den Gyrus hippocampi führt. Ich vermisse dagegen sichere Angaben über Degeneration des unteren inneren Thalamus-

---

Seite, während das Türksche Bündel in der Norm mindestens $^1/_6$ des Querschnittes bildet.

1) Zuerst von mir und Popoff beschrieben, Neurol. Zentralblatt 1886, Nr. 22. In diesen zwei Fällen waren außer Teilen des Gyrus hippocampi noch die Gyri linguales in großer Ausdehnung zerstört. Nach den Untersuchungen Ramon y Cajals hat man wohl im Gyrus hippocampi die Ursprünge der vorderen Kommissur zu suchen. Immerhin ist die Frage noch nicht als definitiv entschieden zu betrachten.

Digitized by Google

stieles, welcher nach myelogenetischen Befunden (FLECHSIG) den Gyrus hippocampi mit dem medialen, ja vielleicht auch vorderen[1]) Sehhügelkern verbindet.

Über sekundäre Degeneration nach Zerstörungen *in der Umgebung* des Gyrus hippocampi liegt wenig zuverlässiges Material vor. VON MONAKOW schließt aus einem Falle von Sklerose des Gyrus occipito-temporalis bezw. der dritten Temporalwindung, daß diese Regionen mit dem *lateralen* Sehhügelkern zusammenhängen. Die Beweisführung entspricht nicht exakteren Ansprüchen. Dicht am Mark des Gyrus occipito-temporalis verläuft die Sehstrahlung, verlaufen die Stabkranzbündel des Gyrus hippocampi; es ist kaum möglich, daß der Occipito-temporalis in seiner ganzen Dicke erkrankt, ohne daß die Sehstrahlung lädiert wird. Die untersten Bündel der letzteren ziehen aber von unten her an der Grenze vom lateralen Kern und primären Pulvinar in den Sehhügel empor. Ein irgendwie exakter Beweis dafür, daß der Occipito-temporalis einen Stabkranz besitzt, steht also noch vollständig aus.

Was die Felder am *Stirnpol* (26, 27, 28, 35 und $35^b$) anlangt, so liegen Angaben über sekundäre Degenerationen nur von DEJERINE vor, und auch hier kommt nur *ein* Fall in Betracht (MORICEAU linke Hemisphäre), aus welchem sich schon seiner Isoliertheit halber nur mit Vorsicht Schlüsse ziehen lassen. Da der fragliche Fall nur *Teile* zweier jener myelogenetisch abgegrenzten Felder zerstört, so genügt das vorhandene Material an sekundären Degenerationen offensichtlich nicht, um irgendwie erschöpfende Aufschlüsse über jene große Zone zu geben. Im Grunde genommen handelt es sich im Stirnhirn überhaupt nur um die genauere Feststellung der kortikalen Beziehungen *eines* Fasersystems, des vorderen Sehhügelstiels der Autoren, über welchen in den Lehrbüchern meist unzutreffende Angaben zu finden sind. Derselbe ist eine zusammengesetzte Bildung; lediglich die mittleren Bündel der vorderen Abteilung der inneren Kapsel[2]) kommen in Betracht. Dieselben dringen im Stirnlappen gegen

---

1) Daß derselbe, wie VON MONAKOW will, mit dem Lobulus paracentralis und der inneren Fläche der ersten Stirnwindung zusammenhängt, ist schon von DEJERINE als unbegründet zurückgewiesen worden.

2) Die dorsalen und ventralen Faserzüge stehen teils zur vorderen Zentralwindung ($5^b$), teils zur Riechsphäre in Verbindung.

Digitized by Google

den Pol vor, treten aber, wie bereits oben betont, *nicht in die Rinde* des Pols (höchstens einzelne aberrierte Fasern ausgenommen), sondern beschreiben eine Kurve zum Teil sehr steiler Art und gelangen so zum (kleineren) Teil in das Cingulum (sekundäres Cingulum[1]) Flechsig im Gegensatz zu den überaus früh sich ummarkenden Fasern des primären Cingulum, welches dem Pedunculus septi pellucidi nahe steht), zum größeren Teil in die frontale Abteilung der Zentralzone. Nach Abzug der (S. 202, Anm. 2) genannten Stabkranzbündel von *anderer* Verlaufsweise zerfällt demnach der vordere Sehhügelstiel in zwei Abteilungen, welche man kurz als sekundäres Cingulum und als *Stabkranz* der frontalen *Zentralzone* bezeichnen kann. Um den Verlauf dieser Bündel darzustellen, empfiehlt es sich, mittels Weigert-Pal entweder drei- bis viermonatliche Kinder zu untersuchen oder aus senilen Gehirnen (wo die atrophischen Assoziationssysteme die Projektionsbündel weniger überdecken) Sagittal- und Horizontalschnitte[2]) anzufertigen. Man überzeugt sich hierbei leicht, daß der Stabkranz[3]) der frontalen Zentralzone (für Feld 15 und 15[a]) bis auf 1,5 cm an die Rinde des *vorderen* Stirnpols heran, also bis tief herein in die Markleiste der ersten Frontalwindung ge-

1) Dasselbe ist nicht, wie die meisten Lehrbücher es darstellen, ein Assoziationssystem; es wird aber vielfach von solchen begleitet (vergl. auch Ramon y Cajal Riechrinde).

2) An den von von Monakow mit Vorliebe verwandten Frontalschnitten sieht man von den fraglichen Umbiegungen selbstverständlich fast nichts.

3) Bei einem erwachsenen Chimpansen fand ich ihn bis auf 0,5 cm an die Rinde des Stirnpoles heranziehen, bevor er umlenkte. Es lassen sich kaum experimentelle Verletzungen des Stirnpoles erzeugen, welche nicht mindestens 1 cm in die Tiefe dringen bez. bis in diese Tiefe Blutungen hervorbringen. Wenn also eine Anzahl Autoren nach Abtragung des Stirnpoles bei höheren und niederen Affen sekundäre Degeneration im vorderen Sehhügelstiel erhielten, so beweist dies durchaus nicht, daß die *Rinde* des Stirnpoles einen Stabkranz-Anteil erhält, solange nicht durch sorgfältige anatomische Kontrolluntersuchungen *ausgeschlossen* wird, daß die Degeneration von direkter Zerstörung des Stabkranzes der frontalen Zentralzone abhängt. Es liegt gerade hier der Beweis vor, daß die experimentelle Physiologie ohne genaue anatomische Kenntnisse leicht zu Trugschlüssen führt, indem der Experimentator tatsächlich, wie Gudden (Ges. Abhandl. XXXI) sich treffend ausdrückt, gar nicht weiß, was er eigentlich getan hat.



Digitized by Google

langt, bevor er umbiegt. Erweichungsherde, welche an dieser Stelle 2 cm in die Tiefe reichen, zerstören schon zahlreiche Projektionsbündel der frontalen Abteilung der Zentralzone, ja (mit dem sekundären Cingulum) auch der hippokampischen Zone. Unterwirft man mit Rücksicht hierauf den DEJERINEschen Fall MORICEAU einer kritischen Beurteilung, so ergibt sich alsbald, daß derselbe einen Beweis für die Existenz eines Stabkranzes auch nur für einen Teil meines frontalen Assoziationszentrums *nicht* liefert. Freilich ist eine umfassende Analyse aller Verhältnisse nicht möglich, weil DEJERINE auch von diesem prinzipiell überaus wichtigen Fall äußerst spärliche Details gibt. Immerhin gelingt es schon, aus dem Wenigen, was der Autor bietet (eine Oberflächenansicht und die Abbildung eines Horizontalschnittes), das Wesentlichste zu erkennen. Die Oberflächendarstellung zeigt, daß der fragliche Herd je einen Teil von Feld 28 und $35^b$ zerstört, insgesamt aber kaum ein Zehntel des Gebiets, welches ich früher als frontales Assoziationszentrum zusammengefaßt habe, vernichtet. Der Horizontaldurchschnitt zeigt deutlich, daß die angeblich „oberflächliche" Erweichung zwischen die Bündel des vorderen Sehhügelstieles selbst eindringt. Sekundär degeneriert sind im Anschluß daran nicht nur *absteigend* Bündel im inneren (medialen) Thalamuskern, *sondern auch aufsteigend das sekundäre* Cingulum medial von der primären Läsion, und hat der Zeichner die Unterbrechung einzelner Stabkranzbündel des Gyrus fornicatus scharf markiert. Auch ohne die letztere Tatsache würde schon die Ausmessung der Tiefe des Herdes die Bezeichnung desselben als „oberflächlich" (DEJERINE) *widerlegen*. Schon auf dem einzigen abgebildeten Horizontalschnitt reicht derselbe 2 cm in die Tiefe — es ist aber mangels aller genaueren Angaben bei DEJERINE nicht einmal sicher, daß der fragliche Schnitt gerade die Ebene der größten Tiefenausdehnung wiedergibt.

Der eingehende Kenner dieser Gegend wird schon aus dieser einen Abbildung ersehen, daß mindestens fünf große, von der Rinde des Stirnpols gänzlich unabhängige Stabkranzbündel primär zerstört sind; man braucht deshalb die Frage, wie sich wohl *auf den übrigen* (mindestens 100) Serienschnitten, durch welche der Herd sich hindurch erstreckt, die Situation gestaltet, gar nicht erst zu stellen; schon das Wenige, was DEJERINE mitteilt, läßt den Beweis, daß die degenerierten Bündel des Sehhügels (innerer Kern und vorderer lateraler Kern) mit der Rinde des Stirnpols

Digitized by Google

zusammenhängen, als mißlungen erscheinen.[1]) Dieselben Bündel wie links sind im Fall Moricrau in der rechten Hemisphäre zerstört durch einen Herd in der dritten Stirnwindung (mein Feld 27) und findet sich dementsprechend im Anschluß hieran auch rechts eine Degeneration des vorderen Sehhügelstiels und des medialen Thalamuskerns. von Monakow, welcher zwei ähnliche Fälle untersucht hat, schließt daraus, daß der innere Thalamuskern mit der zweiten und dritten Stirnwindung zusammenhängt, während Dejerine seine Erfahrungen dahin präzisiert, daß der innere Thalamuskern mit den *vorderen äußeren* Partien des Stirnlappens zusammenhänge.

*Beide* Anschauungen sind unhaltbar, beide gründen sich auf ein Untersuchungsmaterial, welches viel zu klein ist, um sichere Schlüsse zu ermöglichen, geschweige denn gesetzmäßige Beziehungen aufzudecken.

Da nach den myelogenetischen Befunden nicht zu bezweifeln ist, daß die Form der Kurve, welche der vordere Sehhügelstiel im Stirnhirn beschreibt, individuell wechselt, so liefert weder *ein* in bezug auf Stabkranzdegeneration positiver, noch *ein* negativer Fall von der Beschaffenheit des Dejerineschen allgemeingültige Befunde. Bei derartig mangelhaften Grundlagen ist lediglich ein „non liquet" am Platze — zumal wenn andere Untersuchungsmethoden mit Entschiedenheit *gegen* das Vorhandensein eines Stabkranzblattes sprechen, welches mit der *Rinde* des Frontalpols etc. in Verbindung steht.

Die Angaben über Befunde sekundärer Degenerationen im *Gyrus angularis* sind mannigfaltiger.

Dejerine beschreibt einen Fall, wo angeblich eine „oberflächliche"[2]) Läsion des Angularis vorlag mit konsekutiv absteigender Degeneration von Bündeln der Sehstrahlung und des

1) So verhält sich also *in Wirklichkeit* „der Fall", welcher nach dem übereinstimmenden Zeugnisse der Gegner meiner Theorie der Assoziationszentren, die letztere endgültig widerlegt, welcher nach Dejerine und vielen anderen „*beweist*", daß die Rinde des *ganzen*(!) *frontalen* Assoziationszentrums mit Stabkranzbündeln ausgestattet ist.

2) „Man sieht hier in der Tiefe des Defektes die Sehstrahlung *intakt*". Aus diesen Worten Dejerines geht zwar hervor, daß der Herd bis unmittelbar an die Sehstrahlung reicht; wie man aber von außen ohne Mikroskop „sehen" kann, daß die Sehstrahlung intakt ist, bleibt wohl rätselhaft.



Digitized by Google

Pulvinar. Bei weiterer Betrachtung der beigefügten Abbildungen und des Textes ergibt sich aber, daß der Fall keineswegs so einfach liegt, wie DEJERINE angibt. Zunächst ist der Angularis nicht allein erkrankt, auch der Gyrus supramarginalis und der hinterste Abschnitt der ersten Schläfenwindung sind zerstört, ja nach den Abbildungen sogar die Querwindung des Schläfenlappens teilweise! Es würde also zunächst zu erörtern sein, ob die vorhandenen sekundären Degenerationen, *wenn sie von der Rinde abhängen,* nicht ebenso gut zu letzteren Windungen in Beziehung gesetzt werden können. Wenn nun auch DEJERINE und VON MONAKOW annehmen, daß auch diese Windungen mit Stabkranzbündeln ausgestattet sind, so halte ich diese Version für so wenig zuverlässig, daß ich sie nicht zur Erklärrng heranziehen möchte. Die primäre Läsion betrifft nur einen Teil, etwa ein Drittel des Gyrus angularis — bezüglich der übrigen zwei Drittel beweist also der Fall überhaupt nichts; man würde also höchstens bezüglich *des verletzten* Drittels schließen können, daß es mit einem Stabkranz ausgestattet ist. Sind nach dem oben Bemerkten Teile von mindestens drei verschiedenen Rindenfeldern (34, 19, $14^b$ und eventuell auch 7) destruiert, so betrifft der Erweichungsherd auch *nicht lediglich die Rinde* und die anliegenden Assoziationssysteme, sondern er reicht *bis in die primäre Sehstrahlung* hinein; wenigstens zeigt dieselbe auf Fig. 98 einen deutlichen Defekt primären Charakters. Endlich handelt es sich überhaupt nicht um einen einzigen Herd, sondern um mindestens drei, indem sich auch im Globus pallidus und in der äußeren Kapsel ziemlich ausgedehnte Zerstörungen finden. Besonders der in der äußeren Kapsel gelegene Herd reicht auf der Zeichnung (Fig. 98) bis dicht (2,5 mm) an die Sehstrahlung heran, da wo mit ihr die vordere Kommissur verschmilzt, welche denn auch sekundär degeneriert erscheint. In der Sehstrahlung selbst sind Faserzüge entartet, welche nach anderen zuverlässigen Befunden *nicht* mit dem Angularis zusammenhängen können, speziell dickfasrige Bündel der primären Sehstrahlung, welche sich myelogenetisch sicher nach anderen Rindenfeldern als Nr. 34 verfolgen lassen. Im Sehhügel erstreckt sich die Degeneration auf Regionen, welche man bei Herden im Cuneus, besonders in den der Sehsphäre angehörigen Abschnitten desselben *in der Regel* beteiligt findet. Die degenerierten Bündel der Sehstrahlung kommen der Zeichnung nach zum guten Teil von unten herauf, aus *basalen* Bündeln der

Digitized by Google

Sehstrahlung (Fig. 98), die *dorsalen* Faserzüge, welche dem Gyrus angularis direkt anliegen, erscheinen kaum affiziert. Es fehlt also der überzeugende Nachweis, daß die in der Sehstrahlung und im Sehhügel vorfindlichen Degenerationen nur von der Verletzung der Rinde des Gyrus angularis abhängen können. Es wird aber dem fraglichen Fall vollends alle Beweiskraft für einen Stabkranz des Angularis genommen, dadurch, daß ich in mehreren Fällen von totaler Zerstörung des Gyrus angularis *gerade die dort degenerierten Bündel*, wenigstens *größtenteils, intakt* fand; zum mindesten kann man also nicht von gesetzmäßigen Befunden sprechen.

Nicht viel besser steht es mit einem Fall von Monakows, wo sich an Zerstörung des Sehhügels angeblich eine *aufsteigende* Degeneration von Stabkranzbündeln des Gyrus angularis (unteres Scheitelläppchen) angeschlossen hat. Nicht nur daß von Monakow selbst bezweifelt („es ist mir nachträglich doch ein kleiner Zweifel aufgetaucht"), daß es sich wirklich um degenerierte *Stabkranzbündel*[1]) handelt, so sprechen auch dafür weder die Abbildungen[2]) von Monakows noch die ganze Beschaffenheit des Falles überhaupt.

---

1) Übrigens weicht von Monakow in bezug auf die Deutung dieser Bündel in späteren Mitteilungen (Ergebn. der Physiologie, Jahrgang I, 2. Abtlg., S. 662) gegenüber den früheren insofern ab, als er dort den Angularis (nach Dejerines Vorgang) mit dem Pulvinar in Verbindung treten läßt, 1899 nur mit der ventralen Kerngruppe des Thalamus.

2) von Monakow bildet als Beweis dafür, daß im unteren Scheitelläppchen degenerierte Stabkranzbündel vorhanden sind, einen Frontalschnitt ab; da dieser Schnitt aber durch den Balkenwulst geht, so trifft er in Wirklichkeit dorsal den Lob. paracentralis (von von Monakow als Scheitellappen bezeichnet), zum Teil also die Zentralzone, zum Teil den Gyrus supramarginalis, kaum andeutungsweise den Parietalis I (Felder 2, 16 und 19). Die angebliche sekundäre Degeneration des Stabkranzes des oberen Scheitelläppchens betrifft tatsächlich die hintersten Bündel der Taststrahlung — und von den Abbildungen sagt von Monakow selbst, daß die sekundäre Degeneration „etwas zu stark" markiert sei — und dabei handelt es sich um eine *halbschematische* Wiedergabe! Auch liegt keine einfache Herderkrankung vor, sondern außer dem Herde im Sehhügel finden sich besonders in den hinteren Hirnabschnitten noch zahlreiche bis Hirsekorn große perivaskuläre Herde und in der Nähe der Ventrikelwand „oft nur stecknadelkopfgroße" Ansammlungen von Fettkörnchenzellen, vermutlich kleinste Erweichungsherde. Daß besonders von letzteren Degenerationen von

Digitized by Google

Zu dem allen kommt noch, daß VON MONAKOW die angebliche sekundäre Degeneration mittels Karmin untersuchte, eine überaus unzuverlässige Methode im Großhirn. Er schließt überwiegend aus dem Vorkommen vieler voluminöser protoplasmareicher Zellen im Mark des Gyrus angularis (und supramarginalis), daß die Degeneration bis hierher geht. Dieser Schluß ist schon deshalb von zweifelhaftem Werte, weil die wenigen klinischen Daten, die über den Fall vorliegen (Paralexie, Paragraphie), die Vermutung recht nahe legen, daß im Bereich des Angularis *von vornherein primäre Störungen vorhanden* gewesen sind, primäre Entartungen der nervösen Elemente durch ungenügende Durchblutung (Atheromatose).

Auch ein zweiter ähnlicher Fall, welcher von PROBST mitgeteilt worden ist, Nachweis von Markschollen in der ersten und zweiten Scheitelwindung mittels der MARCHIschen Methode nach Blutung im Sehhügel, kann nicht als beweiskräftig gelten, nicht nur, weil Untersuchung und Beschreibung überaus flüchtig sind, sondern weil sich in diesem Gehirn auch Markschollen an Stellen finden, welche mit dem primären Herd sicher nicht in Verbindung stehen.

Es bleibt schließlich noch die bereits erwähnte Angabe FERRIERS und TURNERS, nach welcher dieselben im Angularis nach Anbohrung des Sehhügels niederer Affen „entartete Fasern" (mittels MARCHI) gefunden haben. Daß man diese Befunde ohne weiteres auf den menschlichen Angularis übertragen kann, erscheint mir nach dem oben Bemerkten zweifelhaft. Wichtig ist trotzdem die Angabe FERRIERS, daß es ihm *nicht* gelungen ist, durch *Zerstörung der Rinde* des Angularis ein Stabkranzbündel zur Degeneration zu bringen. In dieser Angabe müßte eine direkte Widerlegung der DEJERINEschen Befunde bez. Deutungen erblickt werden, wenn nicht der Einwand gestattet wäre, daß der Gyrus angularis niederer Affen gar nicht dem Angularis des Menschen gleichwertig ist. Die FERRIERschen Angaben stehen deshalb mit den Ergeb-

---

Balkenbündeln ausgehen können, liegt auf der Hand — denn die Balkenbündel verlaufen „zunächst der Ventrikelwand". Die angeblich sekundär degenerierten Stabkranzbündel verlaufen denn auch ganz wie Balkenbündel. Der positive Nachweis, daß die degenerierten Elemente zur *Rinde* des Gyrus angularis *als Projektionssysteme* in Beziehung stehen, fehlt somit.

Digitized by Google

nissen Dejerines nur bedingt in Widerspruch, *keinesfalls in Übereinstimmung.*

Überblickt man hiernach die über den Stabkranz des Gyrus angularis vorliegenden pathologischen bez. experimentellen Untersuchungen, so kann man zwar in denselben trotz aller Mängel im einzelnen einen gewissen Hinweis auf das Vorhandensein von Projektionsfasern erblicken, von positiven Beweisen kann aber nicht die Rede sein angesichts eines so widerspruchsvollen, mangelhaft bearbeiteten Beobachtungsmaterials. Hierzu kommt aber als ein besonders gewichtiger Gegengrund noch folgendes: In den von mir bearbeiteten Fällen (ein Material, wie es vielleicht keinem der anderen Forscher zur Verfügung gestanden hat) gelangen die nach der Zerstörung des Gyrus angularis degenerierten Faserzüge ausschließlich in das Pulvinar; ventrale, laterale und mediale Thalamuskerne bleiben völlig intakt. Die Degeneration des Pulvinar ist stets um so vollständiger, je ausgedehnter die Zerstörung im Stabkranz des Gyrus fornicatus und hippocampi ist. Bleibt letzterer intakt, so ist auch bei ausgedehntester Erkrankung des Angularis im Thalamus *nicht mehr als das Feld degeneriert, welches bei Zerstörung des Cuneus leidet.* Weder in der Sehstrahlung noch im Sehhügel lassen sich Faserzüge abgrenzen, welche *nur* bei Läsion des Angularis degenerieren.

Es ist sonach durchaus unsicher, daß eine besondere Abteilung des Stabkranzes existiert, welche speziell zum Gyrus angularis in Beziehung steht. Wenn von Monakow eine solche annimmt und sie zwischen die Tast- und Sehstrahlung eingeschoben sein läßt, so kann es sich sehr wohl um eine falsche Deutung von Bündeln handeln, welche ich oben der Kürze halber als *oberen hinteren Sehhügelstiel* bezeichnet habe. *Es ist zuzugeben, daß die Herkunft und das Ende dieser Bündel noch nicht völlig erschöpfend aufgeklärt ist.* Wenn auch nicht bezweifelt werden kann, daß hier das spätere Stabkranzbündel des Gyrus fornicatus und hippocampi (Felder $4^b$ und 6) und eventuell auch die erste Okzipitalwindung in Betracht kommen, so könnten doch neben diesen Elementen noch andere existieren, welche zu den Scheitelwindungen in Beziehung stehen. Es wird notwendig sein, zunächst den Umfang des Stabkranzes der Sehsphäre und der ersten Okzipitalwindung genau festzustellen. Nach den von mir beobachteten Fällen degeneriert schon bei Erkrankungen des Feldes 5 die primäre Sehstrahlung *bis in ihre dorsalsten Bündel* und auch die sekundäre

Digitized by Google

Sehstrahlung. Hinter dem Eintritt der Stabkranzbündel des Gyrus fornicatus und Gyrus hippocampi sieht man aus dem völlig intakten Gyrus angularis *nicht* irgend welche Stabkranzbündel zur degenerierten Sehstrahlung stoßen[1]) und dieselbe nach vorn zu verstärken. Hierdurch wird meines Erachtens *mit aller Sicherheit* ausgeschlossen, daß beim Menschen aus dem Gyrus angularis Projektionsfasern in solchen Mengen hervorgehen, daß man von einem *Stabkranz* zu sprechen berechtigt wäre. Es könnte sich höchstens um spärliche zerstreute Projektionsfasern handeln. — Wenn DEJERINE die oberen Ebenen des Pulvinar durch Stabkranzfasern mit einem Rindenfeld zusammenhängen läßt, welches die gesamten Windungen hinter dem secteur moyen (s. o.) umfaßt (äußere Oberfläche des Okzipitallappens, die anstoßenden Regionen des Parieto-Temporallappens und des Praecuneus), so finde ich bei ihm auch hierfür keinerlei beweisende Fälle. Es handelt sich hier um Rückschlüsse aus großen Herden, welche jenes Gebiet in toto betreffen; die Frage, inwiefern *für jeden einzelnen* der genannten Windungsabschnitte die Verbindung mit dem Pulvinar erwiesen ist, hat DEJERINE nicht einmal gestreift. Von feststehenden Tatsachen kann auch hier nicht die Rede sein. Offenbar handelt es sich auch hier wieder teilweise um den oberen hinteren Sehhügelstiel, welch letzterer die vorderen oberen Ebenen des Pulvinar versorgt, während die basale Sehstrahlung mehr zu den hinteren unteren in Beziehung tritt.

Die Verhältnisse am Hinterhauptspol sind mit Hilfe der sekundären Degeneration deshalb besonders schwer aufzuklären, weil kleinere Erweichungsherde auf der Außenfläche und im Praecuneus äußerst selten sind. Die okzipitalen Herde befallen mit Vorliebe die Lippen der Fissura calcarina und die untere Fläche des Okzipito-Temporallappens (hintere Abschnitte des Occip. temporalis, lingualis, Gyrus hippocampi). Es ist mir dehalb nicht einmal möglich gewesen, auf dem Wege der sekundären Degeneration einen Stabkranz des Feldes 9 überzeugend nachzuweisen, wenn auch manche Befunde für die Existenz eines solchen sprechen. Es ist hier darauf hinzuweisen, daß die obersten Fasern der „Seh-

---

1) von MONAKOW, der das Gegenteil angibt, hat meines Erachtens wieder Balken- und Stabkranzbündel verwechselt und den Stabkranz des Gyrus fornicatus nicht hinreichend gewürdigt. Der letztere ist naturgetreu dargestellt bei DEJERINE (Hirnanatomie Bd. II, Fig. 9).

Digitized by Google

strahlung", welche gegen das Feld 9 verlaufen, dicht unter dem Gyrus angularis hinwegziehen müssen und hier häufig (wie besonders bei ca. 7 Wochen alten Kindern nachweisbar ist) nur wenige Millimeter von der Rinde des Angularis entfernt bleiben, so daß es leicht den Anschein gewinnt, daß sie in letztere eintreten. *Mitunter,* wenn auch selten, *gerät auch ein Teil des Feldes 9 durch Verlagerung des Sulcus interparietalis in den Angularis hinein,* und dasselbe gilt vom Feld 13; dann hat der Angularis eventuell einen Stabkranz, der nichts mit dem Feld 34 zu tun hat. Soll wirklich festgestellt werden, ob letzteres einen Stabkranz besitzt, so muß eine größere Anzahl von Fällen verglichen werden; nur eine bis in die Rinde von Feld 34 selbst verfolgbare Degeneration, die gesetzmäßig unter bestimmten Verhältnissen (Sehhügelläsion) wiederkehrt, würde als entscheidend gelten können. Vorläufig ist dieser Anforderung auch nicht andeutungsweise genügt worden. Es muß der Zukunft überlassen bleiben, hier volle Klarheit zu schaffen.

Aus dem Vorstehenden erhellt wohl zur Genüge, daß es vorläufig ganz unmöglich ist, auf Grund der sekundären Degenerationen die Großhirnrinde rationell einzuteilen. Für kein einziges kortikales Fasersystem, die Pyramidenbahnen nicht ausgenommen, ist der kortikale Ursprungs- und Ausbreitungsbezirk einwandfrei umgrenzt worden. Es ist lediglich eine *Legende,* wenn in der neueren Literatur vielfach die Behauptung wiederkehrt, durch die sekundären Degenerationen sei exakt erwiesen, daß die Großhirnrinde an allen Orten mit einem Stabkranz ausgestattet sei. Auch die Behauptung, für jeden Sehhügelkern [1]) sei das zugehörige Rinden-

1) So zahlreich auch die Angaben vorliegen in bezug auf die Verbindungen des Sehhügels mit der Rinde, so handelt es sich nur um Stückwerk. Weder ist es bisher gelungen, eine rationelle Einteilung des Sehhügels in Kerne von besonderer Bedeutung durchzuführen (wir können nur von Regionen sprechen), noch ist das zu jedem dieser vermeintlichen Kerne gehörige Rindenfeld scharf umgrenzt worden. Es ist demgemäß durchaus korrekt, daß Dejerine die von von Monakow versuchte Einteilung des Sehhügels nicht akzeptiert hat. Die schon makroskopisch sich sondernden Sehhügelregionen entsprechen in weit höherem Maße Abschnitten von besonderer Einschaltung (Funktion) als die vielfach ohne rationelle Grundlage, also künstlich abgegrenzten Kerne von Monakows — vergl. auch Kölliker, Gewebelehre 6. Aufl., S. 560.

Digitized by Google

feld exakt festgestellt, und es sei so die Verbindung der ganzen Rinde mit dem Thalamus nachgewiesen, ist, was den Menschen anlangt, nur ein Lapsus. *Wissenschaftlich* festgestellt sind vorläufig nur Beziehungen des Thalamus zu den primären Sinnessphären — was darüber hinausgeht, ist unsicher.

Die sekundären Degenerationen lehren im wesentlichen nur Verlaufsabschnitte einzelner Faserzüge näher kennen, gelegentlich die Ursprünge, gelegentlich die Endorgane, selten beides zusammen und den Gesamtumfang eines Faserzuges. Die Anschauung, daß es mit Hilfe der sekundären Degeneration gelingen *müsse*, das Hirnschema des Menschen klarer und erschöpfender festzustellen als mittels der myelogenetischen Methode, ist eine auf mangelhafter Kenntnis der ersteren wie der letzteren beruhende Täuschung. Der Vorzug der myelogenetischen Bilder liegt in der Ermöglichung einer raschen allgemeinen Orientierung, der der sekundären Degenerationen in der nachfolgenden Detailarbeit. Es würde schon einen großen Fortschritt bedeuten, wenn *die pathologischen Forscher bei Feststellung von Rindenzerstörungen nach Umfang und Lage immer auf die myelogenetischen Felder Rücksicht nehmen würden.* Was bisher von gesicherten zuverlässigen Aufschlüssen in dieser Hinsicht vorliegt, betrifft in erster Linie die *Primordialgebiete.* Die gröbere mikroskopische Anatomie *der letzteren* wird durch die sekundären Degerationen schon jetzt auf das wertvollste ergänzt. Die Pathologie bestätigt insbesondere oder zeigt für sich allein darauf hin, daß jede primäre Sinnessphäre mit einem *doppelten* Projektionssystem ausgestattet ist,

a. mit einer oder mehreren kortikopetalen Sinnesleitungen,
b. mit einer kortikofugalen bez. motorischen Bahn.

Stets gehören je eine kortikofugale und kortikopetale Leitung zusammen, sie bilden „konjugierte Leitungen" oder „Strangpaare" (FLECHSIG).

Die Sinnessphären sind also nicht lediglich Endstationen sensibler Leitungen, sondern stets auch motorische Zentren — sie können deshalb zweckmäßig mit dem allgemeineren Namen „Projektionsfelder" belegt werden.

Im einzelnen betrachtet, gestalten sich die Verhältnisse folgendermaßen:

1. Die Lamina perforata ant. erhält außer den primären Bündeln aus dem Globus pallidus, Fasern des Tractus olfactorius (34 cm).

Digitized by Google

Sie entsendet die Taenia thalami optici zum Ganglion habenulae[1]) (40 cm).

Das Trigonum olfactorium nimmt Olfactoriusfasern auf und entsendet Bündel gegen den Globus pallidus, deren weiteres Schicksal unbekannt ist.

2a. Die Zentralzone ist in ihrer Rolandoschen Abteilung (indirekt) Endstation der Schleife, auch der oberen Kleinhirnstiele, Ausgangspunkt der Pyramidenbahn und der Arnoldschen Bündel[2])!

b. Bezüglich ihrer frontalen Abteilung steht noch nicht fest, welche Bahnen als motorisch zu betrachten sind. Es lassen sich zwar zwei verschiedene Sehhügelsysteme, von denen das frühreifende seiner Entwicklungsrichtung nach kortikopetal leitet, in diese Zone verfolgen, doch ist der motorische Charakter speziell des spätreifenden Systems nicht sicher festgestellt. Sonach nimmt diese Zone (wenigstens in bezug auf die Felder 15 und $15^a$, welche sich erheblich später entwickeln als die Primordialgebiete Gruppe I) möglicherweise auch anatomisch eine Sonderstellung ein. Schon früh sind zahlreiche markhaltige Assoziationsfasern zwischen 15 und 8 bez. dem Lobulus paracentralis nachweisbar.

3. Uncus und Gyrus hippocampi besitzen mehrere kortikopetale Systeme (Tractus olfactorius lateralis, Stabkranz aus hinterer innerer Kapsel) — als motorische Bahn den Fornix inferior. Feld 6 zeigt zwei Systeme, ein frühes aus hinterer innerer Kapsel und ein späteres zum hinteren oberen Sehhügelstiel. Auch der innere untere Sehhügelstiel gehört wohl hierher, während Fornix longus und System $\beta$ des Uncus morphologisch Assoziationssysteme darstellen.

4. Die Sehsphäre erhält kortikopetale Fasern aus dem äußeren Kniehöcker und (?) Thalamus (primäres Pulvinar) und entsendet ein kortikofugales System zum vorderen Vierhügel, wahrscheinlich auch zum Thalamus (sekundäres Pulvinar), doch ist es unsicher, ob letzterem Bündel die Bedeutung eines Projektionssystems zu-

---

1) Derselben legen sich, wie bisher anscheinend ganz übersehen worden ist, Fasersysteme aus dem Globus pallidus an, so daß auch dieses Zentrum auf das Ganglion habenulae einwirkt. — Zur Lamina perforata anterior steht vermutlich auch die überaus früh sich umarkende (34 cm) Taenia semicircularis in Beziehung.

2) Bisher allerdings nur durch einen Fall Dejerines dargestellt.

Digitized by Google

kommt, d. h. ob es zwischen Rinde und periphere Endorgane eingeschaltet ist.[1])

5. Die Hörsphäre verfügt über die Hörstrahlung aus dem inneren Kniehöcker und das motorische TÜRKsche Bündel.

Beziehungen zum Thalamus sind nicht sichergestellt, doch möglich (man könnte an Verbindungen mit dem sekundären Pulvinar denken).

6. Bezüglich der Felder 9—13 fehlt vorläufig der Nachweis konjugierter Strangpaare, ausgenommen etwa No. 11. Nimmt man an, daß der obere Sehhügelstiel zur Zentralzone, der hintere zur Sehsphäre, der hintere obere und untere innere zur hippokampischen Zone, der vordere Stiel zur frontalen Abteilung der Zentralzone und zur hippokampischen Zone in Beziehung steht, so bleiben Sehhügelfasern für andere Rindenfelder überhaupt nicht in größerer Zahl übrig![2])

---

1) Es ist meines Erachtens unzweckmäßig, für die Sehhügelkerne Bezeichnungen zu wählen, mit welchen sich eine bestimmte klare Vorstellung nicht verbinden läßt, wie z. B. die Unterscheidung eines ventralis a., b., c. und dergl. Man kann aus dem Namen ventralis b. nicht ohne weiteres erkennen, welcher Kern gemeint ist. Da die Sehhügelkerne sich sukzessiv entwickeln und sukzessiv mit anderen Zentren in Verbindung treten, würde es gewisse Vorteile bieten, sie einfach zu nummerieren. Der ventrolaterale Kern würde die Nummer 1 erhalten, der mediale Kern bezw. das sekundäre Pulvinar die Nummer 7 resp. 8. Der Thalamus zerfällt, wie die Rinde, in myelogenetische Zonen, unter welchen Primordial-, Intermediär- und Terminalgebiete zu unterscheiden sind. Diese Gliederung hängt eng mit seinen Beziehungen zur Hirnrinde und ihren verschiedenen Feldern zusammen. Der Gliederung der Rinde in Felder entspricht eine weitgehende des *gesamten* Projektionssystems mit seinen subkortikalen Zentren. — Relativ selbständig ist eine analoge myelogenetische Gliederung der Kleinhirnrinde. Oberwurm und Flocke stellen die Primordialgebiete, der Lobus semilunaris superior das Terminalgebiet dar. Auch hier bedeutet die myelogenetische Gliederung eine Differenzierung in Sinnes- und Assoziationszentren — so daß die Kleinhirnrinde in bezug auf Flächengliederung mit der Großhirnrinde eine große Verwandtschaft zeigt.

2) Der Myelogenese nach könnten höchstens Beziehungen des unteren inneren Sehhügelstieles zu Teilen des Gyrus occipito-temporalis in Betracht kommen; doch bestehen auch hier bezüglich der Ummarkung noch erhebliche Zeitdifferenzen.

Digitized by Google

Die primären Sinnessphären nehmen hiernach anatomisch nicht nur zu den postmaturen Feldern, sondern *in gewisser Beziehung* auch gegenüber der II. Gruppe der Primordialgebiete eine ausgeprägte Sonderstellung ein.

Während es besonders für die Felder 16—36 schwierig ist, auch nur die Existenz vereinzelter Projektionsfasern exakt nachzuweisen, und die Natur dieser zweifelhaften Elemente in Dunkel gehüllt ist, sind für die primären Sinneszentren ausnahmslos in mehrfacher Zahl, ja bis zu einem halben Dutzend *umfängliche* Leitungen von und zur Peripherie nachgewiesen, welche die Anatomie meist schon lange kennt und mit besonderen Namen belegt hat — und diesen offenkundigen Unterschieden gegenüber wagt man es als absolute Wahrheit zu verkünden, daß alle Regionen der Großhirnrinde in gleicher Weise mit Projektionssystemen ausgestattet seien! Die wissenschaftliche Prüfung der Frage führt mit Notwendigkeit zur gegenteiligen Auffassung. Auch nach den Aufschlüssen der sekundären Degenerationen sind lediglich *die primären Sinnessphären wirkliche Projektionsfelder der Hirnrinde.*

Diese Resultate finden eine glänzende Bestätigung in den Ergebnissen der *klinischen Untersuchungen* in den funktionellen Folgeerscheinungen, welche die Zerstörung der einzelnen Felder mit sich bringt. Exakte Aufschlüsse sind allerdings auch hier überaus spärlich, noch spärlicher als bei der sekundären Degeneration, weil in bezug auf wissenschaftlich verwertbares Untersuchungsmaterial dieselben Mängel sich in den Weg stellen, ja sich noch weit mehr geltend machen müssen, indem eine wirklich erschöpfende klinische Analyse ohne genaue Kenntnis der jeweilig vorhandenen Hirnveränderung nur schwer ausführbar ist.

Der Erwerb an gesicherten Tatsachen betrifft wieder:

1. vor allem die motorische Zone in der Rolandoschen Gegend. Die genaueste Abgrenzung auf dem Wege der klinischen Beobachtung wird durch die elektrische Reizung der Hirnoberfläche ermöglicht, wie sie von verschiedenen Chirurgen in Öffnungen der Schädeldecke vorgenommen worden sind. So verdienstlich diese dem Zufall mit großer Umsicht abgerungenen Aufschlüsse zweifellos sind, so stehen sie doch in bezug auf das Gesamtergebnis an Zuverlässigkeit zurück hinter den auf das exakteste und planmäßig durchgeführten Experimenten Sherringtons und Grünbaums an Anthropoiden, welche methodisch wohl als mustergültig anzusehen sind, sodaß bei Abweichungen im Zweifelsfall letztere größeres

Digitized by Google

Zutrauen verdienen. Nach der Zusammenstellung von DEJERINE (a. a. O. Fig. 236) deckt sich die auf elektrische Reizung mit Bewegungen antwortende Zentralzone beim Menschen *in der Hauptsache* mit der beim Gorilla gefundenen, d. h. *in der Hauptsache* mit der vorderen Zentralwindung. Doch geht sie beim Menschen an einigen Stellen über die vordere Zentralwindung hinaus und zwar besonders *nach hinten* zu,

a. im Bereich des oberen Viertels bis in die erste Parietalwindung (vorderstes Viertel) (Zentren für Fuß und Zehen),

b. an der Grenze des unteren und zweiten Viertels (Zentren für den Daumen und die anderen vier Finger) bis in die hintere Zentralwindung hinein. *Nach vorn* gliedert sich angeblich ein Feldchen an (Zentrum für Kopf- und Augenbewegungen), welches im Fuß der zweiten Stirnwindung gelegen ist nächst der zweiten Frontalfurche.

Es ist fraglich, ob diese Befunde am Menschen als *allgemeingültig* betrachtet werden dürfen, da sie nicht nur der Zahl nach ungenügend sind, um für jeden wichtigeren Punkt der motorischen Zone auch nur zwei übereinstimmende Ergebnisse zu liefern, und da die Untersuchungen vielfach unter Bedingungen (in Trepanöffnungen) angestellt wurden, welche eine ganz zuverlässige Ortsbestimmung der gereizten Stellen gelegentlich erschweren. Da SHERRINGTON seine Reizversuche durch Erzeugung kleinster Herde (Exstirpation der wirksam gereizten Punkte) vervollständigte, so gelang es ihm, nicht nur den Ursprungsbezirk einzelner Bündel der Pyramidenbahn im Cortex exakt festzustellen, sondern auch das Nichtvorhandensein dieser motorischen Leitungen an den nicht reagierenden Stellen, besonders der ganzen hinteren Zentralwindung nachzuweisen. Wennschon nun von vornherein nicht in Abrede zu stellen ist, daß die abweichenden Befunde am Menschen auch auf Eigentümlichkeiten dieses letzteren beruhen können, so sprechen doch die myelogenetischen Bilder gegen eine solche Deutung. Die vordere Grenze der Felder 2, $2^b$ und $2^c$ beim Menschen fällt in der Regel *genau mit der von SHERRINGTON gefundenen vorderen Grenze der motorischen Zone beim Gorilla* zusammen — was schwerlich als ein Zufall zu deuten ist. Die vordere Grenze des myelogenetischen Rindenfeldes 2 geht aber auch nächst der zweiten Stirnfurche über die vordere Zentralwindung nach vorn hinaus in den Fuß der zweiten und dritten Stirnwindung über, sodaß der Befund eines auf elektrische Reizung mit Augenbewegungen re-

Digitized by Google

agierenden Focus hier sehr wohl auf einer (individuell veränderlichen?) Eigentümlichkeit des menschlichen Gehirns beruhen kann. Keinesfalls erlauben die Ergebnisse der elektrischen Reizung beim Menschen eine Ausdehnung der motorischen Zone auf den gesamten Fuß der zweiten und dritten Stirnwindung anzunehmen, wie dies bei Dejerine und von Monakow auf schematischen Darstellungen der fraglichen Zone zu finden ist. Da nun andererseits das Rindenfeld 2 infolge abnormer Lage des Sulcus calloso-marginalis *gelegentlich* bis in den Praecuneus und die erste Parietalwindung hineinreicht[1]), so geht der mittels elektrischer Reizung gefundene Umfang der motorischen Zone des Menschen nirgends über das myelogenetische Rindenfeld 2 hinaus. Die klinische Forschung liefert also auf diesem Gebiete nur einen weiteren Beleg, daß wohl die primären Sinnessphären, nicht aber die Randzonen 16, 18 etc. mit motorischen Projektionsfasern ausgestattet sind.[2]) Dasselbe gilt für die Schlüsse, welche sich aus der Beobachtung von Lähmungen nach Rindenläsionen ergeben. Soweit solche sich an kleinste Herde anschließen, sitzen dieselben in der Zentralzone. Während nun für Lähmungen einzelner Muskelgruppen (Monoplegie) oder komplette Hemiplegien nach Verletzung der vorderen Zentralwindung viele Beispiele vorliegen, ist die Zahl derartiger Fälle bei *reinen* oberflächlichen Läsionen der hinteren Zentralwindung überaus gering. Und auch in diesen Fällen fehlt der exakte Nachweis, daß die Läsion nicht über das Mark der hinteren Zentralwindung hinaus auf den Stabkranz der vorderen

---

1) Der hintere Teil der Taststrahlung liegt regelmäßig *unter* der ersten Parietalwindung und zieht unter dieser zur Zentralwindung.

2) Bezüglich der auf elektrische Reizung mit Augenbewegungen reagierenden Zone im Stirnhirn bemerkt Sherrington *ausdrücklich*, daß er es nicht für gerechtfertigt halte, sie in die motorische Zone einzubeziehen, da die Art ihrer Reaktion auf Reize von jener der motorischen Zone *wesentlich verschieden* sei. Die Sherringtonschen Befunde ergeben auch hier eine überraschende Übereinstimmung mit meinen myelogenetischen Feststellungen, insofern, als ich in der fraglichen Gegend weder eine primäre Sinnessphäre noch irgend welche motorische Bahnen nachweisen konnte. Auch Beevor und Horsley finden, daß sich vom Stirnlappen aus eine sekundäre Degeneration von kortiko-quadrigeminalen Bahnen nicht nachweisen läßt, während Zerstörung der Zentralzone eine solche Bahn zutage treten läßt — ein weiterer Beleg dafür, daß alle motorischen Bahnen von Primordialgebieten ausgehen.

Digitized by Google

Zentralwindung übergriff. Fälle, wo dieser Verdacht nicht durch *lückenlose* Serienschnitte ausgeschlossen wird, können eine Beweiskraft für die motorische Funktion der hinteren Zentralwindung überhaupt nicht beanspruchen.[1])

Die kortikalen Lähmungen liefern auch keinerlei exakten Beweis für die motorische Bedeutung des Fußes der zweiten und dritten Stirnwindung in der Ausdehnung, wie sie sowohl auf dem nur erwähnten Schema von MONAKOWS wie auf dem von DEJERINE dargestellt ist. Es handelt sich hier nur um Hypothesen.

Wenn es nach den vorliegenden Beobachtungen keinem Zweifel begegnen kann, daß die *willkürliche* Innervation der Extremitäten, sowie der vom V., VII., X., XI. und XII. Hirnnerven versorgten Kopf- (Augen-) und Halsmuskeln ausschließlich von der vorderen Zentralwindung bez. dem Lobulus paracentralis abhängt, so fehlen für den Rumpf i. e. S. in diesem Rindenbezirk entsprechende Zentren. Die letzteren sind nach den bisher vorliegenden keineswegs einwandfreien klinischen Beobachtungen im Stirnhirn zu suchen, und hier kommen hauptsächlich zwei innere Rindenfelder in Betracht, 8 und 15 bez. $8^b$ und $15^a$. Gegen die Beteiligung von 28 und 35 spricht ohne weiteres, daß bei isolierten Verletzungen der Gebiete Störungen des Gleichgewichts, der Rumpfhaltung etc. nicht irgendwie regelmäßig beobachtet werden. Da aber an den fraglichen Erscheinungen vielleicht der vordere Sehhügelstiel beteiligt ist, der bis nahe an den Stirnpol heranreicht, so ist in der Deutung bez. in bezug auf ihre kortikale Lokalisation Vorsicht geboten und vorläufig eine Entscheidung nicht zu treffen.

Nächst den Zentren *der willkürlichen Bewegung* ist klinisch die am *Sehen* beteiligte Rindenzone am besten bekannt. Es ist das Verdienst vorzüglich von HENSCHEN, hier *völlig unabhängig* von der Myelogenese auf rein pathologischem Wege das Gesetzmäßige vom Zufälligen geschieden zu haben, indem er, auf ein

1) Dies gilt speziell von zwei Fällen, welche von MONAKOW in seinem Schema der motorischen Zone (Hirnpathologie Fig. 108) besonders markiert hat (Daumen- und Fingerlähmung). Desgleichen von zwei a. a. O. auf T. 114 dargestellten traumatischen Oberflächenläsionen. Hier ist die Lage der Herde auf der Hirnoberfläche nach ALLEN STARR von außen her bestimmt; da aber die fragliche Methode zum Teil offenbar auf falschen Voraussetzungen beruht, so können Fehler bis zur Verwechslung der Zentralwindungen unterlaufen.

Digitized by Google

großes, sorgfältig beobachtetes klinisches Material gestützt, zu dem Schlusse kam, daß Gesichtsfelddefekte lediglich bei Verletzung des mit dem Vicq d'Azyrschen Streifen ausgestatteten Rindenfeldes oder seiner sensiblen Leitungen beobachtet werden. In der Tat fehlt in der Literatur vollständig ein Fall, welcher das Gegenteil bewiese. Noch niemals ist im Anschluß an eine Rindenzerstörung, welche nachweislich weder das Feld 5 noch die primäre Sehstrahlung verletzte, ein Gesichtsfelddefekt nachgewiesen worden, während bei Erkrankungen der Fissura calcarina oder der Sehstrahlung diese Art von Sehstörungen überaus häufig ist. Die Ausdehnung, welche Vialet und Dejerine der Sehsphäre geben (indem sie auch den oberen Teil des Cuneus und Teile des Occipito-temporalis hinzurechnen), ist nicht durch eine hinreichende Zahl eindeutiger Beobachtungen erwiesen, noch weniger aber die Vermutung von Monakows, daß auch die gesamte Außenfläche des Hinterhauptlappens, ja der Gyrus angularis wenigstens zum Teil hier in Betracht kommen. Doch muß hierbei in bezug auf die Okzipitalwindungen berücksichtigt werden, daß der Vicq d'Azyrsche Streifen sich *mitunter* bis in die dritte Okzipitalwindung hinein erstreckt.

Auch der Versuch, die Außenfläche des Okzipitallappens für Zentren der *Augenbewegungen* in Anspruch zu nehmen, muß als unbegründet bezeichnet werden. Speziell das untere Scheitelläppchen habe ich in einer ganzen Reihe von Fällen zerstört gefunden, wo konjugierte Augenabweichungen, ja überhaupt Bewegungsstörungen der Augen völlig fehlten oder nur in Verbindung mit ausgedehnten epileptischen Krämpfen beobachtet wurden. Sherrington vermochte bei Anthropoiden zwischen Zentralfurche und primärer Sehsphäre nirgends ein erregbares Feld nachzuweisen, was insofern von großem Interesse ist, als hiernach die Felder 9, 12 und 13, d. h. Primordialgebiete der zweiten Gruppe, nicht als motorische Zentren aufzufassen sind (wie sie ja auch der konjugierten Strangpaare anscheinend entbehren).

Bezüglich des *Gehörs* zeigt die Pathologie nur, daß dasselbe nur durch *doppelseitige* Herde vernichtet wird, welche in der Gegend des hinteren Endes der Fossa Sylvii gelegen sind; über diesen allgemeinen Hinweis auf die Gegend der temporalen Querwindung gehen die sicheren Beobachtungen nicht hinaus (vergl. u. sensorische Aphasie).

Die Aufschlüsse über die Zentren des Riechens und Schmeckens



Digitized by Google

in der Rinde sind gleichfalls ziemlich vager Natur. Der Uncus, der Isthmus, der Gyrus hippocampi kommen hier in Betracht, irgend genauere klinische Daten über den Umfang, die Grenzen der Schmeck- und Riechsphäre liegen nicht vor.

Etwas günstiger liegen die Verhältnisse in bezug auf die Sensibilität der Haut, der Muskeln und der Gelenke, in welcher Beziehung ich auf das bereits oben angeführte verweisen kann. Betonen möchte ich hier nur noch einmal, daß die Scheitelwindungen, abgesehen von der hinteren Zentralwindung, nichts mit diesen Sensibilitätskategorien zu tun haben. In *keinem* meiner zahlreichen Fälle von Zerstörung des Gyrus angularis, supramarginalis[1]), Parietalis I wurden bei sorgfältigsten Sensibilitätsprüfungen Defekte gefunden; lediglich bei Mitverletzung der hinteren Zentralwindung treten solche hervor und zwar am regelmäßigsten als Astereognosie der Hand.[2])

In bezug auf das Schmerzgefühl kann es sich nach den TÜRKschen Befunden (Aufhebung bei Zerstörung des Stabkranzes am Austritt aus der inneren Kapsel[3]), hintere Abteilung), sowie in Anbetracht der Tatsache, daß Zerstörung der Zentralwindungen Analgesie nicht regelmäßig mit sich bringt, nur darum handeln, festzustellen, ob die frontale Abteilung der Zentralzone oder die

---

1) Ich kann hier auf die Ausführungen DEJERINES verweisen (a. a. O. p. 239), welcher zu dem Schluß kommt, daß die Zone der allgemeinen Sensibilität nach rückwärts *nicht* über die motorische hinausgeht.

2) Man mag dieses Symptom auffassen wie man will, als Empfindungs- oder Assoziationsstörung, so sind doch in der Regel, wenn nicht ausnahmslos in erster Linie und *dauernd*, die Fingergelenke anästhetisch, so daß *selbst grobe* passive Bewegungen nicht wahrgenommen werden. Hieraus ist zu schließen, daß der Pyramidenbahn, in der hinteren Zentralwindung ein Rindenfeld zugeordnet ist, welches (neben den Kontraktionszuständen der Muskeln?) die Gelenkbewegungen registriert, die Drehungen und Verschiebungen der Gelenkflächen mißt, welche eine gewisse Innervationsgröße mit sich bringt. Die hintere Zentralwindung würde sonach in ihren oberen zwei Dritteln in erster Linie als Sphäre der Gelenkempfindung aufzufassen sein.

3) Die innere Kapsel ist nach myelogenetischen Befunden in ihrem unteren Drittel frei von sensiblen Leitungen; in ihrem mittleren Drittel sammeln sich allmählich *hinter* und neben der Pyramidenbahn die Bündel der Taststrahlung i. w. S. — im oberen Drittel ist die ganze hintere Abteilung der inneren Kapsel von sensiblen Leitungen erfüllt. CHARCOTS Lehre gilt also nur für die mittleren Höhen (FLECHSIG).

Digitized by Google

hippokampische Zone in Betracht kommt. Die Stirnwindungen außerhalb der Zentralzone und der Schläfenlappen kommen nach den vorliegenden klinischen Erfahrungen für die allgemeine Sensibilität nicht in Betracht. *Für keines der Felder 16—36 ist sonach, selbst bei doppelseitiger Zerstörung, irgend ein gesetzmäßig wiederkehrendes Symptom sensorischer oder motorischer Art bekannt.* Sollten diese Felder also wirklich, wie von Monakow, Dejerine u. a. behaupten, Stabkranzbündel besitzen, so kann es sich nicht um Sinnesleitungen oder motorische Bahnen handeln, sonach keinesfalls um Projektionssysteme i. e. S., sondern um Leitungen, welche nur intrazerebralen Funktionen dienen.[1]) Die Symptome, welche *gesetzmäßig* bei Verletzungen einzelner der Felder 16—36 hervortreten, gehören (soweit es sich nicht um vorübergehende Hemmungen benachbarter Sinnessphären handelt) *ausschließlich* der *psychischen Sphäre* an. Entsprechend der Tatsache, daß für den menschlichen Intellekt die Vernunftsprache (Logos) das eigentlich Charakteristische ist, nehmen Sprachstörungen (aphasische Zustände im weitesten Sinne) unter den Symptomen umschriebener wie ausgedehnter Rindenerkrankungen einen besonders hervorragenden Platz ein und gehören zu den beststudierten Erscheinungen, freilich auch deshalb, weil sämtliche Sprachfunktionen nur an eine (in der Regel die linke) Hemisphäre geknüpft sind und so schon bei einseitigen Läsionen deutlich hervortreten. Die Aphasie in ihren Beziehungen zur Lokalisationslehre verdient seitens der Hirnforschung eingehendste Berücksichtigung. Bezüglich zweier Rindenbezirke, welche sich allem Anschein nach *mit besonderen myelogenetischen Feldern decken*, ist die Bedeutung für das Sprechen bereits festgestellt, einmal die Brocasche Stelle, welche in naher Beziehung zur motorischen Wortbildung steht, und die Wernickesche, welche das Vernehmen des gesprochenen Wortes beherrscht bezw. vermittelt.[2]) Letztere deckt sich meines Erachtens mit meiner primären Hörsphäre, also

---

1) Welcher Art dieselben sind, läßt sich vorläufig auch nicht vermutungsweise angeben; eventuell könnten dieselben dazu dienen, daß sich die verschiedenen Sinnessphären durch Vermittlung des Thalamus opticus gegenseitig beeinflussen bezw. substituieren.

2) Wernicke, welchem das Verdienst zukommt, auf diese Region zuerst hingewiesen zu haben, hat dieselbe meines Erachtens weder genau lokalisiert, noch in ihrer Bedeutung richtig aufgefaßt.



Digitized by Google

nicht sowohl der ersten Schläfenwindung, als der temporalen Querwindung — was indes noch weiterer Bestätigungen bedarf. Gehörseindrücken wird nach Zerstörung dieser Querwindung der Eintritt in die Rinde der linken Hemisphäre versperrt.[1]) Bezüglich der BROCAschen Stelle bestehen noch Zweifel in bezug auf die Ausdehnung, insofern nach NAUNYNS statistischer Zusammenstellung das obere und mittlere Drittel, nach vielen anderen Autoren *nur* das obere in Betracht kommt. Myelogenetisch erscheinen diese Felder keineswegs gleichwertig; das mittlere Drittel (Feld 27), welches beim Menschen im Verhältnis zu den Anthropoiden überaus stark entwickelt ist, reiht sich den spezifisch menschlichen Bildungen an. Das obere Drittel (Feld $18^b$) bildet die Randzone der Facialis-, Hypoglossus-, Accessorius-Region der vorderen Zentralwindung. Hiernach könnten beide Felder für die Sprache in Betracht kommen.

In den auf die Aphasie gegründeten Schemen des kortikalen Sprachmechanismus stellen die BROCAsche und WERNICKEsche Stelle Punkte dar, welche als feststehend gelten dürfen. Die Zahl der Rindenfelder, welche an der Sprache eng beteiligt sind, ist hiermit aber keineswegs erschöpft. Insbesondere Erfahrungen über Störungen der Schriftsprache, des Leseverständnisses nötigen zur Annahme eines besonderen Rindengebietes, welches der Verknüpfung der Buchstabenbilder mit den Lautvorstellungen[2]) dient, und wenn es auch nicht gelungen, dieselbe scharf zu um-

1) Dies gilt ausschließlich für die reine perzeptive Worttaubheit, wobei das Wortgedächtnis nicht leidet. Assoziative Worttaubheit kann bei völliger Intaktheit der 1. Hörsphäre bestehen; *hier* kommen die Randzonen der Hörsphäre im Insel-, Temporal- und Parietallappen in Betracht, desgleichen die Zentralgebiete dieser Lappen. Was speziell die Inselrinde anlangt, so beschreibt WERNICKE dieselbe als ein Feld, in welchem aus allen an der Wortbildung beteiligten kortikalen Punkten Assoziationsfasern zusammenstrahlen und miteinander in Verbindung gesetzt werden. Auch WERNICKE bezeichnet in diesem Sinne die Insel als „Assoziationszentrum", akzeptiert also *im Prinzip* die Existenz von Rindenfeldern, deren Zellen dazu dienen, eine Mehrzahl anderer Rindenfelder assoziativ zu verknüpfen.

2) Meines Erachtens vermittelt der Angularis auch die Zusammensetzung der Buchstaben zu Worten, vorwiegend eine Gedächtnisleistung (Merkfähigkeit), welche man sich nur an graue Substanz gebunden denken kann. Vermutlich gliedert sich auch das Gedächtnis nach Rindenfeldern.

Digitized by Google

grenzen, so darf es doch mit großer Wahrscheinlichkeit im Gyrus angularis gesucht werden. Wenn man vielfach geneigt ist (Wernicke, von Monakow), diese „Alexie" lediglich durch Zerstörung eines „Assoziationssystems" zu erklären, welches Seh- und Hörsphäre *direkt* verbindet[1]), so liegt hier eine Häufung von Irrtümern vor, welche, so leicht sie an sich zu widerlegen sind, schon allzulange den Fortschritt in der Hirnlehre gehindert haben. Der sog. Fasciculus longitudinalis inferior ist tatsächlich nichts als die basale Abteilung der Sehstrahlung, gehört zum optischen Projektionssystem und ist an der Aphasie gänzlich unbeteiligt.

Eine weitere unhaltbare Annahme ist, daß die Erinnerungsbilder gehörter Worte (akustische Vorstellungen) sämtlich an die „Hörsphäre" gebunden sind, mag man letztere nun wie ich oder wie Wernicke auffassen, welch letzterer (ohne jede Begründung) den gesamten Schläfenlappen ihr zuordnet. Insbesondere die Erfahrungen bei der sogenannten amnestischen Aphasie zeigen, daß die akustische Worterinnerung an eine weit ausgedehntere, sich bis in den Angularis erstreckende Zone geknüpft ist, sodaß auch ein dem Parietalhirn zugehöriger Rindenkomplex an der Reproduktion akustischer Wortvorstellungen beteiligt erscheint. Es wird die Aufgabe weiterer umfassender pathologisch-anatomischer und klinischer Forschungen sein, zunächst möglichst erschöpfend all die Windungsbezirke festzustellen, durch deren Verletzung die Erinnerung an die Klänge der Worte vollständig ausgelöscht wird; ich zweifle (nach dem bisher Vorliegenden) nicht, daß man auf eine *multiple* Lokalisation jeder Vorstellung und so auch der Wortvorstellungen wird zurückkommen müssen, daß schon die Gedächtnissphären jedes einzelnen Wortklanges sich auf *eine große Anzahl* von *Rindenfeldern* erstrecken, vermutlich auf soviel als an den Assoziationen des Wortklanges beteiligt sind. Die bisher schon in großer Zahl aufgestellten Schemata für den Mechanismus der Sprache, soweit sie zur Erklärung der klinischen Variationen der Aphasie dienen, tragen den wirklichen anatomischen Tatsachen nur höchst unvollkommen Rechnung. Nur die Darstellung bei Dejerine macht hiervon eine Ausnahme, indem derselbe der

1) Die Angabe von Monakows, daß Alexie immer nur bei tiefen Zerstörungen im Angularisgebiet auftrete, entbehrt der exakten Begründung. Auch bei oberflächlichen Herden ist Alexie beschrieben worden.

Digitized by Google

WERNICKEschen und BROCAschen Region noch den Gyrus angularis und supramarginalis hinzufügt, wobei freilich die Ansicht, daß in letzteren die „Schriftbilder" der Worte lokalisiert sind, in dieser Form ernstlichen Bedenken begegnen muß. In der schematischen Darstellung der Einschaltungsweise des Gyrus angularis in den zentralen Mechanismus nähert sich DEJERINE übrigens soweit meiner Darstellung in „Gehirn und Seele", daß ich einen erheblichen Unterschied gegenüber meiner Theorie der Assoziationszentren nicht zu finden vermag.

Die Darstellung, welche VON MONAKOW in seiner Hirnpathologie gibt, läßt die Sprachfelder der Rinde kleiner erscheinen, da der Gyrus angularis außer Acht bleibt. Aber auch insofern befriedigt seine Darstellung wenig, als er die WERNICKEsche Stelle vornehmlich an das *hintere* Ende der 1. Temporalwindung verlegt, wodurch dieselbe ihrer gesetzmäßigen Beziehungen zur primären Hörsphäre verlustig geht und hierdurch überhaupt unverständlich wird.

Überblickt man die mitgeteilten Ergebnisse der klinischen Forschung, so kann man kaum zu einem anderen Resultate kommen, als daß diese Erscheinungen auf die nämliche Gliederung der Großhirnrinde in funktioneller Hinsicht hinweisen wie die myelogenetische Differenzierung in anatomischer Hinsicht. *Beide pathologische Methoden* stimmen darin überein, daß beim Menschen die Rindenfelder, deren Zerstörung Sensibilitätsstörungen oder Lähmungen verursacht, nur einen kleinen Teil der Hirnoberfläche ausmachen[1]), und daß diese Felder sich in befriedigender Weise decken mit den primären Sinnessphären, wie ich sie myelogenetisch abgegrenzt habe — während der verbleibende Rest der Hirnoberfläche wesentlich anderer Natur ist. Was angeblich von pathologischer Seite gegen diese Anschauung spricht, ja wie die Legende lautet, sie „endgültig widerlegt", erweist sich bei näherer Untersuchung als ein Konvolut subjektiver Interpretationen spärlicher,

1) DEJERINE weicht in seiner Darstellung der sensumotorischen Zone, der Hör-, Seh- (a. a. O. Figg. 247. 248) und Riechsphäre stellenweise nur in wenigen Einzelheiten von meinem Schema in „Hirn und Seele" 1896 ab — und trotz der übergroßen Ausdehnung, welche er der Sehsphäre gibt, ist der Gesamtumfang der Sinnessphären in der Rinde eher *kleiner,* als ich ihn dargestellt habe. Prinzipiell besteht sonach eine Divergenz der Anschauungen nicht; nur bleibt DEJERINE jede Deutung der übrigen Rindengebiete schuldig.

Digitized by Google

ihrer ganzen Natur nach beweisunkräftiger, mangelhaft untersuchter und noch mangelhafter dargestellter Fälle; pathologische *Tatsachen*, welche mit meiner Auffassung der myelogenetischen Felder in Widerspruch stünden, *existieren nicht*. Es ist demnach gerechtfertigt, die myelogenetische Gliederung als einen zuverlässigen Führer in der Erforschung des Gehirns, speziell der Rinde und ihrer Verbindungen, zu erblicken, welcher nicht nur weit ins einzelne gehende Aufschlüsse, sondern auch große leitende Gesichtspunkte vermittelt. Die Großhirnrinde des Menschen besteht hiernach aus einer Reihe von Feldern, welche nicht nur einen selbständigen Entwicklungsgang erkennen lassen, sondern auch Besonderheiten der Struktur zeigen und durch ihre Verbindungen je eine besondere Stellung im Gesamtmechanismus einnehmen. Einem Teil derselben ist mit Rücksicht hierauf, sowie besonders auch auf klinische Beobachtungen die Bedeutung *autonomer Organe* beizulegen, welche mit allen zur Ausübung einer selbständigen Funktion notwendigen Leitungsbahnen ausgestattet und im allgemeinen nach dem Schema von Reflexzentren gebaut sind. Hierzu gehören in erster Linie die primären Sinneszentren. Bezüglich der zweiten Gruppe der Primordialgebiete ist eine klare Vorstellung noch nicht möglich.[1]) Alle übrigen Felder sind anscheinend in ihrer Funktion von den primären Sinnessphären mehr oder weniger abhängig. Die Stellung der Terminalgebiete in bezug auf autonome Betätigung ist vorläufig nicht zu ermessen. Jedenfalls erscheint die Großhirnrinde nicht als ein einheitliches, in allen Regionen gleichwertiges Organ[2]), sondern als ein Komplex verschiedenwertiger Arbeitsstätten, die wenigstens in den ersten Zeiten des extrauterinen Lebens einen hohen Grad von Selbständigkeit besitzen. Wie viele zu unterscheiden sind, kann erst die Zukunft lehren. Ihre Sonderexistenz spiegelt sich auch darin wieder, daß *die gesamten Leitungsbahnen* des Pallium sich bei ihrer Anlage nach myelogenetischen Feldern gliedern. Ganz besonders zeigt dies die Entwicklung des *Balkens, welcher myelogenetisch sich in*

1) Bei einzelnen könnte man an automatische Zentren denken.

2) Die Ansicht von Flourens stellt, vom anatomischen Standpunkt aus betrachtet, für die neuere Zeit den Tiefstand der Lehre von der Funktionsverteilung in der Großhirnrinde dar. Der phantasiereiche Morphologe Gall ist dem nüchtern wägenden Physiologen in bezug auf die allgemeinen Grundanschauungen unendlich weit überlegen — zweifellos eine für die Bewertung der Morphologie nicht unerhebliche Tatsache.

Digitized by Google

*ebenso viele Abteilungen gliedert, als sich Rindenfelder unterscheiden lassen.* Die Balkenbündel der primären Sinnessphären ummarken sich erheblich früher als die der späteren Gebiete, zuletzt die der Terminalgebiete (myelogenetische Felder des Balkenkörpers). Da die Markbildung im wesentlichen nur die Anlage der Nervenfasern durch die Neuroblasten repetiert, erscheint hier die Entwicklung des Balkens in einem wesentlich neuen Lichte. Aber auch das gesamte unilaterale Assoziationssystem der Großhirnrinde gliedert sich nach myelogenetischen Feldern, indem die zu den frühen Feldern in Beziehung stehenden Fibrae arcuatae zuerst, die zu den Terminalgebieten gehörigen zuletzt reifen, ja innerhalb der letzteren die im Zentrum gelegenen später als die an die Randzonen angrenzenden. Und dasselbe gilt auch für die langen Assoziationssysteme, unter welchen z. B. das die Felder $2^c$ und 11 verbindende beginnt, während der zu Feld 36 in Beziehung stehende Fasciculus uncinatus schließt. Nicht nur für die Projektionssysteme also, sondern für *sämtliche kortikale Leitungsbahnen gilt als Fundamentalprinzip die felderweise Entwicklung,* sodaß man *rein entwicklungsgeschichtlich* sämtlichen *myelogenetischen* Rindenfeldern die Bedeutung besonderer Bildungen[1]) beizumessen hat.

Werfe ich hiernach noch einen kurzen Blick auf die *Verbindungsweise* der einzelnen Rindenfelder untereinander, so führt auch hier die Myelogenese weit über alle anderen Methoden hinaus. Wenn VON MONAKOW den sekundären Degenerationen nachrühmt, daß sie auf die Anordnung der Assoziationssysteme ein helles Licht geworfen haben, so ist das Sichere, was erzielt worden ist, äußerst spärlich; dagegen sind auf diesem Wege speziell in die menschliche Gehirnanatomie zahlreiche Irrtümer einschneidendster Art hereingelangt.

Bezüglich der Assoziationssysteme der primären Sinnessphären erhebt sich besonders eine Frage von größter Tragweite, nämlich die, ob jede *einzelne* Sinnessphäre mit allen Rindenfeldern oder der Mehrzahl derselben durch Fibrae arcuatae und lange Assoziationssysteme direkt verbunden ist, und wenn dies nicht anzunehmen, ob jede einzelne Sinnessphäre mit mehreren oder allen anderen primären Sinnessphären direkt kommuniziert.

---

1) Die Myelogenese gewährt hier Einblicke in den Entwicklungsmechanismus wie in die innere systematische Gliederung, welche alle sonstigen Methoden weit hinter sich lassen.

Digitized by Google

Beides ist mit größter Wahrscheinlichkeit zu verneinen. Es fehlt tatsächlich der Nachweis, daß z. B. die hintere Zentralwindung bez. Feld 2 mit auch nur einer anderen primären Sinnessphäre direkt verbunden ist; während sich zwischen 2 und dem größten Teil der Felder 16—36, desgleichen 2 und den meisten Feldern der zweiten Gruppe der Primordialgebiete Faserzüge nachweisen lassen, welche mit größter Wahrscheinlichkeit alle diese Felder mit 2 (willkürlich motorische Zentren) verbinden, versagt jeder Versuch zwischen 2 einerseits, $4^a$, $4^b$, 5, 6 und 7 andererseits Assoziationssysteme nachzuweisen; dasselbe gilt für alle anderen primären Sinnessphären untereinander. Es erledigt sich schon hiermit die Frage, ob Erregungen von einer Sinnessphäre direkt nach einer anderen geleitet werden können, oder ob stets andere Rindenbezirke in die verknüpfenden Bahnen eingeschaltet sind. In der großen prinzipiellen Bedeutung dieses Gesichtspunktes ist es vornehmlich begründet, daß die Anhänger der Theorie der direkten Verbindungen so großes Gewicht darauf legen, den Fasciculus longitudinalis inferior der Wahrheit zuwider als direktes Assoziationssystem der Seh- und Hörsphäre anerkannt zu sehen. Erst bei dem Versuch, die unterscheidbaren langen Assoziationssysteme auf die einzelnen myelogenetischen Felder zurückzuführen, zeigt sich die gänzlich unzulängliche Darstellung derselben in den gebräuchlichen Lehrbüchern, welche trotz Verwertung der sekundären Degenerationen über summarische Hypothesen nicht hinausgehen. Lediglich zwischen 1 und 3, 3 und $4^b$, $4^a$ und $4^b$ lassen sich Faserzüge nachweisen, welche, wie bereits oben erwähnt, vielleicht die Bedeutung von Assoziationssystemen der Riech- und Schmecksphäre haben (d. h. zweier Sinne, welche unmittelbar aufeinander angewiesen sind), desgleichen zwischen den verschiedenen Segmenten der Zentralzone. Für Tast- und Sehspäre, Seh- und Hörsphäre, Riech- und Hörsphäre etc. sind direkte Verbindungen *nicht* nachgewiesen. Die Leitungen, welche zwischen diesen Sinnessphären eine Verbindung herstellen könnten, hängen sämtlich mit zwischengeschalteten Rindenfeldern zusammen, sodaß diese unmittelbar als Schaltstücke erscheinen, welche Erregungen von zwei und mehr Sinnessphären her aufzunehmen geeignet sind. Indem ich diese Anschauung akzeptiert habe, bin ich unmittelbar auf die Theorie der Assoziationszentren gelangt, und diese Theorie muß solange als unwiderlegt gelten, als es nicht gelingt, direkte Verbindungen der primären Sinnessphären *einwandfrei nachzuweisen*,

Digitized by Google

Dieser Nachweis muß speziell am Menschen geführt werden, da die unmittelbare Übertragung von Tierbefunden auf den Menschen speziell auf diesem Gebiete unzulässig ist und zwar in dem Maße mehr, als man sich den niederen Säugetierklassen nähert (vgl. unten). Denn bei diesen existieren direkte Verbindungen der Sinneszentren, weil letztere vielfach direkt aneinanderstoßen. Vorläufig muß ich nach meinen Untersuchungen annehmen, daß die primären Sinnessphären teils mit Randzonen, teils mit den Zentralgebieten assoziativ verbunden sind, und daß zwischen zwei primäre Sinnessphären bald nur zwei untereinander verbundene Randzonen, bald mehrere Gruppen von Randzonen und außerdem ein Zentralgebiet eingeschaltet sind (z. B. zwischen primärer Seh- und Tastsphäre 24, 34 und 26 etc.).

Die Frage, ob die Erregung der Sinnessphären sich auf die Zwischengebiete 16—36 fortpflanzt, kann beim Menschen vorläufig nur auf *einem* Wege[1]) gelöst werden, durch Prüfung darauf, ob sich an diesen Zwischengebieten Residuen von Sinneseindrücken[2]) nachweisen lassen, d. h. Gedächtnisspuren in der Weise, daß die Erinnerungsbilder gewisser Sinneseindrücke vernichtet werden, wenn die betreffenden Zentren bez. Rindenfelder (16—36) zerstört werden. So ungenügend die klinischen Beobachtungen in dieser Hinsicht auch sind, so weisen sie doch mit großer Wahrscheinlichkeit auf die Beziehungen der Assoziationszentren zum

1) Die Untersuchungen von FLEISCHL, BECK u. a. an der Großhirnrinde mittels der negativen Stromesschwankung haben gleichfalls keinen Beleg dafür erbracht, daß adäquate Erregungen z. B. der Sehsphäre von da zur motorischen Zone oder irgend einer weiteren Sinnessphäre sich fortpflanzen. Der Bezirk, über welchen die negative Stromesschwankung nachweisbar ist, überschreitet zwar angeblich gelegentlich die unmittelbar gereizte Sinnessphäre etwas (was aber als unzuverlässig gelten muß, solange bei den Versuchstieren der Umfang keiner kortikalen Sinnessphäre wirklich festgestellt ist), aber niemals gelang der Nachweis der negativen Schwankung in einer anderen als der von der Peripherie her unmittelbar gereizten Sphäre. Die fraglichen Versuche widersprechen übrigens auch den Vorstellungen derjenigen Forscher, welche mit APATHY-BETHE annehmen, daß sich ein in die Rinde eingetretener Reiz mittels der Fibrillen nach allen Richtungen hin ausbreitet.

2) Da es sich hier um ein in den ersten Anfängen befindliches Forschungsgebiet handelt, ist von vornherein eine besonders kritische Beurteilung der angeblichen Resultate dringend geboten.

Digitized by Google

*Gedächtnis*[1]) für äußere Sinneseindrücke, Innervationsimpulse etc. hin, ganz speziell aber darauf, daß hier assoziierte Gedächtnisspuren zu suchen sind, und in dieser Hinsicht ist besonders auf die Erfahrungen bei aphasischen Zuständen zu verweisen, an welchen offenbar ein beträchtlicher Teil der Felder 16—36 gesetzmäßigen Anteil hat. Es muß zukünftigen exakteren Untersuchungen auch über die Beziehungen der Sinnessphären zu den Erinnerungsbildern überlassen bleiben, inwiefern man die Assoziationszentren teilweise oder in ihrer ganzen Ausdehnung schlechthin als Organe der assoziierten Gedächtnisspuren bezeichnen darf. Jedenfalls kann es nach den vorliegenden klinischen Erfahrungen kaum einem Zweifel unterliegen, daß von den primären Sinnessphären her die durch adäquate Reize bedingten Erregungen auf die Assoziationszentren *bis in die Zentralgebiete* sich fortpflanzen; doch würde es zu weit abführen, hier alle Gründe für und wider zu erörtern.[2])

W. Wundt hat meine Theorie der Assoziationszentren hinsichtlich ihrer Bedeutung für die Psychologie einer eingehenden Kritik unterworfen (Grundzüge der physiol. Psychologie 1902, Bd. I, S. 296) und zeigt sich hier zwar geneigt, im allgemeinen der Assoziationszentrentheorie vor der Sinneszentrentheorie d. h. der Zusammensetzung der Rinde lediglich aus Sinneszentren im Sinne Munks den Vorzug zu

---

1) In der Mehrzahl der Fälle ist schwer zu entscheiden, ob der Ausfall von Assoziationen von einer Erkrankung der Rinde selbst oder von anliegenden Assoziationssystemen (extrakortikalen Faserzügen) abhängt. In dieser Beziehung ist besonders wichtig, daß im Bereich einzelner Rindenfelder zahlreiche lange Assoziationssysteme unweit der Rinde vorbeiziehen, sodaß selbst *kleine* Herde daselbst die eventuell weit entlegenen Verbindungen zahlreicher Felder zerstören. Dies gilt ganz besonders für den hintersten Abschnitt der zweiten Temporalwindung (Feld 31 oberhalb + Fig. 3), unter welchem sich die großen Assoziationssysteme zwischen 2 und 36, 34 und 36, 12 und 2 durchkreuzen. Auf der linken Seite bedingen hier Zerstörungen Dissoziationen der Begriffe und zugehörigen Worte, auch eine Art „Apraxie". Die komplexen psychischen Funktionen, deren Zersetzung hierbei hervortritt, sind natürlich nicht an die zerstörten Faserbündel, sondern an die Rindenfelder geknüpft, deren leitende Verbindungen zerstört sind.

2) Es würde eventuell zu erwägen sein, ob in der Rinde Einrichtungen getroffen sind, um die Ausbreitung auf größere Strecken zu verhindern, d. h. ob Widerstände besonderer Art eingeschaltet sind (in Form besonderer Neurone?).

Digitized by Google

geben, trägt aber Bedenken sich in bezug auf die psychologische Auffassung mir anzuschließen aus Gründen, welche wie mir scheint meist auf Mißverständnissen beruhen. WUNDT wendet sich zunächst gegen die Anschauung, daß die kortikalen Sinnessphären zentrale Wiederholungen der peripheren Sinnesflächen darstellen. Er polemisiert speziell gegen die Anschauung, daß die peripheren Sinnesflächen nur „deshalb auf die Hirnrinde projiziert werden müßten, um dem in dieser residierenden Bewußtsein zugänglich zu werden". Diese Idee ist wohl schwerlich auf einen Biologen zurückzuführen; denn soweit ich sehe nähern sich die meisten Physiologen und Ärzte vielmehr der Ansicht, daß die Sinnessphären in Verbindung mit bezw. *aus* Sinneseindrücken Bewußtsein erzeugen. Ich selbst habe die Vermutung ausgesprochen, daß sie vor allem die durch die gesonderten Elemente der peripheren Nerven zugeleiteten Erregungen zu Einheiten verknüpfen, d. h. aus denselben einheitliche Vorstellungen bilden (etwa im Sinne der assoziativen Verschmelzung WUNDTS) unter Wahrung der in erster Linie von den peripheren Endapparaten abhängigen spezifischen Energie. Der Schwerpunkt meiner Anschauungen über die Rindenorganisation liegt indes nicht hier sondern in der Auffassung des Zusammenwirkens der verschiedenen Sinnessphären. Dasselbe läßt sich nur unter der Voraussetzung erklären, daß in den Assoziationsfasern im anatomischen Sinn wichtige Mittelglieder für die Assoziationen auch im psychologischen Sinn gegeben sind. Wenn WUNDT hierin lediglich die Ansicht „schwärmender Hirnanatomen" erblickt, so ist darauf hinzuweisen, daß auch die große Mehrzahl der Kliniker (ich nenne nur KUSSMAUL) und Physiologen dieselbe *als selbstverständlich* akzeptieren.

Lehrt doch die klinische Beobachtung tagtäglich, daß die Unterbrechung dieser oder jener Assoziationssysteme bezw. der zugehörigen Ganglienzellengruppen streng gesetzmäßig zum Ausfall gewisser psychologischer Assoziationen führt. Die Verknüpfung von Gesichts- und Gehörseindrücken ist ohne Intaktheit der zwischen Seh- und Hörsphäre eingeschalteten Neurone bezw. „Assoziationssysteme" absolut unmöglich; diese letzteren haben einen streng gesetzmäßigen Anteil an ersteren. WUNDT steht auch im Grunde genommen der Ansicht der Pathologen gar nicht so feindlich gegenüber und akzeptiert sogar die Deutung, welche ich von Anfang an meinen Assoziationszentren gegeben habe, ohne freilich zu bemerken, daß ich selbst schon längst der gleichen Ansicht bin. Meine Theorie setzt nicht nur voraus, daß die Nervenfasern des Gehirns wichtige Mittelglieder der psychischen Assoziationen sind und daß ein großer, ja weitaus der größte Teil der zugehörigen, wie es scheint, meist in der zweiten, dritten und fünften Schicht (nach MEYNERT) gelegenen Ganglienzellen der Rinde diesen Assoziationen dient, sondern daß es auch ganze Rindenfelder gibt, deren Hauptaufgabe das Assoziieren darstellt — lediglich dieser Gesichtspunkt ist es, welcher von

Digitized by Google

den verschiedensten Seiten her bekämpft wird. Tatsächlich stellt sich Wundt auf meinen Standpunkt, wenn er a. a. O. sagt: „Soll man annehmen, daß zum Zustandekommen von Komplikationen (d. h. Assoziationen von Eindrücken verschiedener Sinne) nicht schon die Assoziationsfasern zwischen den verschiedenen Sinneszentren genügen, sondern daß dazu die *selbständige* Funktion eines *bloß Assoziationsfasern empfangenden* Organs erforderlich sei? Schwerlich ist diese nächstliegende Bedeutung, die dem Wort gegeben werden könnte, diejenige, die man wirklich den Assoziationszentren beilegt." In Wirklichkeit ist diese Deutung ja gerade diejenige, welche *ich* von vornherein angewandt habe, da ich z. B. den Parietalzentren die Assoziationen von Gesichts-, Tast- und Gehörseindrücken zugeschrieben habe. In der Tat sind nach meiner Anschauung die Assoziationszentren in erster Linie die Zentren für die Komplikationen im Sinne Wundts, wenigstens in dem Sinne, daß psychische Gebilde, an welchen eine größere Anzahl disparater Sinneseindrücke bezw. Erinnerungsbilder beteiligt sind, nur durch deren Vermittlung keinesfalls *ohne diese Zentren* zustande kommen können. Aber ich bin tatsächlich noch weiter gegangen, insofern als ich in den Assoziationszentren die materielle Grundlage für *alle* komplizierten Assoziationen (Gesamtvorstellungen etc.) erblicke und insofern als es sich auch bei der Sprache *zunächst* um Assoziationen von Anschauungen etc. mit Worten handelt, für *alle* höheren psychischen Gebilde bezw. Funktionen speziell diejenigen, welche dem Menschen eigentümlich [1]) sind.

Wenn Wundt hierin bedenkliche Anklänge einerseits an die Assoziationspsychologie erblickt, andererseits an die Gallsche Phrenologie, so liegt nur nach ersterer Richtung eine gewisse Berechtigung zu Einwänden vor. Ich habe mit der Zusammenfassung aller neben den Sinnessphären vorhandenen Zentren als Assoziationszentren keineswegs andeuten wollen, daß die Hirnanatomie die Berechtigung der Assoziations-Psychologie etwa gegenüber der Apperzeptions-Psychologie stütze. Die Bezeichnung speziell des präfrontalen Gebietes als Assoziationszentrum gründet sich ja wie bei allen anderen in erster Linie auf das Vorwiegen von Assoziationssystemen, also auf *anatomische* Gesichtspunkte. Daß auch *alle Funktionen* dieses Gebietes sich unter den Begriff der Assoziation bringen lassen, ist damit nicht gesagt — und insofern könnte psychologisch die Bezeichnung als frontales Assoziationszentrum nicht alles Wesentliche treffen, ja eventuell zu falschen Deutungen Anlaß geben, sodaß der von Wundt vorgeschlagene all-

1) Ich habe aus diesem Gesichtspunkte auch den Namen „Denk*organe*" gewählt, lediglich in dem Sinne, daß Denken im engeren Wortsinne nur an mit hochentwickelten Assoziationszentren ausgestattete Gehirne wie das menschliche geknüpft, *ohne letztere ganz unmöglich* ist.

Digitized by Google

gemeinere Ausdruck psychische Zentren gewisse Vorteile bieten würde. Andrerseits ist aber die letztere Bezeichnung so vager Natur, daß hiermit alles Charakteristische verloren geht. Ja in Anbetracht, daß auch die Sinnessphären sich an den psychischen Funktionen beteiligen, könnte nur der Ausdruck „höhere psychische Zentren" für die Assoziationszentren im anatomischen Sinne in Betracht kommen. Es wird die Aufgabe der Zukunft sein, den besonderen Anteil jedes einzelnen Assoziationszentrums im anatomischen Sinne an den höheren psychischen Tätigkeiten zu präzisieren.

Wenn WUNDT demgegenüber das Bedenken äußert, daß man auf diesem Wege Gefahr laufe, zu einer Berührung mit den „inneren Sinnen" der älteren Phrenologie [1]) zu kommen, und dies um so mehr, je größer die Zahl der unterschiedenen Zentren werde, so entbehrt dieser Einwand der objektiven Begründung. Speziell meinen diesbezüglichen Ausführungen gegenüber würde er nur berechtigt sein, falls ich jedem meiner 36 Rindenfelder eine besondere *selbständige* psychische Funktion zugewiesen hätte. Dies ist nie geschehen; ich habe nur die wohlbegründete Vermutung ausgesprochen, daß jedem derselben irgend ein besonderer *Anteil* an dem psychischen *Gesamtgeschehen* zukomme. In Gehirn und Seele habe ich in der Hauptsache (d. h. nach Abzug der eine mehr lokale Bedeutung beanspruchenden Insel) eine *Zweiteilung* der Hirnoberfläche vorgenommen, indem ich die hinter der Zentralzone gelegenen Randzonen und Zentralgebiete als großes hinteres Assoziationszentrum zusammengefaßt und demselben das vordere frontale gegenüber gestellt habe. Daß dieser Zweiteilung auch funktionelle Unterschiede entsprechen, ist nach den klinischen Erfahrungen als sichergestellt zu betrachten. Eine andere Frage aber ist es, ob die von mir gewählte Formulierung, d. h. die Gegenüberstellung der an der Erfassung der *Außenwelt* beteiligten und der die Elemente des Ich zusammenfassenden, die *körperliche Person* repräsentierenden Rindenfelder, wirklich haltbar ist, da speziell die letztgenannten Begriffe noch offensichtlich wissenschaftlicher Schärfe entbehren. Das frontale Assoziationszentrum trotzt tatsächlich bislang allen Versuchen einer klaren Formulierung seiner funktionellen Stellung, so daß nur Umschreibungen bezw. allegorische Andeutungen möglich erscheinen. Wenn WUNDT speziell hier ein wichtiges Zentrum für *Apperzeptions-Vorgänge* annimmt, so widerspricht dies ja keineswegs den von mir ausgesprochenen Vermutungen; gerade das Gegenteil ist der

1) Es ist ja ein seltsames Spiel des Zufalls, daß ich myelogenetisch 36 (später vielleicht nur 35) Rindenfelder unterschieden habe, während SPURZHEIM phrenologisch 35 Seelenorgane aufzählt. Es bedarf kaum eines besonderen Hinweises darauf, daß irgend ein innerer Zusammenhang zwischen diesen Zahlenreihen nicht besteht.

Digitized by Google

Fall. Doch würde es hier zu weit führen, näher auf diesen Gesichtspunkt einzugehen (vgl. u.). Was das hintere große Assoziationszentrum anlangt, so weisen die myelogenetische Differenzierung wie die Pathologie mit Entschiedenheit darauf hin, daß in diesen großen Gebieten eine Anzahl psychologisch verschiedenwertiger Unterabteilungen enthalten sind. Wenn sich die Psychologie auf Grund mehr oder weniger unvollkommener Vorstellungen über das psychische Leben prinzipiell gegen die Füglichkeit erklärt, diesen Unterabteilungen je gewisse Spezialfunktionen zuzuschreiben, so übersieht sie ganz, daß der Hirnforscher den überaus klaren myelogenetischen Bildern gegenüber gar nicht die freie Wahl hat, wie viel Zentren er unterscheiden will, sondern daß er sich streng dem Naturbild anzuschließen hat. Hier tritt auf das schärfste der Gegensatz zwischen einer ohne große *natürliche* Leitpunkte arbeitenden Disziplin wie die Psychologie und der auf einem großen klaren Prinzip fußenden myelogenetischen Hirnlehre hervor. Gegenüber den überaus klaren anatomischen Bildern möchte ich es geradezu für eine Pflicht der Forschung erklären, auch psychologisch dem Sinn jener Gliederung bis ins Einzelne nachzugehen. Denn daß man es hier, wie von Monakow gelegentlich andeutet, mehr mit einem Blendwerk der Natur zu tun habe, wird man ernstlich wohl nicht behaupten wollen. Das Suchen nach der physiologischen Bedeutung liegt aber um so näher, als ja ohne weiteres im zeitlichen Ablauf der Entwicklung ein psychologisches Prinzip hell zu Tage tritt, welches schon jetzt seiner Bedeutung nach gewürdigt werden kann; die (schon bei den niedersten Säugern hervortretende!) vorauseilende und frühzeitige Entwicklung der Sinnesleitungen und Sinnessphären und die nachschleppende der Assoziationszentren. Wenn die Psychologie vorläufig an solchen auf die Psychogenese ein helles Licht werfenden fundamentalen Tatsachen völlig achtlos vorübergehen zu können glaubt, so wird dies vom wissenschaftlichen Standpunkt aus kaum gerechtfertigt erscheinen. — Ein Bedenken mehr formaler Natur ist es, wenn Wundt gegen meine Theorie der Assoziationszentren noch einwendet, daß man mit demselbem Recht auch jede Sinnessphäre als Assoziationszentrum bezeichnen könne; es liegt hier zweifellos insofern etwas Richtiges zugrunde, als ich ja selbst sie als Organe der Verschmelzung elementarer Eindrücke zu betrachten geneigt bin; daß sie disparate Sinneseindrücke verknüpfen, ist nur innerhalb enger Grenzen wahrscheinlich, z. B. die Zentralzone vielleicht Gelenkempfindungen und Berührungsgefühle, der Gyrus hippocampi vielleicht Geruchs- und Geschmackseindrücke, doch ist hier nichts sicher entschieden. Wenn ich selbst früher der Zentralzone auch die Eigentümlichkeit zuschrieb, daß sie mit allen großen Assoziationszentren verbunden ist und somit vielleicht zwischen denselben irgendwie ein einheitliches Zusammenwirken vermittelt, so möchte ich diese Deutung nicht aufrecht erhalten;

Digitized by Google

die zahlreichen langen Assoziationssysteme, welche zwischen den 3 großen Terminal-(Zentral-)Gebieten und der ROLANDOschen Abteilung der Zentralzone verlaufen, leiten zum Teil (wie sekundäre Degenerationen zeigen), gegen die Zentralwindungen hin und sind insoweit wahrscheinlich als die Bahnen willkürlicher bez. durch Vorstellungen ausgelöster Erregungen der motorischen Zentren der Zentralzone zu betrachten; zum Teil leiten sie in umgekehrter Richtung.

Sofern man die Existenz besonderer Assoziationszentren negiert, ist man zu der Ansicht gezwungen, daß die gesamte Rinde auch beim Menschen ausschließlich aus Sinnessphären sich zusammensetzt. Der Mensch würde darnach dem Tier gegenüber durch enorm große Sinnessphären ausgezeichnet sein. Dies würde voraussetzen, daß sich bei ihm die Sinnessphären ganz außer allem Verhältnis zur Größe der Sinnesnerven, der Sinnesorgane etc. weiter entwickelt haben. Die Ungereimtheit dieser Vorstellung einsehend, haben einige Autoren einen Ausweg dahin gesucht, daß sie zwar den sensiblen Leitungen nur einen Teil der Hirnoberfläche zuteilen, die dazwischen verbleibenden großen Bezirke aber der Motilität reservieren. In der Tat führt die Nichtanerkennung der Assoziationszentren auf *die Notwendigkeit*, den einfachsten und sichersten Tatsachen der Anatomie, Physiologie und Klinik Gewalt anzutun, die Lehre von der Anordnung der Projektions- und Assoziationssysteme des Stabkranzes von Grund auf umzustürzen, kurz die wissenschaftliche Hirnanatomie in ihr Gegenteil zu verkehren. Es sei in dieser Hinsicht noch einmal darauf hingewiesen, daß die Projektionssysteme der primären Sinnessphären von der Anatomie zum großen Teil seit langem beschrieben und mit besonderen Namen belegt worden, Projektionssysteme der Assoziationszentren nicht einmal dem Namen nach bekannt sind. Daß man es hier nicht mit unerheblichen quantitativen Verschiedenheiten zu tun hat, sondern daß essentielle Differenzen bestehen, kann nur Voreingenommenheit negieren.

Daß jede einzelne Sinnessphäre die zu ihr in Beziehung stehenden Randzonen einheitlich zusammenfaßt, ist an sich nicht ohne weiteres abzuweisen; ja man könnte geneigt sein, zur Deutung gewisser besonders dem Gedächtnis angehöriger psychischer Phänomene, die Notwendigkeit einer derartigen Einrichtung zu behaupten.

Diese Erwägung legt von neuem die Frage nahe, ob die primären Sinnessphären, d. h. die Projektionsfelder der einzelnen Sinnesleitungen nicht zweckmäßiger als Mittelpunkte größerer Rindenzonen anzusehen sind, welche zwar nicht anatomisch, wohl aber *funktionell* als Einheiten zu betrachten sein würden, insofern sie in ihrer ganzen Ausdehnung an den Empfindungen bez. Wahr-

Digitized by Google

nehmungen *einer* bestimmten Sinnesqualität Anteil haben, mit anderen Worten, ob es sich nicht empfiehlt auch beim Menschen (nach dem Vorgehen Munks beim Tier) die Großhirnoberfläche *funktionell* in soviel Territorien („sekundäre Sinnessphären") einzuteilen, als es primäre Sinnessphären gibt. Bei näherem Zusehen muß jede Hoffnung, auf diesem Wege zu einer exakten Einteilung der menschlichen Großhirnrinde zu gelangen, schwinden. Abgesehen davon, daß es ganz unmöglich ist, beim Menschen die Ausdehnung der kortikalen Erregung auf Sinnesreize irgendwie genau zu umgrenzen, so würde wohl, falls dies möglich wäre, die Ausdehnung bei starken und übermaximalen Reizen eine andere sein, als bei mittelstarken und schwachen.

Die klinischen Erfahrungen, besonders wiederum die aphasischen Zustände der verschiedensten Art, lehren aber noch — und dies ist wohl das Entscheidende —, daß höchst wahrscheinlich Felder existieren, zu welchen von einer ganzen Anzahl primärer Sinnessphären her Erregungen gelangen. Ich greife hier des aktuellen Interesses halber die 2. Parietalwindung (Gyrus supramarginalis und angularis) heraus. Nach Zerstörung derselben beobachtet man Erscheinungen, welche sowohl auf mangelhaftes Verständnis von Gesichts-, als Gehörs- und Tasteindrücken hinweisen bezw. Erscheinungen, welche sich kaum anders deuten lassen, als daß Gedächtnisspuren sowohl von Gesichts- als Tast- und Gehörseindrücken vernichtet sind. Hiernach ist mit der Möglichkeit zu rechnen, daß im Angularis [1]) eine Superposition von Gesichts-, Tast- und Gehörseindrücken stattfindet. Wo soll man hier auf funktionelle Erscheinungen hin eine Grenze zwischen Tast-, Seh- und Hörsphäre ziehen? Man würde den tatsächlichen Verhältnissen Gewalt antun müssen, wollte man hierauf bestehen. Und dasselbe gilt auch für das temporale Terminalgebiet, welches nicht nur zur Hörsphäre, sondern auch zur Seh- und Tastsphäre (ja vermutlich auch zur Riech- und Schmecksphäre) in ausgiebigen Beziehungen steht.

Sind diese auf die *Pathologie* gegründeten Anschauungen gerechtfertigt, so ist es unmöglich, die Großhirnoberfläche des

1) Ferrier und Turner haben schon bei niederen Affen gefunden, daß bei Zerstörung des „Angularis" Assoziationsfasern degenerieren, welche denselben sowohl mit der Temporalwindung I, als der Parietalis superior und dem Okzipitallappen verbinden.



Digitized by Google

Menschen so auf die einzelnen Sinnessphären zu verteilen, daß die Summe dieser „sekundären Sinnessphären" die gesamte Oberfläche umfaßt. Weit mehr entspricht es den tatsächlichen Befunden anzunehmen, daß eine Anzahl Felder ausschließlich *je einem* peripheren Sinnesorgan zugeordnet sind, daß die übrigen Felder aber von verschiedenen Sinnen, ja zum Teil eventuell von allen Sinnesorganen her erregt werden können, so daß man ein- und mehrsinnige Gebiete unterscheiden könnte. Zu ersteren würden die primären Sinnessphären gehören, zu letzteren speziell das parietale und temporale Terminalgebiet rechnen. Die Bezeichnung „Assoziationszentren" für Gebiete letzterer Art dürfte kaum zu irgend welchem Bedenken Anlaß geben. Im *frontalen* Terminalgebiet walten insofern besondere Verhältnisse ob, als daselbst in erster Linie von *allen Segmenten* der Zentralzone (sowohl von der frontalen als ROLANDOschen Abteilung) her mächtige Assoziationssysteme zusammentreffen, so daß der Eindruck entsteht, es liege hier eine Zusammenfassung sämtlicher Körpersegmente vor, während von den Spezialsinnen nur der Geruch (und das Feld 11) spärliche Verbindungen eingeht — Befunde, welche mich veranlaßt haben, im Stirnhirn eine Repräsentation der körperlichen Person zu vermuten. Daß hierbei assoziative Vorgänge in großer Zahl beteiligt sind, wird man nicht in Abrede stellen können, und insofern ist auch für das präfrontale Gebiet die allgemeine Bezeichnung als Assoziationszentrum zweifellos gerechtfertigt. Man würde nach den klinischen Erfahrungen in ihm speziell zu suchen haben Gedächtnisspuren körperlicher Eindrücke, von Innervertionsgefühlen, Willenserregungen, also persönlichen Betätigungen.

Man bemerkt ohne weiteres, daß sich die Annahme ein- und mehrsinniger Gebiete in *gewisser Hinsicht* mit LUCIANIS Einteilung der Großhirnoberfläche deckt, insofern dieser behauptet, daß die Sinnessphären an einzelnen Stellen der Hirnoberfläche zu mehreren übereinandergreifen — allerdings mit der Nebenvorstellung, daß sich in diesen mehrsinnigen Zentren *Projektionsfasern* verschiedener Sinnesleitungen zusammenfinden. Diese letztere Deutung ist für den Menschen unzulässig — selbst wenn man sie für niedere Säuger für akzeptabel hält. Die mehrsinnigen Zentren hängen beim Menschen meines Erachtens *lediglich durch Assoziationssysteme* mit einer Mehrheit von Sinnesleitungen zusammen.

Digitized by Google

Unter diesen Voraussetzungen würde auch die Annahme Ferriers, daß der Gyrus angularis am Sehen *beteiligt* ist, mit den myelogenetischen und klinischen Befunden am Menschen vereinbart werden können — während die Zuleitung von Gesichtseindrücken durch Vermittelung von Projektionssystemen nicht hinreichend erwiesen ist.

Hiernach scheint mir eine hinreichende Summe tatsächlicher Erfahrungen vorzuliegen, um eine allgemeine Theorie der Hirnoberfläche des Menschen unter Zugrundelegung der Myelogenese und der pathologischen Beobachtungen zu entwerfen.

Die Großhirnoberfläche des Menschen besteht *zum kleineren Teil* aus distinkten Projektionsfeldern der einzelnen Sinne mit zugeordneten motorischen Bahnen, den primären Sinnessphären — und Zwischengebieten, welche als Substrat assoziierter Gedächtnisspuren, und hiermit der höheren geistigen Funktionen überhaupt, zu betrachten sind.

Die Gegenüberstellung der Sinnes- bezw. Projektions- und Assoziationszentren erscheint mir notwendig, um die einzigartige Position des menschlichen Gehirns in der Tierreihe klar hervortreten zu lassen. Erst die scharfe Formulierung der Hauptgrundzüge in der Flächengliederung der menschlichen Rinde eröffnet ein wirkliches Verständnis für die Variationen der Hirnbildung in den niederen Ordnungen.

Auf zwei grundverschiedenen Wegen ist man hier zu genaueren Vorstellungen gelangt. Der eine beginnt unmittelbar mit den Fundamentalversuchen von Fritsch und Hitzig über elektrisch erregbare Punkte in der Großhirnrinde des Hundes. Bereits in diesen ersten Feststellungen ist implizite der Hinweis auf eine Zusammensetzung der Rinde aus Feldern verschiedener Bedeutung enthalten, insofern als die elektrisch erregbare Zone der gesamten übrigen Großhirnrinde gegenüber gestellt wird. Erst Ferrier hat aber auf Grund mannigfaltigerer Versuche mit Entschiedenheit hervorgehoben, daß die nach elektrischer Reizung (auch außerhalb der Fritsch-Hitzigschen Zone) auftretenden Erscheinungen von koordinierten Bewegungen der verschiedensten Art mit Bestimmtheit auf eine *weitgehende funktionelle* Differenzierung der Großhirnrinde hinweisen und daß ein funktionelles Zusammenfließen von Feldern verschiedener Reaktionen nicht anzunehmen sei, daß vielmehr die scheinbar darauf hindeutenden Erscheinungen durch Stromschleifen bedingt seien.



Digitized by Google

Während nun die weitere Ausbildung der elektrischen Reizmethode insbesondere durch HORSLEY, SHERRINGTON, SCHÄFER, BEEVOR u. a. zu einer bewunderungswürdigen Präzisierung der inneren Ordnung der motorischen Zone geführt hat, welche alle myelogenetischen Aufschlüsse weit hinter sich läßt, war es MUNK vorbehalten, durch die Anwendung der *Abtragungsmethode*, durch planmäßig durchgeführte Exstirpationen die Gliederung der Hirnoberfläche in Sinnessphären, die Existenz von Projektionsfeldern sämtlicher Sinnesorgane daselbst nachzuweisen. Wenn MUNK hierbei zu der Anschauung gelangt ist, daß die *gesamte* Rindenoberfläche glatt und *ohne Rest* in Sinnessphären teilbar sei, so liegt hier auf den ersten Blick ein durchgreifender Widerspruch gegenüber den Aufschlüssen der myelogenetischen Methode vor, der sich indes großenteils in befriedigender Weise löst, sobald man der Verschiedenheit der Untersuchungsobjekte Rechnung trägt. Auch bei MUNK bildet der Hund den eigentlichen Ausgangspunkt für die Gesamtauffassung der Rindengliederung. Gerade für dieses Tier bietet die scharfe Feststellung der Grenzen der einzelnen Projektionsfelder große Schwierigkeiten, auf welche wie mir scheint in teilweise zutreffender Weise schon HITZIG (Arch. f. Psych. Bd. 37) hingewiesen hat. Wie ich mich durch das myelogenetische Studium der kortikalen Leitungsbahnen beim Hund[1]) überzeugt habe, ist es überaus schwierig, wenn nicht unmöglich die Rinde der meisten Windungen ohne Verletzung *vorüberziehender* Projektionssysteme rein zu exstirpieren. Die Sinneszentren sind dabei nicht so scharf von den zweifellos vorhandenen Assoziationszentren getrennt wie beim Menschen; die Regionen, welche regelmäßig gestellter Projektionsfasern (nicht ganz *vereinzelter*) entbehren, sind klein und unregelmäßig geformt, sodaß es ganz unmöglich erscheint, sie isoliert glatt und sauber zu zerstören, oder die einzelnen Sinnessphären in ihrer ganzen Ausdehnung rein zu exstirpieren.[2])

Der Experimentator bewegt sich bei Exstirpationen an Hund und Katze auch *inmitten* der Assoziationszentren stets in unmittelbarer Nähe von Sinnessphären oder von Stabkranzbündeln solcher. Hierzu kommt, daß bei Hund und Katze die Fibrae arcuatae

---

1) An zum Teil von DÖLLKEN hergestellten Präparaten.

2) JEAN DEMOOR und P. HEGER haben bei ihren höchst beachtenswerten Experimenten (Institut Solvay) besonders das parietale Zentrum teilweise gut getroffen.

Digitized by Google

und die langen Assoziationssysteme viel weniger stark entwickelt sind und auch relativ *viel* dünnere Lagen bilden als beim Menschen. Die Stabkranzbündel verlaufen deshalb viel näher an der Rinde, auch an Stellen, in welche Projektionsfasern nicht eintreten. Ja es zeigt sich auch die Eigentümlichkeit, daß Projektionsbündel z. B. Teile der Sehstrahlung, bevor sie definitiv in ihre Endsphäre eintreten, zunächst selbst mehrmals hintereinander in fremde Windungen tief hereinlaufen, um sie mit spitzwinkligen Knickungen wieder zu verlassen. Sehstörungen müssen so durch Exstirpation einer ganzen Anzahl von Windungen entstehen, welche *nicht* als Endstationen der Sehstrahlung anzusehen sind.[1]) Auf diese Weise muß auch der sorgfältigste Experimentator leicht zu falschen Anschauungen über den Umfang der einzelnen Sinnessphären gelangen. Die notwendigen Korrekturen können lediglich auf anatomischem Wege gewonnen werden, und hier empfiehlt sich in erster Linie die myelogenetische Methode, da sie Verlauf und Gliederung des Stabkranzes klar und deutlich erkennen läßt.

Die aller regelmäßig angeordneten Projektionsfasern entbehrenden ja vielleicht stellenweise davon freien[2]) Zonen finden sich an entsprechenden Stellen wie beim Menschen etc.; man kann ein frontales, temporales und parietales Assoziationszentrum unterscheiden, aber es fehlt noch jede Andeutung einer Gliederung in Randzonen und Zentralgebiete. Hierdurch wird es nahegelegt, in den Assoziationszentren lediglich periphere Zonen der Sinneszentren zu erblicken bezw. erstere auf letztere mehr weniger glatt zu verteilen. Erst die Vergleichung mit der klaren myelogenetischen Gliederung des menschlichen Gehirns ermöglicht eine richtige Deutung aber auch gleichzeitig die Würdigung der enormen Kluft, welche in bezug auf die Zahl und die Ausdehnung der Felder zwischen Mensch und Hund (und *noch mehr* der Katze) besteht und zeigt, wie ungerechtfertigt es ist, die Befunde an

---

1) Es ist dies auch der Grund, weshalb von Monakows Angaben über Beziehungen der einzelnen Rindenfelder zum Sehhügel zahlreiche Inkorrektheiten zeigen. Daß von Monakow die fraglichen, an jedem guten Weigert-Präparat sichtbaren schleifenförmigen Umbiegungen leugnet, erscheint schwerverständlich. Vermutlich trägt auch hier die überwiegende Verwendung von Frontalschnitten die Hauptschuld.

2) Ich wage wegen des nicht ganz regelmäßigen Verhaltens meiner Objekte ein allgemeingültiges Urteil noch nicht zu fällen.

Digitized by Google

diesen Tieren einfach auf den Menschen zu übertragen.[1]) Was die Verhältnisse bei den von MUNK verwandten Affen (Macacus) anbelangt, so habe ich bisher (aus Mangel an Material), myelo-

---

1) Dies ist offenbar die Tendenz von C. und O. VOGT, welche behaupten, durch Untersuchungen, insbesondere an der Katze, meine Theorie der menschlichen Großhirnrinde widerlegt zu haben. Es liegt hier eine Häufung von Irrtümern vor. An und für sich erscheint es nur zweckmäßig, ja ein geradezu ideales Ziel, die Hirnoberfläche eines Tieres, für welches die myelogenetische Gliederung sich auf Grund eines reichen Untersuchungsmaterials genau feststellen läßt, auch mit Hilfe der sekundären Degeneration zu untersuchen und die Ergebnisse beider Methoden zu einander in Beziehung zu setzen. Ein Erfolg von bleibendem Wert ist aber nur zu erwarten, wenn einerseits die myelogenetischen Rindenfelder wirklich exakt umgrenzt werden, andererseits jedes dieser Felder für sich reinlich und sauber zerstört wird, sodaß man seine leitenden Verbindungen klar zu überblicken vermag. Diese Aufgabe ist aus den bereits oben angeführten Gründen auch bei der Katze überaus schwer durchführbar, und speziell die Untersuchungen von C. und O. VOGT bedeuten hier im wesentlichen einen Mißerfolg. Es ist ihnen trotz gegenteiliger Versicherungen auch nicht einmal gelungen, ein myelogenetisches Rindenfeld (weder beim Hund noch bei der Katze) sauber zu exstirpieren. Bald ist die Rinde selbst in zu weiter Ausdehnung getroffen, bald geht die Verletzung soweit in die Tiefe, daß der Stabkranz selbst bis in die Stammganglien in größter Ausdehnung durchbrochen ist, sodaß sich meist überhaupt nicht sicher angeben läßt, von Zerstörung welcher Rindenstellen die erzielten sekundären Degenerationen abhängig sind., C. und O. VOGT haben nicht für ein myelogenetisches Rindenfeld ihrer Versuchstiere Umfang und Verbindungen exakt dargelegt; ihre Behauptung, daß sie für *alle* einzelnen Rindenfelder einen Stabkranz nachgewiesen haben, hält einer kritischen Prüfung nirgends stand. Daneben tritt bei diesen Vertretern einer überwiegend *subjektiven Hirnanatomie* auch eine Überschätzung der Tierbefunde gegenüber den am Menschen gemachten myelogenetischen Befunden hervor. Es ist eine durchaus irrige Voraussetzung, daß sich der Ablauf der Markentwicklung am Tier wegen der Kleinheit und Einfachheit des Hirns leichter und sicherer überschauen läßt als beim Menschen. Im Gegenteil bietet letzterer unendlich viel Vorzüge dar, nicht nur wegen des viel langsameren Ablaufs der Entwicklung (z. B. vollziehen sich beim Hunde vom 11. bis 17. Tag prinzipiell dieselben Fortschritte wie beim Menschen in sieben Wochen), welche alle einzelnen Phasen viel deutlicher hervortreten läßt, sondern auch wegen der schärfer ausgeprägten Grundzüge im Bau des Menschenhirns, der

Digitized by Google

genetische Untersuchungen nicht anstellen können, so daß ich für die Beurteilung der Frage nach der Entwicklungshöhe der Assoziationszentren nur auf mikroskopische Präparate der Großhirnrinde und auf die Besichtigung und Würdigung der gröberen Form angewiesen bin, welche Fehlerquellen in sich bergen. Ich muß es hiernach für wahrscheinlich erklären, daß Macacus im wesentlichen nur Randzonen besitzt; doch fehlen auch diese anscheinend noch zum guten Teil (z. B. Nr. 21 des Menschen u. a.). Myelogenetische Untersuchungen sind dringend notwendig, um hier Gewißheit zu schaffen, und bilden eine dankbare Aufgabe für Zentralinstitute, denen entwicklungsgeschichtliches Material von Affen zugänglich ist. Experimentell lassen sich vermutlich auch bei Macacus Randzonen und Sinnessphären schwer trennen, da beide ja, wie bereits oben bemerkt, funktionell eng zusammenhängen. Vielleicht ist in Munks Unterscheidung einer Rinden- und Seelenblindheit, Rinden- und Seelentaubheit etc. ein Hinweis auf diese Gliederung gegeben. Doch liegen die Verhältnisse nicht klar genug, als daß ich hier entschieden Stellung zu nehmen vermöchte.

Es wird eine Hauptaufgabe für die Hirnanatomie sein, die Zahl der myelogenetischen Rindenfelder für möglichst zahlreiche Tierspezies festzustellen, eine Arbeit, welche nur durch das Zu-

---

klaren Oberflächengliederung infolge der starken Entwicklung der Terminalgebiete und der hierdurch bedingten scharfen Umgrenzung seiner Sinnessphären. Die verworrene Form, welche das myelogenetische Grundgesetz bei C. und O. Vogt annimmt, ist lediglich der Ausdruck mangelhafter Vertiefung in das Problem. Eine wirklich wissenschaftliche Vergleichung von Tiergehirnen mit dem menschlichen erfordert die Vergleichung aller einzelnen myelogenetischen Rindenfelder von Anfang an bis zum Ende, wozu ein lückenloses Material notwendig ist. Soweit ich sehe, beträgt beim Hund wie bei der Katze die Zahl der myelogenetischen Rindenfelder kaum 20 gegen 36 beim Menschen. Die einfache Übertragung beliebiger Befunde an der Katze auf das Menschenhirn *muß* hiernach zu groben Irrtümern führen. Bei kritischem Verfahren kommt man aber auch hier nur zu einer Bestätigung meiner Auffassung, z. B. der terminalen Projektionssysteme des menschlichen Stabkranzes. Finden sich doch der vordere Sehhügelstiel und die Türkschen Bündel schon bei Tieren deutlich, deren Rinde sich im wesentlichen aus Sinnessphären zusammensetzt und nur Andeutungen von Assoziationszentren erkennen läßt.

Digitized by Google

sammenwirken zahlreicher Kräfte zu bewältigen sein wird, welche aber durch lückenhafte Untersuchungen an wenigen Spezies auch nicht annähernd im wissenschaftlichen Sinn gelöst wird. Vorläufig ist sie nur am menschlichen Gehirn soweit abgeschlossen, daß ein klares Gesamtbild gewonnen ist. Daß das hier zutage tretende Prinzip einer Scheidung in stabkranzhaltige und stabkranzfreie Gebiete schon für die niederen Säuger gilt, schließe ich nicht nur aus zahlreichen eigenen myelogenetischen Studien an den Gehirnen von Nagern, sondern auch aus den mit meinen myelogenetischen Resultaten vollständig übereinstimmenden Mitteilungen RAMON Y CAJALS (Bewegungsrinde Fig. 30 und 31) über Bezirke der Hirnrinde, welche der sensiblen Endplexus entbehren. Diese schon durch die späte Entwickelung *aller* nervösen Elemente sich den Assoziationszentren des Menschen eng anschließenden Felder finden sich tatsächlich relativ an derselben Stelle wie die letzteren, unterscheiden sich aber von den menschlichen dadurch, daß sie einfach und ungegliedert erscheinen. Beim erwachsenen Tier läßt sich leicht erkennen, daß die der sensiblen Plexus entbehrenden Spätzonen überaus zahlreiche dichtgedrängte Ganglienzellen enthalten, was besonders am Hamster schön hervortritt. Wenn RAMON Y CAJAL andeutet, daß sich in diesen Assoziationszentren später noch kortikofugale Fasern bilden, so stützt er sich, soweit ich sehe, nicht sowohl auf eigene zuverlässige Resultate, sondern beruft sich auf Mitteilungen von DEJERINE, SIEMERLING u. a., welche ich oben hinreichend charakterisiert habe und welche sich (besonders was SIEMERLING anlangt) bei kritischer Nachprüfung als mehr oder weniger grobe Irrtümer erweisen. Daß sich bei reif geborenen Tieren *intra vitam* neue Projektionssysteme in der Hirnrinde entwickeln, halte ich nicht nur für an sich recht unwahrscheinlich, sondern auch dadurch für widerlegt, daß alte Tiere in den fraglichen Zentren *nicht mehr* Radiärfasern zeigen als RAMON von Neugeborenen abbildet. Jedenfalls weisen auch RAMON Y CAJALS *objektive* Angaben darauf hin, daß in der Säugetierreihe bis weit herab sich Andeutungen von Assoziationszentren finden; dieselben sind aber von so geringer Ausdehnung, daß es selbst dem geübtesten Experimentator unmöglich sein dürfte, sie gesondert zu exstirpieren und so ihre Funktionen zur Anschauung zu bringen.

Im Gegensatz hierzu ist nach den makroskopischen Verhältnissen nicht zu zweifeln, daß die *Anthropoiden* die Assoziations-

Digitized by Google

zentren in großer Ausdehnung besitzen. Doch wird man auch hier eine ganze Anzahl von Variationen in bezug auf die Größenverhältnisse der einzelnen Felder, insbesondere auch der Terminalgebiete erwarten dürfen (z. B. eine besonders starke Entwickelung des parietalen Gebietes beim Gorilla etc.). Leider machen es äußere Verhältnisse unmöglich, vergleichend myelogenetische Untersuchungen im größeren Maßstab anzustellen. Schon die genaue Untersuchung *eines* reifen Neugeborenen würde vermutlich eine wesentliche Förderung des Gesamtproblems bedeuten, insofern schon hierbei höchst wahrscheinlich wichtige Aufschlüsse über die Größenverhältnisse der einzelnen Rindenfelder im Verhältnis zum menschlichen Gehirn zu Tage treten werden. Andrerseits lassen schon die experimentellen Untersuchungen vorzüglich der englischen Forscher deutlich erkennen, wie groß die Unterschiede nach Zahl und Proportionen der Rindenfelder zwischen den Anthropoiden und niederen Affen wie Macacus sind. Die fortschreitende[1]) Konzentration der motorischen Zentren auf die vordere Zentralwindung bei den Anthropoiden stellt unmittelbar einen Übergang zu dem übersichtlich geordneten menschlichen Typus dar.

Handelt es sich bei der soeben besprochenen Gruppe von Forschungen ausschließlich um Säugetiere und im wesentlichen um experimentell gewonnene Aufschlüsse, so hat Edinger auf einem zweiten durchaus selbständigen Wege durch *vergleichend-anatomische* Untersuchungen der *niedersten* Wirbeltierklassen, die Frage nach der Zusammensetzung des Pallium in Angriff genommen und ist hier zu dem bemerkenswerten Resultat gelangt, daß während bei Fischen dasselbe noch völlig fehlt, bei Reptilien zunächst die Riech- und Sehsphäre auftreten und daß die übrigen Sinnessphären erst bei höheren Ordnungen folgen. Vergleicht man die von Edinger klargelegten ersten Anfänge kortikaler Sinnesflächen mit den von mir festgestellten, den Schlußstein der ganzen gewaltigen Entwicklungsreihe bildenden myelogenetischen Rindenfeldern des Menschen, so gähnt zwischen beiden eine Kluft, welche durch die vorliegenden vergleichend anatomischen Befunde zunächst nur zum kleinsten Teil ausgefüllt werden kann. Immerhin schließt sich dieses lückenhafte Material in einer Weise zusammen, daß man schon jetzt die stetig *fortschreitende Kompli-*

1) Vorausgesetzt, daß die abweichenden Befunde nicht auf Mängel der Untersuchungsmethoden zurückzuführen sind.

Digitized by Google

*kation der Rindenfelder* als das leitende Prinzip in der aufsteigenden Entwicklungsreihe zu erkennen und nach den Hauptgrundzügen zu formulieren vermag. Während bei den niederen Wirbeltierklassen eine Sinnessphäre nach der anderen erscheint, tritt in der Säugetierreihe die fortschreitende Komplikation der Assoziationszentren von den ersten Anfängen bis zur höchsten Entfaltung beim Menschen hervor. Nur äußerst langsam vergrößern sich diese Zentren, so daß sie selbst bei katharinen Affen noch erheblich hinter den Sinnessphären zurückbleiben und daß erst bei den Anthropoiden die im menschlichen Gehirn extrem ausgeprägte Trennung in Randzonen und Zentralgebiete deutlicher hervortritt.

Im einzelnen vollzieht sich diese fortschreitende Entwicklung so, daß neben der wachsenden *Zahl* auch vielfach *Variationen* in den *Größenverhältnissen* der einzelnen Rindenfelder, insbesondere auch der Sinnessphären vorkommen, in welcher Beziehung ein Hinweis auf die Riechsphäre genügen dürfte. Ob irgend ein Rindenfeld als ausschließlicher Besitzstand des Menschen anzusehen ist, muß weiteren Untersuchungen vorbehalten bleiben. Allem Anschein nach ist auch die starke Entwicklung mancher Randzonen für das menschliche Gehirn charakteristisch, was speziell für die fundamentale Frage nach der Entwicklung der Sprachfähigkeit (vgl. z. B. Feld 18b) von Bedeutung sein dürfte. Doch sind an der Vernunftsprache (Logos) zweifellos zahlreiche Rindenfelder insbesondere auch mehrere Zentralgebiete beteiligt.

In bezug auf die *Reihenfolge*, in welcher die einzelnen Rindenfelder in der Tierreihe (phylogenetisch) hervortreten, liegt die Hypothese nahe, daß dieselbe in der Hauptsache mit der am Menschen feststellbaren Entwicklungsfolge der myelogenetischen Rindenfelder sich deckt, insofern als schon die bisher angeführten, anatomischen und experimentellen Tatsachen den Hinweis darauf enthalten. Speziell auf die *Sinnessphären* angewandt, würde jener Satz besagen, daß dieselben in der Tierreihe in der Reihenfolge sich entwickeln, welche die von mir angewandte Nummerierung der entsprechenden myegolenetischen Felder des Menschen anzeigt. Unter dieser Voraussetzung würde man freilich zu Anschauungen gelangen, welche von den bisher geltenden von EDINGER inaugurierten *wesentlich abweichen*. Im menschlichen Pallium geht die sensu-motorische Zone (2, 2b) *der Extremitäten* allen anderen Feldern und so auch dem Gyrus hippocampi entschieden voraus (die Lamina perforata anterior und das Trigonum olfactorium, welche

Digitized by Google

um ein kaum merkliches früher Markscheiden erhalten, gehören ja nicht zum Pallium). Wenn man in bezug auf die vordersten an die Lamina perforata anterior unmittelbar angrenzenden Teile des Feldes 4a (Uncus) im Zweifel sein könnte, ob daselbst nicht gleichzeitig mit der Lamina perforata anterior markhaltige Fasern auftreten, so gilt dies sicher nicht für die Innenfläche des Uncus und für das Feld 4b des Gyrus hippocampi. — Es würde selbstverständlich die Bildung der gesamten Großhirnrinde in einem wesentlich neuen Lichte erscheinen, falls die sensu-motorische Zone der Extremitäten deren Urbestandteil darstellen sollte, wenn der erste Schritt zur Cortex-Bildung gegeben sein sollte in der Entwicklung eines Rindenfeldes, welches in seiner ersten Anlage wenigstens in nuce auch das Zentrum für die stereognostisch tastende Hand enthält. Doch sind die vorliegenden Untersuchungen nicht hinreichend, um die Wahrscheinlichkeit einer solchen Annahme behaupten zu können. Es würde mit Rücksicht hierauf zunächst festzustellen sein, welche Veränderungen im Vorderhirn im Anschluß an die Bildung *fünfzehiger* Extremitäten vor sich gehen.

Es kann wohl kaum eine der Assoziation der Akademien würdigere Aufgabe gefunden werden, als die tatkräftige Förderung des Studiums all der Zwischenstufen, welche die Großhirnrinde in der Wirbeltierreihe durchläuft, d. h. die Feststellung des Weges, auf welchem die Natur zum Selbstbewußtsein, zur Selbsterkenntnis gelangt ist.

## III. Makroskopische Anatomie.

Werfe ich noch einen kurzen Blick auf die Rückwirkungen, welche die Aufschlüsse der myelogenetischen Methode auf die makroskopische Anatomie haben werden, so ist wohl nicht zu zweifeln, daß nicht nur das Verständnis der äußeren Formen vielfach gefördert wird, sondern auch für die äußere Einteilung der Hirnoberfläche wichtige Gesichtspunkte gewonnen sind, so daß es sich notwendig erweisen wird, denselben auch in der Nomenklatur ausgiebig Rechnung[1]) zu tragen.

---

1) Ich möchte hier ganz besonders auf die Belegung der einzelnen Felder mit Ziffern hinweisen, nach der Reihenfolge ihrer Entwickelung, wie ich sie oben angewandt habe. In dieser Bezeichnungsweise verkörpert sich *ein durchaus naturgemäßes Prinzip*, welches sich auch auf

Digitized by Google

Zunächst erscheint die übliche *Abgrenzung der Großhirnlappen* irrationell. Die Gepflogenheit, im Sulcus centralis die Grenze zwischen Stirn- und Scheitellappen zu erblicken, wird durch den Nachweis, daß dieser Sulcus (wenigstens in der Regel) inmitten eines schon seiner ganzen Entwickelung nach innig zusammengehörigen Gebietes liegt, wissenschaftlich unhaltbar. Es ergibt sich andererseits, daß eine Anzahl Furchen, welche auf der Grenze verschiedener Rindenfelder gelegen sind („Grenzfurchen", wie die Incisura praeoccipitalis), bei der Abteilung von „Lappen" in der hergebrachten Weise Verwendung finden können. Im ganzen erweist sich aber im Lichte der myelogenetischen Gliederung die Unterscheidung letzterer als eine überwiegend künstliche, bezw. lediglich zur äußeren Orientierung dienende. Die Furchen erscheinen auf Grund der myelogenetischen Differenzierung für die sichere Orientierung auf der Oberfläche recht verschiedenwertig. Die Sulcus centralis liegt fast stets zwischen sensorischer und motorischer Abteilung des myelogenetischen Rindenfeldes Nr. 2, die fissura calcarina stets in der Sehsphäre. Die Beziehung dieser Furchen zu primären Sinnessphären ist derart gesetzmäßig, daß man hier geradezu von *Sinnesfurchen* sprechen kann, von einer Tast- (?), einer Sehfurche etc. Andere Furchen, wie der Sulcus interparietalis, verlaufen zwischen soviel verschiedenartigen Feldern, daß derartige einfache gesetzmäßige Beziehungen nicht existieren. Was die *Windungen* anlangt, so zeigen sich die gleichen Unterschiede. Die primäre Hörsphäre ist so regelmäßig ausschließlich an die temporale Querwindung gebunden, daß man letztere treffend als *Hörwindung* bezeichnen kann. Umgekehrt zeigt die Myelogenese die Zusammensetzung anderer Windungen, wie z. B. des Gyrus fornicatus aus fünf, der 3. Stirnwindung aus drei besonderen Feldern, während die makroskopische Besichtigung überhaupt Unterabteilungen nicht erkennen läßt. Offenbar gewinnt hierdurch auch die vergleichend-anatomische Untersuchung neue wichtige Anhaltspunkte.

Auch die Reihenfolge, in welcher sich die Furchen bilden,

---

die Faserzüge, Assoziationssysteme etc. ausdehnen läßt. Sobald man sich über die Nummerierung jedes einzelnen Feldes etc. einigt, wird eine überaus bequeme Verständigung über die Lokalisation von Destruktionen, Funktionsstörungen etc. vermutlich auch auf vergleichend-anatomischem Gebiet möglich werden.

Digitized by Google

und die Gründe ihres konstanten Auftretens an bestimmten Punkten der Hirnoberfläche werden einer Erklärung zugänglich, sofern man insbesondere die sorgfältigen Untersuchungen von Retzius mit den myelogenetischen Differenzierungserscheinungen vergleicht. Frühe Furchen treten im allgemeinen nur da auf, wo frühreifende (also frühzeitig Neuroblasten bildende und lebhaft wachsende) Rindenfelder gelegen sind. Es sind offenbar teilweise *lokale* Wucherungsprozesse, welche zur Furchenbildung führen, nicht nur allgemeine Wachstumsvorgänge. In den Terminalgebieten beginnt die Furchung nicht nur später als in den anderen Feldern, sondern sie zeigt im allgemeinen auch weit mehr Variationen. Die konstanten Furchen liegen sämtlich in oder neben Primordialgebieten (Fissura hippocampi, calcarina, sulcus centralis).

Schließlich sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß sich die Existenz gewisser myelogenetischer Rindenfelder auch in der Form des Schädels, speziell des menschlichen, äußerlich geltend macht. Den Scheitel- und Stirnhöckern entsprechen genau die Terminalgebiete Nr. 34 und 35, und besagte Höcker sind nichts als der Ausdruck der starken Entwickelung dieser den höheren psychischen Funktionen dienenden Felder beim Menschen. Die primären Sinnessphären haben bei letzterem im Verhältnis zu den Assoziationszentren nur einen verschwindenden Einfluß auf die Schädelform. Die Zusammensetzung der Großhirnrinde aus besonderen Organen gibt sich also tatsächlich, wenigstens teilweise äußerlich kund — und die Schädelform gestattet Rückschlüsse auf die Größe gewisser Rindenfelder — aber freilich nur innerhalb recht enger, in der Folge noch genau festzustellender, und auch feststellbarer Grenzen. Andrerseits erweist die myelogenetische Rindengliederung eindringlicher als irgend eine andere Methode, daß und weshalb es nicht gelingen kann, zwischen dem Gewicht des Gehirns und den psychischen Leistungen einfach gesetzmäßige Beziehungen aufzufinden.

Dagegen wird die Vergleichung zahlreicher gleichaltriger Individuen in den ersten Lebenswochen auf Größe und Proportionen der einzelnen myelogenetischen Felder wichtige Variationen ergeben — wie ich schon aus dem von mir verarbeiteten Material zu erschließen vermag. Der Größenanteil besonders der frontalen und parietalen Terminalgebiete schwankt innerhalb weiter Grenzen und dementsprechend auch die Schädelform. Auffallenderweise habe ich durchschnittlich an männlichen Neugeborenen eine

Digitized by Google

geringere Entwickelung des frontalen Terminalgebietes nachweisen können, als an den weiblichen (vergl. Taf. IV.) Nachdem die überaus konstante Lage der Zentralfurche festgestellt ist, wird man zwar auch am Erwachsenen die Proportionen jener Abschnitte vergleichen können. Indes nur an jungen Kindern wird man diese Variationen mit größerer Sicherheit auf die einzelnen Rindenfelder zurückzuführen vermögen. Von besonderem Interesse wird es sein, diese Untersuchungen an Früchten bezw. Neugeborenen verschiedener Rassen anzustellen. Zur Beschaffung des notwendigen Materials wird ein internationales System von Zentralinstituten für Hirnforschung überaus wertvolle Dienste leisten können.

---

Druckfertig erklärt 17. V. 1904.]

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# INHALT.

Seite

*W. Scheibner,* Beiträge zur linearen Transformation, als Einleitung in die algebraische Invariantentheorie. Dritter Teil. Über Gleichungen fünften und sechsten Grades . . . . . 139

*Paul Flechsig,* Einige Bemerkungen über die Untersuchungsmethoden der Großhirnrinde, insbesondere des Menschen. Dem Zentralkomitee für Hirnforschung vorgelegt. (Forts. u. Schluß) 177

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

L Soc 1726.9
HARVARD COLLEGE L
OCT 7 1904
CAMBRIDGE, MASS.

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

## GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHSUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1904.

# IV.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1904.

Digitized by Google

Digitized by Google

HARVARD COLLEGE LIBRARY
OCT 7 1904
CAMBRIDGE, MASS.

## SITZUNG VOM 2. MAI 1904.

Der stellvertretende Sekretär Herr H. Credner widmet dem am 1. Mai verstorbenen Sekretär der mathematisch-physischen Klasse Herrn W. His Worte dankbarer Anerkennung seiner hohen Verdienste, worauf sich die Anwesenden zur Ehrung dessen Andenkens von ihren Sitzen erheben.

Herr E. Windisch erstattet Bericht über den Wiener Kartelltag. Auf seine Anregung und auf Antrag der Herren Neumann, Bruns und Mayer wird der Beschluß gefaßt, der Beteiligung an der Herausgabe der mathematischen Encyklopädie näher zu treten.

Vorträge:

Herr O. Wiener o. M. teilt einen Aufsatz von Herrn E. Riecke mit: Ergebnisse der von Herrn Cuomo auf Capri ausgeführten Messungen der Elektrizitätszerstreuung in der freien Luft.

Herr A. Mayer o. M.: Vorlegung einer Abhandlung des Herrn J. Thomae: Parameterdarstellung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung.

Herr H. Bruns o. M. Vorlegung einer Abhandlung des Herrn F. Hayn: Selenographische Koordinaten II. Abh.

Herr W. Scheibner o. M. teilt eine Arbeit von Herrn M. Krause mit: Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Kurbelbewegung.

Herr H. Credner o. M. legt einen Aufsatz von Herrn Frz. Etzold vor: Die in Leipzig vom 1. Juli 1903 bis 30. April 1904 von Wiecherts Pendelseismometer registrierten Erdbeben und Pulsationen.

---



Digitized by Google

# Ergebnisse der von Dr. Cuomo auf Capri ausgeführten Messungen der Elektrizitätszerstreuung in der freien Luft.

Von

Eduard Riecke.

Durch die Mittel, welche die Kgl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig in so dankenswerter Weise zur Verfügung gestellt hat, wurde es ermöglicht, vom Oktober des Jahres 1901 bis Februar 1903 Beobachtungen der luftelektrischen Zerstreuung mit dem Apparate von Elster und Geitel in Capri ausführen zu lassen. Herr Dr. med. V. Cuomo in Anacapri hatte sich in zuvorkommendster Weise bereit erklärt, die Messungen zu übernehmen.

„Das Wohnhaus des Herrn Dr. Cuomo, das in einem turmartigen Anbau auch die gut ausgestattete, private meteorologische Station enthält, liegt unmittelbar an der von Capri nach Anacapri führenden Landstraße und zwar einige Minuten von dem letzteren Orte. Es ist umgeben von einem Garten, der hart an die steil abfallende felsige Küste stößt. Bei den Messungen fand der Zerstreuungsapparat in diesem Garten, an der Nordseite des Hauses Aufstellung, stand also stets, da die Beobachtungen etwa um 1 Uhr nachmittags begonnen wurden, im Schatten. An Tagen, an welchen Sturm herrschte, oder Niederschläge fielen, wurde nicht beobachtet.“[1]) Zwei größere Unterbrechungen erlitten die Messungen im Januar 1902 wegen einer Reparatur der zum Laden des Elektrometers dienenden Zambonischen Säule, im November 1902 wegen einer Reparatur des Elektrometers selber.

1) Elster. Berichte über luftelektrische Arbeiten im Jahre 1901/1902. Nachrichten d. Kgl. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1902.

Digitized by Google

Zur Berechnung der Zerstreuungskoeffizienten diente die von Elster und Geitel abgeleitete Formel:

$$a = \frac{1}{t\left(1 - \frac{C'}{C}\right)}\left\{\log\frac{V_0}{V} - \frac{C'}{C}\log\frac{V_0'}{V'}\right\}.$$

Hier bezeichnet $V_0$ das Anfangspotential des Zerstreuungskörpers, $V$ den Wert, auf den es nach einer Zeit von $t$ Minuten gesunken ist. $V_0'$ bezeichnet das Anfangspotential, wenn das Elektroskop für sich allein, ohne Zerstreuungskörper geladen wird, $V'$ den Wert des Potentiales nach derselben Zeit von $t$ Minuten. $C$ ist die Kapazität des aus Elektroskop, Zerstreuungskörper und Verbindungsstift bestehenden Systems, $C'$ die Kapazität des Elektroskops allein. Bei dem benutzten Apparate ist $C'/C = 0{,}5$, somit der in Prozenten ausgedrückte und für die Minute als Zeiteinheit berechnete Zerstreuungskoeffizient:

$$a = \frac{200}{t}(\log V_0 - \log V) - \frac{100}{t}(\log V_0' - \log V').$$

Die Zeit $t$ wurde zu 15 Minuten genommen. $\overset{+}{a}$ bezeichnet den Zerstreuungskoeffizienten für positive, $\overset{-}{a}$ für negative Ladung, $a$ den hieraus berechneten mittleren Wert; $q$ ist das Verhältnis $\overset{-}{a}/\overset{+}{a}$. An jedem Beobachtungstage wurden diese Größen einmal gemessen.

In der folgenden I. Tabelle sind für alle Monate, in denen beobachtet wurde, die Mittel der Koeffizienten $\overset{+}{a}$, $\overset{-}{a}$, $a$, und des Verhältnisses $q = \overset{-}{a}/\overset{+}{a}$ zusammengestellt.

Tabelle I.

| Jahr | Monat | Zahl der Beobacht. | $\overset{+}{a}$ | $\overset{-}{a}$ | $a$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1901 | November | 21 | 2,307 | 2,106 | 2,206 | 0,915 |
| | Dezember | 16 | 2,356 | 2,186 | 2,271 | 0,932 |
| 1902 | Januar | 17 | 1,800 | 1,888 | 1,844 | 1,049 |
| | Februar | 21 | 2,497 | 2,402 | 2,449 | 0,956 |
| | März | 23 | 2,725 | 2,864 | 2,794 | 1,051 |
| | April | 20 | 3,073 | 3,321 | 3,197 | 1,080 |
| | Mai | 22 | 3,093 | 3,267 | 3,180 | 1,058 |



Digitized by Google

| Jahr | Monat | Zahl der Beobacht. | $\overset{+}{a}$ | $\overset{-}{a}$ | $a$ | $q$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1902 | Juni | 24 | 4,052 | 4,102 | 4,077 | 1,012 |
| | Juli | 30 | 3,095 | 3,131 | 3,113 | 1,011 |
| | August | 29 | 2,855 | 2,827 | 2,841 | 0,993 |
| | September | 25 | 2,857 | 2,731 | 2,794 | 0,957 |
| | Oktober | 22 | 2,908 | 3,057 | 2,982 | 1,051 |
| | November | 6 | 2,805 | 2,925 | 2,865 | 1,043 |
| | Dezember | 24 | 2,981 | 2,957 | 2,969 | 0,992 |
| 1903 | Januar | 25 | 3,336 | 3,408 | 3,372 | 1,022 |
| | Februar | 21 | 3,254 | 3,313 | 3,283 | 1,018 |

Berechnet man mit Hilfe der in der Tabelle enthaltenen Zahlen die Mittelwerte der Größen $\overset{-}{a}$, $\overset{+}{a}$, $a$ und $q$ aus sämtlichen Beobachtungen, so ergeben sich die folgenden

Mittelwerte aus 346 Beobachtungen auf Capri:

$$\overset{+}{a} = 2{,}912, \quad \overset{-}{a} = 2{,}942,$$

$$a = 2{,}927.$$

$$q = 1{,}0106.$$

Für Wolfenbüttel sind die entsprechenden, aus 420 Beobachtungen von ELSTER und GEITEL abgeleiteten Werte:

$$\overset{+}{a} = 1{,}29, \quad \overset{-}{a} = 1{,}35,$$

$$a = 1{,}32,$$

$$q = 1{,}04.$$

Die luftelektrische Zerstreuung ist auf Capri sehr viel größer als in Wolfenbüttel; der Unterschied zwischen der Zerstreuung der positiven und der negativen Elektrizität ist aber erheblich kleiner als in Wolfenbüttel.

Die Abhängigkeit der Zerstreuung von den meteorologischen Elementen wird durch die folgenden Tabellen anschaulich gemacht.

### II. Elektrizitätszerstreuung und Lufttemperatur.

| Temperaturintervall (°C) | Anzahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$ |
|---|---|---|
| 5,1—10,0 | 33 | 2,72 |
| 10,1—15,0 | 138 | 2,75 |
| 15,1—20,0 | 59 | 3,10 |

Digitized by Google

| Temperaturintervall (°C) | Anzahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$ |
|---|---|---|
| 20,1—25,0 | 52 | 3,28 |
| 25,1—30,0 | 63 | 3,03 |
| 30,1—35,0 | 2 | 2,93 |

Vergleicht man nur die bei größter Durchsichtigkeit der Luft beobachteten Werte, so ergibt sich die folgende Zusammenstellung:

| Temperaturintervall (°C) | Zahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$ |
|---|---|---|
| 5,1—10,0 | 8 | 2,62 |
| 101,—15,0 | 25 | 2,99 |
| 15,1—20,0 | 12 | 3,26 |
| 20,1—25,0 | 15 | 3,92 |
| 25,1—30,0 | 25 | 3,43 |
| 30,1—35,0 | 1 | 3,81 |

In beiden Tabellen fällt der größte Werth von $a$ auf das Temperaturintervall 20,1 — 25,0 °Cels.

### III. Elektrizitätszerstreuung und Dampfdruck.

| Dampfdruckintervall (*mm Hg*) | Anzahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$ |
|---|---|---|
| 0,0— 4,0 | 4 | 3,95 |
| 4,1— 6,0 | 43 | 2,65 |
| 6,1— 8,0 | 96 | 2,90 |
| 8,1—10,0 | 72 | 3,09 |
| 10,1—12,0 | 55 | 2,98 |
| 12,1—14,0 | 40 | 3,09 |
| 14,1—16,0 | 21 | 2,95 |
| 16,1—21,0 | 16 | 2,70 |

### IV. Elektrizitätszerstreuung und relative Feuchtigkeit.

| Intervall der relativen Feuchtigkeit | Anzahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$ |
|---|---|---|
| 0— 50 % | 62 | 3,27 |
| 51— 75 % | 208 | 2,88 |
| 76—100 % | 77 | 2,82 |

In Übereinstimmung mit den Messungen von Elster und Geitel in Wolfenbüttel ist eine Beziehung zur absoluten Feuchtig-

Digitized by Google

keit nicht zu erkennen, dagegen ist der Zerstreuungskoeffizient um so größer, je weiter die Luft von ihrem Sättigungspunkte entfernt ist.

**V. Elektrizitätszerstreuung und Durchsichtigkeit der Luft.**

| Durchsichtigkeit der Luft | Anzahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 1,95 |
| 1 | 16 | 2,26 |
| 2 | 40 | 2,76 |
| 3 | 79 | 2,73 |
| 4 | 123 | 2,96 |
| 5 | 86 | 3,29 |

Bei Nebel ist die Durchsichtigkeit der Luft gleich Null gesetzt, bei größter Klarheit gleich 5; die zwischenliegenden Grade ergeben sich aus der Sichtbarkeit ferner Punkte der Landschaft für das unbewaffnete Auge. Die Zunahme der Zerstreuung mit der wachsenden Durchsichtigkeit ist in der Tabelle sehr deutlich ausgeprägt.

**VI. Elektrizitätszerstreuung und Bewölkung.**

| Bewölkung | Anzahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$ |
|---|---|---|
| 0 | 72 | 2,83 |
| 1 | 94 | 3,04 |
| 2 | 38 | 2,68 |
| 3 | 22 | 2,97 |
| 4 | 18 | 3,62 |
| 5 | 9 | 3,51 |
| 6 | 28 | 2,97 |
| 7 | 19 | 3,00 |
| 8 | 23 | 3,22 |
| 9 | 17 | 2,70 |
| 10 | 6 | 2,12 |

Das Maximum der Zerstreuung fällt auf den Bewölkungsgrad 4; die gleichzeitigen Durchsichtigkeitsgrade der Luft schwanken zwischen 1 und 5; im Mittel entspricht der Bewölkung 4 die Durchsichtigkeit 3 mit dem Werte 2,73 des Zerstreuungskoeffizienten.

Digitized by Google

Dadurch wird ein von der Durchsichtigkeit unabhängiger Einfluß der Bewölkung wahrscheinlich gemacht; möglicherweise hängt er mit dem in der folgenden Tabelle angegebenen Einfluß der Windrichtung zusammen.

**VII. Elektrizitätszerstreuung und Windrichtung.**

| Windrichtung | Anzahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$ |
|---|---|---|
| N | 27 | 2,79 |
| NNE | 5 | 2,73 |
| NE | 7 | 2,47 |
| ENE | 3 | 2,73 |
| E | 11 | 2,62 |
| ESE | 5 | 3,13 |
| SE | 28 | 3,04 |
| SSE | 12 | 3,26 |
| S | 31 | 3,54 |
| SSW | 18 | 2,69 |
| SW | 56 | 3,03 |
| WSW | 33 | 2,96 |
| W | 45 | 2,85 |
| WNW | 16 | 2,98 |
| NW | 38 | 2,73 |
| NNW | 11 | 2,57 |

Die Zerstreuung ist am größten bei südlichem, am kleinsten bei nördlichem Winde, ein Unterschied, der durch die geographische Lage Capris bedingt sein dürfte.

**VIII. Elektrizitätszerstreuung und Windstärke.**

| Windstärke *km* in d. Stunde | Anzahl der Beobachtungen | Zerstreuungskoeffizient $a$. |
|---|---|---|
| 6,0—7,2 | 181 | 2,16 |
| 7,3—14,4 | 98 | 2,94 |
| 14,5—21,6 | 43 | 3,37 |
| 21,7—28,8 | 19 | 3,90 |
| 28,9—36,0 | 4 | 3,75 |

Mit wachsender Windstärke nimmt die Zerstreuung zu.

Berechnet man beispielsweise aus den Beobachtungen des Intervalles 21,7—28,8 den mittleren Wert der gleichzeitigen

Digitized by Google

Durchsichtigkeit der Luft, so ergibt sich die Zahl 4, der nach Tabelle V ein mittlerer Zerstreuungskoeffizient von 2,96 entspricht. Es wäre möglich, daß der Einfluß der Windstärke wenigstens zum Teil indirekter Natur ist, veranlaßt durch die mit der großen Windstärke verbundene große Durchsichtigkeit der Luft. Außerdem sind die Bedingungen für die Zerstreuung im Elster-Geitelschen Apparate bei bewegter Luft andere als bei ruhender.

Für die Berechnung eines Teiles der im vorhergehenden mitgeteilten Tabellen bin ich Herrn Dr. Gerdien zu Dank verpflichtet; sie schließen sich im allgemeinen dem von Elster und Geitel[1]) gegebenen Schema an. Die Originalbeobachtungen Dr. Cuomos sind in den Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen[2]) veröffentlicht.

---

1) Elster und Geitel. Messungen der Elektrizitätszerstreuung in der freien Luft. Sitzungsber. d. Kais. Akad. d. Wissensch. in Wien. Math.-Nat. Klasse Bd. CXI. Abt. IIa. Juli 1902.

2) Gött. Nachr. Math.-Phys. Klasse. 1902. p. 193 und 324. 1903. p. 104.

---

: erklärt 16. V. 1904.]

Digitized by Google

# Parameterdarstellung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung.

Von

J. Thomae.

Bei der Darstellung der knotenlosen Raumkurve vierter Ordnung, die als Schnitt zweier Oberflächen zweiten Grades gegeben ist, durch einen Parameter pflegt man die Flächen auf ihr gemeinsames Polartetraeder als Koordinatensystem zu beziehen. Wir wollen hier in den §§ 1 bis 4 einige Darstellungen dieser Art geben, teils der Vollständigkeit halber, teils weil sich dabei auch vielleicht neue Formen ergeben. Diese Darstellungen finden in einem Rationalitätsbereich statt, dem die Quadratwurzel eines Ausdruckes dritten oder vierten Grades adjungiert ist. Diese Quadratwurzel ist aber nicht die einzige in der Koordinatendarstellung vorkommende Irrationalität. Es kommen darin viel mehr auch noch unsymmetrische Funktionen der Wurzeln der Gleichung, die durch Nullsetzen der adjungierten Irrationalität entspringt, vor, und auch noch Quadratwurzeln solcher Formen. Deshalb stellte ich mir die Aufgabe, die Koordinaten der Kurve in einem Rationalitätsbereiche darzustellen, dem als einzige Irrationalität die Quadratwurzel der Diskriminante des aus den beiden Flächen bestimmten Büschels adjungiert ist. Dies ist mir gelungen, unter der Voraussetzung, daß ein reeller Punkt der Kurve gegeben sei, den ich zum Koordinatenanfange mache. Diese Voraussetzung dürfte eine sachgemäße sein, denn ohne sie kann die Kurve imaginär sein, und die Parameterdarstellung ist nicht ohne Wurzelfunktionen der Konstanten zu erbringen. Wenn dieser gegebene Punkt nicht spezielle Lagen hat, so kann man aus ihm genügend viele weitere Punkte der Kurve auf rationalem Wege finden. Die Gleichungen der Tangente jenes Punktes und des sie enthaltenden Hyperboloides des Büschels enthalten die Koeffizienten der beiden

Digitized by Google

gegebenen Flächen des Büschels rational. Die Tangentialebene an dieses Hyperboloid ist die Schmiegungsebene der Kurve im gegebenen Punkte, sie bestimmt, wenn der Punkt kein Wendepunkt ist, einen weiteren Punkt der Kurve rational. Die Schmiegungsebene in diesem Punkte bestimmt auf rationalem Wege im allgemeinen (wir sprechen nachher weiter davon) einen dritten Punkt der Kurve usw. Eine Ebene durch die drei Punkte bestimmt im allgemeinen einen vierten Punkt der Kurve, seine Schmiegungsebene bestimmt rational einen vierten Punkt, der mit den drei ersten nicht in einer Ebene liegt. Man darf also voraussetzen, daß ein Tetraeder rational bekannt ist, dessen Ecken auf der Kurve liegen, auf dessen Seitenflächen die beiden Oberflächen zweiten Grades als Koordinatenebenen bezogen werden können. Zunächst wollen wir sie auf das gemeinsame Polartetraeder beziehen.

§ 1. *Darstellung der Koordinaten der Kurvenpunkte durch drei Quadratwurzeln und durch elliptische Funktionen.* Es seien die beiden Flächen gegeben:

$$(1) \qquad F = \tau_1 X_1^2 + \tau_2 X_2^2 + \tau_3 X_3^2 + \tau_4 X_4^2 = 0,$$

$$(2) \qquad F' = \tau_1' X_1^2 + \tau_2' X_2^2 + \tau_3' X_3^2 + \tau_4' X_4^2 = 0.$$

Ist das gemeinsame Polartetraeder nicht reell, so werden unter den Ebenen $X_1 X_2 X_3 X_4$ und den Zahlen $\tau$ konjugiert imaginäre vorkommen. Wir wollen aber hier auf Realitätsbetrachtungen nicht eingehen. Wir setzen

$$(3) \qquad \tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha \tau_\beta' - \tau_\alpha' \tau_\beta, \quad \tau_{\alpha\beta} = -\tau_{\beta\alpha},$$

sodaß

$$\tau_\alpha \tau_{\beta\gamma} + \tau_\beta \tau_{\gamma\beta} + \tau_\gamma \tau_{\alpha\beta} = \tau_\alpha' \tau_{\beta\gamma} + \tau_\beta' \tau_{\gamma\alpha} + \tau_\gamma' \tau_{\alpha\beta} = 0,$$

$$\tau_{\alpha\beta} \tau_{\gamma\delta} + \tau_{\alpha\gamma} \tau_{\delta\beta} + \tau_{\alpha\delta} \tau_{\beta\gamma} = 0$$

ist. Zur Abkürzung mag

$$X_2 : X_1 = u, \quad X_3 : X_1 = v, \quad X_4 : X_1 = w$$

gesetzt werden. Genügen die Größen $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$ den Gleichungen (1) und (2), so ergeben sich die Gleichungen

$$(4) \qquad \begin{aligned} \tau_{12} + \tau_{32} v_0^2 + \tau_{42} w_0^2 &= 0, \\ \tau_{13} + \tau_{23} u_0^2 + \tau_{43} w_0^2 &= 0, \\ \tau_{14} + \tau_{24} u_0^2 + \tau_{34} v_0^2 &= 0, \end{aligned}$$

Digitized by Google

und die Gleichungen

$$\tau_2(u^2 - u_0^2) + \tau_3(v^2 - v_0^2) + \tau_4(w^2 - w_0^2) = 0,$$
$$\tau_2'(u^2 - u_0^2) + \tau_3'(v^2 - v_0^2) + \tau_4'(w^2 - w_0^2) = 0,$$

aus denen folgt

$$u^2 - u_0^2 = t\tau_{34}, \quad v^2 - v_0^2 = t\tau_{42}, \quad w^2 - w_0^2 = t\tau_{23},$$

wenn $t$ ein Proportionalitätsfaktor ist, und also

$$(5) \quad u = \sqrt{u_0^2 + t\tau_{34}}, \quad v = \sqrt{v_0^2 + t\tau_{42}}, \quad w = \sqrt{w_0^2 + t\tau_{23}}.$$

Diese Gleichungen eignen sich besonders dazu, die Koordinaten durch elliptische oder Thetafunktionen darzustellen. Denn setzt man, was immer möglich ist, $u_0 = 0$, $t = -v_0^2 t'^2 : \tau_{42}$, $k^2 = v_0^2\tau_{23} : w_0^2\tau_{42}$, so ergibt sich

$$(6) \quad \begin{gathered} u = \frac{c_2}{c_1} s\,au, \qquad v = \frac{c_3}{c_1} c\,au, \qquad w = \frac{c_4}{c_1} d\,au, \\ X_1 = c_1\theta_{01}(u), \; X_2 = c_2\theta_{11}(u), \; X_3 = c_3\theta_{10}(u), \; X_4 = c_4\theta_{00}(u). \end{gathered}$$

Setzt man diese Werte in irgend eine Ebenengleichung ein, so findet man in bekannter Weise, daß die Summe der vier Argumentwerte $u$ der Koordinaten der Punkte, die die Ebene mit der Kurve gemein hat, kongruent Null ist, nach dem System der gemeinsamen Periodizitätsmoduln der drei elliptischen Funktionen. Ist $u$ der Argumentwert irgend eines Punktes der Kurve, so bestimmt die Schmiegungsebene in ihm einen Punkt $u' \equiv -3u$, die Schmiegungsebene dieses Punktes einen dritten Punkt $u'' \equiv -3u' \equiv 9u$. Soll $u'' \equiv u$ sein, so muß $8u \equiv 0$ sein. Die Anzahl der Punkte, die nach den einleitenden Bemerkungen bei der späteren Behandlung als besondere Fälle ausgeschlossen werden sollten, ist demnach 64, unter ihnen befinden sich die Wendepunkte.

§ 2. *Darstellung durch nur eine Quadratwurzel.* Von den Gleichungen (5) ausgehend führen wir einen neuen Parameter $\varphi$ durch die Gleichungen ein

$$(7) \quad \begin{gathered} v = \sqrt{v_0^2 + t\tau_{42}} = \frac{1+\varphi^2}{1-\varphi^2}\sqrt{\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}}, \\ w = \sqrt{w_0^2 + t\tau_{23}} = \frac{2\varphi}{1-\varphi^2}\sqrt{\frac{\tau_{21}}{\tau_{24}}}. \end{gathered}$$

Digitized by Google

Erhebt man diese Gleichungen aufs Quadrat, multipliziert bez. mit $\tau_{23}$, $\tau_{24}$ und addiert, so folgt:

$$v_0^2\tau_{23} + w_0^2\tau_{24} = \tau_{12} = \frac{(1+\varphi^2)^2 - 4\varphi^2}{(1-\varphi^2)^2}\tau_{12},$$

woraus die Zulässigkeit der Substitution folgt. Weiter ergibt sich

$$v_0^2\tau_3 + w_0^2\tau_4 + t(\tau_3\tau_{42} + \tau_4\tau_{23}) = -\tau_1 - \tau_2 u_0^2 - t\tau_2\tau_{34} =$$
$$\frac{(1+\varphi^2)^2}{(1-\varphi^2)^2}\frac{\tau_3\tau_{12}}{\tau_{23}} + \frac{4\varphi^2}{(1-\varphi^2)^2}\frac{\tau_4\tau_{21}}{\tau_{24}},$$
$$-\tau_2(u_0^2 + \tau_{34}) = \tau_2 Z(\varphi) : (1-\varphi^2)^2\tau_{23}\tau_{24},$$
$$Z(\varphi) = (1+\varphi^4)\tau_{13}\tau_{14} - 2\varphi^2(\tau_{23}\tau_{14} + \tau_{21}\tau_{34})$$
$$= (1+\varphi^4)\tau_{13}\tau_{24} - 2\varphi^2(\tau_{23}\tau_{14} + \tau_{12}\tau_{34} - 2\tau_{12}\tau_{34})$$
$$= (1+\varphi^4)\tau_{13}\tau_{24} - 2\varphi^2(\tau_{13}\tau_{24} - 2\tau_{12}\tau_{24})$$
$$= \tau_{13}\tau_{24}(1 + 2\varphi^2(2\varkappa - 1) + \varphi^4),$$

wo $\varkappa$ ein Doppelverhältnis ist, welches mit seinen zugehörigen Doppelverhältnissen durch die Formeln definiert wird:

$$(8)\quad \begin{aligned} &\varkappa = \frac{\tau_{12}\tau_{34}}{\tau_{13}\tau_{24}}, \quad 1 - \frac{1}{\varkappa} = \frac{\tau_{23}\tau_{14}}{\tau_{21}\tau_{34}}, \quad \frac{1}{1-\varkappa} = \frac{\tau_{31}\tau_{24}}{\tau_{32}\tau_{14}}, \\ &\frac{1}{\varkappa} = \frac{\tau_{13}\tau_{24}}{\tau_{12}\tau_{34}}, \quad \frac{\varkappa}{\varkappa - 1} = \frac{\tau_{21}\tau_{34}}{\tau_{23}\tau_{14}}, \quad 1 - \varkappa = \frac{\tau_{32}\tau_{14}}{\tau_{31}\tau_{24}}. \end{aligned}$$

Setzen wir nun

$$\psi = \sqrt{1 + 2\varphi^2(2\varkappa - 1) + \varphi^4},$$

so finden wir für die Koordinaten $uvw$ die Darstellungen

$$(9)\quad u = \sqrt{\frac{\tau_{31}}{\tau_{32}}} \cdot \frac{\psi}{1-\varphi^2}, \quad v = \frac{1+\varphi^2}{1-\varphi^2}\sqrt{\frac{\tau_{12}}{\tau_{23}}}, \quad w = \frac{2\varphi}{1-\varphi^2}\sqrt{\frac{\tau_{21}}{\tau_{24}}}.$$

Nebenbei bemerken wir, daß die Gleichung $\psi = 0$ in $\varphi$ die Wurzeln hat

$$(10)\qquad \pm(\sqrt{\varkappa'} \pm \mp i\sqrt{\varkappa}), \quad \varkappa' = 1 - \varkappa.$$

Um die Irrationalität auf die RIEMANNsche Normalform des Rationalitätsbereiches vom Geschlecht Null zu bringen, setzen wir

$$(11)\qquad \varphi^2 + \psi = 1 + \frac{2}{\delta}, \qquad (12)\quad 1 + \psi = \delta'\varphi.$$

Aus (11) folgt

$$1 + 2(2\varkappa - 1)\varphi^2 + \varphi^4 = 1 + \frac{4}{\delta} + \frac{4}{\delta^2} - 2\varphi^2 - \frac{4\varphi^2}{\delta} + \varphi^4,$$
$$\varphi^2\left(\varkappa + \frac{2}{\delta}\right) = \frac{1}{\delta}\left(1 + \frac{1}{\delta}\right),$$

Digitized by Google

$$(13)\quad \varphi^2 = \frac{1+\vartheta}{\vartheta(1+\varkappa\vartheta)},\quad 1-\varphi^2 = \frac{\varkappa\vartheta^2-1}{\vartheta(1+\varkappa\vartheta)},\quad 1+\varphi^2 = \frac{\varkappa\vartheta^2+2\vartheta+1}{\vartheta(1+\varkappa\vartheta)}.$$

Aus (12) ergibt sich dann

$$2+\frac{2}{\vartheta}-\varphi^2 = \vartheta'\varphi = 2+\frac{2}{\vartheta}-\frac{1+\vartheta}{\vartheta(1+\varkappa\vartheta)} = \frac{(1+\vartheta)(2\varkappa\vartheta+1)}{\vartheta(1+\varkappa\vartheta)},$$

$$(14)\quad \vartheta' = \frac{(1+\vartheta)(1+2\varkappa\vartheta)}{\vartheta(1+\varkappa\vartheta)}\frac{\sqrt{\vartheta(1+\varkappa\vartheta)}}{1+\vartheta} = \frac{(1+\vartheta)(1+2\varkappa\vartheta)}{\vartheta},$$

wo

$$(15)\quad \vartheta = \sqrt{\vartheta(1+\vartheta)(1+\varkappa\vartheta)}$$

ist.

Aus (11) und (12) geht hervor, daß $\varphi$ und $\psi$ eindeutige Funktionen von $\vartheta$ und $\vartheta$ sind, und zwar ist

$$(16)\quad \psi = \frac{\varkappa\vartheta^2+2\varkappa\vartheta+1}{\vartheta(1+\varkappa\vartheta)},\quad \varphi = \frac{1+\vartheta}{\vartheta}.$$

Umgekehrt sind $\vartheta$ und $\vartheta$ eindeutige Funktionen von $\varphi$ und $\psi$, und zwar ist

$$(17)\quad \vartheta = \frac{2}{\varphi^2+\psi-1},\quad \vartheta = \frac{\varphi}{1+\psi}\cdot\frac{1+\varphi^2+\psi}{1-\varphi^2-\psi}\cdot\frac{2\varkappa-1+\varphi^2+\psi}{1-\varphi^2-\psi}.$$

Aus den so gewonnenen Formeln erhalten wir die Parameterdarstellung der Koordinaten

$$(18)\quad \begin{aligned} X_1 &= \varkappa\vartheta-1,\quad X_2 = \sqrt{\tfrac{\tau_{21}}{\tau_{23}}}(\varkappa(\vartheta+1)^2+1-\varkappa),\\ X_3 &= \sqrt{\tfrac{\tau_{13}}{\tau_{23}}}\left(\tfrac{1}{\varkappa}(1+\varkappa\vartheta)^2+1-\tfrac{1}{\varkappa}\right),\quad X_4 = 2\sqrt{\tfrac{\tau_{21}}{\tau_{24}}}\,\vartheta. \end{aligned}$$

Sowohl für $\vartheta = 0$ als auch für $\vartheta = \infty$ wird

$$u^2 = \tau_{21} : \tau_{23},\quad v^2 = \tau_{13} : \tau_{24},\quad w = 0.$$

Setzt man diese Werte in (1) und (2) ein, so werden diese Gleichungen befriedigt, was eine beiläufige Kontrolle der Rechnung ergibt. Für $\vartheta = -1$ gelangt man zu denselben Ausdrücken für $u^2$, $v^2$, $w$.

§ 3. *Der Irrationalitätsbereich wird durch die Quadratwurzel der Diskriminante des Flächenbüschels bestimmt.* Das Doppelverhältnis $\varkappa$ bevorzugt eine gewisse Anordnung der Indices der $\tau$ und $\tau'$, es ist eine irrationale Invariante der Diskriminante des Flächenbüschels. Um uns davon zu befreien, führen wir einen neuen Parameter ein durch die Gleichungen

$$(19)\quad \vartheta = \frac{\tau_{42}}{\tau_{21}}\frac{\tau_1+\lambda\tau_1'}{\tau_4+\lambda\tau_4'},\quad 1+\vartheta = \frac{\tau_{41}}{\tau_{21}}\frac{\tau_2+\lambda\tau_2'}{\tau_4+\lambda\tau_4'},\quad 1+\varkappa\vartheta = \frac{\tau_{41}}{\tau_{21}}\frac{\tau_3+\lambda\tau_3'}{\tau_4+\lambda\tau_4'},$$

Digitized by Google

und setzen außerdem

$$(20) \qquad \varrho = \sqrt{\tau_1 + \lambda\tau_1' \cdot \tau_2 + \lambda\tau_2' \cdot \tau_3 + \lambda\tau_3' \cdot \tau_4 + \lambda\tau_4'}.$$

Durch diese Substitution erhalten wir

$$(21) \qquad \xi = \frac{\tau_{41}}{\tau_{21}} \sqrt{\frac{\tau_{42}}{\tau_{31}}} \cdot \frac{\varrho}{(\tau_4 + \lambda\tau_4')^2}.$$

Setzt man diese Werte in die Gleichungen (18) ein, so ergibt sich, wenn $\mu$ ein willkürlicher Faktor ist

$$(22) \qquad \mu X_1 = \frac{1}{\tau_{14}} \sqrt{\frac{1}{\tau_{21}\tau_{13}}} ((\tau_{24}\tau_{34}(\tau_1 + \lambda\tau_1')^2 - \tau_{12}\tau_{13}(\tau_4 + \lambda\tau_4')^2),$$

$$(23) \qquad \mu X_2 = \frac{1}{\tau_{24}} \sqrt{\frac{1}{\tau_{32}\tau_{21}}} (\tau_{34}\tau_{14}(\tau_2 + \lambda\tau_2')^2 - \tau_{23}\tau_{21}(\tau_4 + \lambda\tau_4')^2),$$

$$(24) \qquad \mu X_3 = \frac{1}{\tau_{34}} \sqrt{\frac{1}{\tau_{13}\tau_{32}}} (\tau_{14}\tau_{24}(\tau_3 + \lambda\tau_3')^2 - \tau_{31}\tau_{32}(\tau_4 + \lambda\tau_4')^2),$$

$$(25) \qquad \mu X_4 = 2\varrho = 2\sqrt{\tau_1 + \lambda\tau_1' \cdot \tau_2 + \lambda\tau_2' \cdot \tau_3 + \lambda\tau_3' \cdot \tau_4 + \lambda\tau_4'}.$$

Die drei ersten Gleichungen gehen durch zyklische Vertauschung der drei ersten Indices ineinander über. Setzen wir zur Kontrolle $\lambda = -\tau_4 : \lambda\tau_4'$, so folgt $X_4 = 0$,

$$X_1 : X_2 : X_3 = \sqrt{\frac{1}{\tau_{21}\tau_{13}}} : \sqrt{\frac{1}{\tau_{32}\tau_{21}}} : \sqrt{\frac{1}{\tau_{13}\tau_{32}}}$$
$$= \sqrt{\tau_{23}} : \sqrt{\tau_{31}} : \sqrt{\tau_{12}},$$

wodurch die Gleichungen (1) und (2) befriedigt werden.

§ 4. *Dem Rationalitätsbereich wird die* WEIERSTRASS*'sche Irrationalität adjungiert.* In seiner Inauguraldissertation über Flächenbüschel zweiter Ordnung (Berlin 1872) hat Herr KILLING den Büschel in der Form dargestellt

$$K_0 s - F_0 = 0,$$

wo

$$K_0 = (e_\mu - e_\lambda)\xi_\lambda^2 + (e_\nu - e_\lambda)\xi_\mu^2 + (e_\lambda - e_\mu)\xi_\nu^2,$$

$$(26) \qquad F_0 = e_\lambda(e_\mu - e_\nu)\xi_\lambda^2 + e_\mu(e_\nu - e_\lambda)\xi_\mu^2 + e_\nu(e_\lambda - e_\nu)\xi_\nu^2$$
$$- (e_\mu - e_\nu)(e_\nu - e_\lambda)(e_\lambda - e_\mu)\xi_0^2,$$
$$e_\lambda + e_\mu + e_\nu = 0,$$

und $s$ der Parameter ist. Versteht man unter $h$ einen Proportionalitätsfaktor, so findet Herr KILLING die Darstellung

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
h\xi_0 &= \sqrt{4(s-e_\lambda)(s-e_\mu)(s-e_\nu)}.\\
h\xi_\lambda &= s^3 - 2e_\lambda s - e_\lambda^2 - e_\mu e_\nu,\\
h\xi_\mu &= s^3 - 2e_\mu s - e_\mu^2 - e_\nu e_\lambda,\\
k\xi_\nu^2 &= s^3 - 2e_\nu s - e_\nu^2 - e_\lambda e_\nu.
\end{aligned}
\tag{27}
$$

Wir können zur WEIERSTRASS'schen Irrationalität dadurch gelangen, daß wir den Büschel in der Form darstellen

$$
\begin{aligned}
F &+ (\lambda + c)F'' = 0,\\
F &= \tau_1 X_1^2 + \tau_2 X_2^2 + \tau_3 X_3^2 + \tau_4 X_4^2,\\
F'' &= \tau_{41} X_1^2 + \tau_{42} X_2^2 + \tau_{43} X_3^2 = 0.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Dann wird die Büscheldiskriminante

$$\varrho^2 = \tau_4(\tau_1 + \tau_{41}(\lambda + c))(\tau_2 + \tau_{42}(\lambda + c))(\tau_3 + \tau_{43}(\lambda + c)) \tag{29}$$

vom dritten Grade, und man kann $c$ so einrichten, daß das $\lambda^2$ proportionale Glied darin fehlt. Es bedarf dann nur noch der Absonderung eines konstanten Faktors, um zur WEIERSTRASS'schen Normalform zu gelangen.

Sollen jedoch $g_2 g_3$ die Invarianten der Form

$$
\begin{aligned}
&\tau_1 + \lambda\tau_1' \cdot \tau_2 + \lambda\tau_2' \cdot \tau_3 + \lambda\tau_3' \cdot \tau_4 + \lambda\tau_4'\\
&= a_0\lambda^4 + 4a_1\lambda^3 + 6a_2\lambda^2 + 4a_3\lambda + a_4
\end{aligned}
$$

sein, so muß man eine spezielle RIEMANNsche Transformation[1]) vornehmen, die auch von WEIERSTRASS angewandt worden ist. Man muß setzen

$$\lambda' = a_0\lambda^2 + 2a_1\lambda + c + \sqrt{a_0}\varrho.$$

wodurch die Irrationalität auf die Quadratwurzel eines Ausdrucks dritten Grades in $\lambda'$ reduziert wird. Dabei läßt sich die willkürliche Konstante $c$ so einrichten, daß das $\lambda'^2$ proportionale Glied fehlt. Diese etwas umständliche Rechnung wollen wir jedoch nicht ausführen. Wir schreiten vielmehr zur Aufsuchung einer Parameterdarstellung, die außer der Quadratwurzel der Diskriminante in den Konstanten keine Irrationalität enthält, wenn das Bekanntsein eines reellen Punktes vorausgesetzt wird.

---

1) RIEMANN: Theorie der ABELschen Funktionen Crelles Journal B. 54 § 13. Vgl. auch meinen Abriß einer Theorie der komplexen und der Thetafunktionen (Halle 1890) p. 133.

Digitized by Google

§ 5. *Bezeichnungen.* Es wurde in der Einleitung bemerkt, daß, besondere Fälle ausgenommen, sich auf rationalem Wege ein Tetraeder finden läßt, dessen Ecken gleichzeitig auf einer Fläche zweiter Ordnung liegen, einer Raumkurve vierter Ordnung erster Spezies eingeschrieben ist, wenn ein reeller Punkt gegeben ist. Die Seitenflächen desselben seien $X_1 = 0$, $X_2 = 0$, $X_3 = 0$, $X_4 = 0$, und es werde $X_1 : X_4 = x$, $X_2 : X_4 = y$, $X_3 : X_4 = z$ gesetzt. Dann dürfen die Gleichungen der beiden die Raumkurven bestimmenden Flächen in der Form vorausgesetzt werden

$$(30)\qquad \begin{aligned} F &= \sigma_1 yz + \sigma_2 zx + \sigma_3 xy + \sigma_4 x + \sigma_5 y + \sigma_6 z = 0,\\ F' &= \sigma_1' yz + \sigma_2' zx + \sigma_3' xy + \sigma_4' x + \sigma_5' y + \sigma_6' z = 0, \end{aligned}$$

worin die $\sigma\sigma'$ rationale Funktionen der Koeffizienten der ursprünglich gegebenen Flächengleichungen sind. Es werde

$$\sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha \sigma_\beta' - \sigma_\alpha' \sigma_\beta$$

gesetzt, so daß

$$\sigma_\alpha \sigma_{\beta\gamma} + \sigma_\beta \sigma_{\gamma\alpha} + \sigma_\gamma \sigma_{\alpha\beta} = \sigma_\alpha' \sigma_{\beta\gamma} + \sigma_\beta' \sigma_{\gamma\alpha} + \sigma_\gamma' \sigma_{\alpha\beta} = 0,$$
$$\omega_\alpha \sigma_{\beta\gamma} + \omega_\beta \sigma_{\gamma\alpha} + \omega_\gamma \sigma_{\alpha\beta} = 0$$

ist, wenn

$$(31)\qquad \omega_\alpha = \sigma_\alpha + \lambda \sigma_\alpha'$$

gesetzt wird. Die Diskriminante des Büschels $F + \lambda F'$ werde mit $\varrho^2$ bezeichnet, so daß

$$(32)\qquad \varrho^2 = \begin{vmatrix} 0, & \omega_3, & \omega_2, & \omega_4 \\ \omega_3, & 0, & \omega_1, & \omega_5 \\ \omega_2, & \omega_1, & 0, & \omega_6 \\ \omega_1, & \omega_5, & \omega_6, & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (\omega_2\omega_5 + \omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4)^2 - 4\omega_3\omega_3\omega_5\omega_6$$
$$= (\omega_1\omega_4 + \omega_3\omega_3 - \omega_2\omega_5)^2 - 4\omega_1\omega_3\omega_4\omega_6$$
$$= (\omega_1\omega_4 + \omega_3\omega_5 - \omega_3\omega_6)^2 - 4\omega_1\omega_2\omega_4\omega_5$$

ist. Es wird hier angenommen, daß die Gleichung $\varrho^2 = 0$ vier *verschiedene* Wurzeln in $\lambda$ habe. Wir führen noch die Abkürzungen ein:

$$(33)\qquad \sigma_0 = \sigma_1\sigma_{64}\sigma_{45} + \sigma_2\sigma_{45}\sigma_{56} + \sigma_3\sigma_{56}\sigma_{64},$$
$$(34)\qquad \sigma_0' = \sigma_1'\sigma_{64}\sigma_{45} + \sigma_2'\sigma_{45}\sigma_{56} + \sigma_3'\sigma_{56}\sigma_{64},$$

Digitized by Google

$$\sigma_\infty = \sigma_4\sigma_{31}\sigma_{12} + \sigma_5\sigma_{12}\sigma_{23} + \sigma_6\sigma_{23}\sigma_{31},$$
(35)
$$\sigma_\infty = \sigma_4'\sigma_{31}\sigma_{12} + \sigma_5'\sigma_{12}\sigma_{23} + \sigma_6'\sigma_{23}\sigma_{31},$$

Formen, die uns nachher begegnen werden.

§ 6. *Gleichungen zwischen den Koordinaten und dem Parameter* $\lambda$. Die beiden Ebenen

$$\sigma_4 x + \sigma_5 y + \sigma_6 z = 0, \quad \sigma_4' x + \sigma_5' y + \sigma_6' z = 0$$

bestimmen die Tangente im Koordinatenanfange und

$$T_\lambda = \omega_4 x + \omega_5 y + \omega_6 z = 0$$

ist für jedes $\lambda$ eine Tangentialebene der Kurve und schneidet sie noch in zwei Punkten, deren Koordinaten durch $\lambda$ bestimmt sind. Eliminiert man aus $F = 0$, $F' = 0$, $T_\lambda = 0$ bez. $xyz$, so erhält man das System von Gleichungen

(36) $$y^2\sigma_3\omega_5 + yz(\sigma_3\omega_5 + \sigma_3\omega_6 - \sigma_1\omega_4) + z^2\sigma_2\omega_6 + \lambda(y\sigma_{45} + z\sigma_{46}) = 0$$

(36′) $$y^2\sigma_3'\omega_5 + yz(\sigma_1'\omega_5 + \sigma_3'\omega_6 - \sigma_1'\omega_4) + z^2\sigma_2'\omega_6 + y\sigma_{54} + z\sigma_{64} = 0$$

(37) $$z^2\sigma_1\omega_6 + zx(\sigma_3\omega_6 + \sigma_1\omega_4 - \sigma_2\omega_5) + x^2\sigma_3\omega_4 + \lambda(z\sigma_{56} + x\sigma_{54}) = 0$$

(37′) $$z^2\sigma_1'\omega_6 + zx(\sigma_3'\omega_6 + \sigma_1'\omega_4 - \sigma_2'\omega_5) + x^2\sigma_3'\omega_4 + z\sigma_{65} + x\sigma_{45} = 0,$$

(38) $$x^2\sigma_2\omega_4 + xy(\sigma_1\omega_4 + \sigma_2\omega_5 - \sigma_3\omega_6) + y^2\sigma_1\omega_5 + \lambda(x\sigma_{46} + y\sigma_{56}) = 0,$$

(38′) $$x^2\sigma_2'\omega_4 + xy(\sigma_1'\omega_4 + \sigma_2'\omega_5 - \sigma_3'\omega_6) + y^2\sigma_1'\omega_5 + x\sigma_{64} + y\sigma_{65} = 0.$$

Die Kombination jedes Paares dieser Gleichungen ergibt weiter:

(39) $$y^2\omega_3\omega_5 + yz(\omega_3\omega_5 + \omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) + z^2\omega_2\omega_6 = 0,$$

(40) $$z^2\omega_1\omega_6 + zx(\omega_3\omega_6 + \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5) + x^2\omega_3\omega_4 = 0,$$

(41) $$x^2\omega_2\omega_4 + xy(\omega_2\omega_4 + \omega_2\omega_5 - \omega_3\omega_6) + y^2\omega_1\omega_5 = 0,$$

oder, wenn $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, $\varepsilon_3 \pm 1$ bedeuten, durch Auflösung

(42) $$\frac{y}{z} = \frac{\omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \omega_3\omega_6 + \varepsilon_1\varrho}{2\omega_3\omega_5},$$

(42′) $$\frac{z}{y} = \frac{\omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \omega_3\omega_6 - \varepsilon_1\varrho}{2\omega_2\omega_6},$$



Digitized by Google

$$\frac{z}{x} = \frac{\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6 + \varepsilon_2\varrho}{2\omega_1\omega_6}, \tag{43}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6 - \varepsilon_2\varrho}{2\omega_3\omega_4}, \tag{43'}$$

$$\frac{x}{y} = \frac{\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 + \varepsilon_3\varrho}{2\omega_2\omega_4}, \tag{44}$$

$$\frac{y}{x} = \frac{\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \varepsilon_3\varrho}{2\omega_1\omega_5}. \tag{44'}$$

Setzt man diese Ausdrücke in $T_\lambda$ ein, so findet sich, daß $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3$ sein muß, weshalb wir diese Zahlen durch $\varepsilon = \pm 1$ ersetzen können.

§ 7. *Die Parameterwerte im Koordinatenanfang und in den unendlich fernen Punkten.* In jeder Ebene liegen vier Punkte der Kurve. Die Koordinatenebenen machen davon insofern eine Ausnahme, als z. B. die Gleichung $x = 0$ nur *zwei* Stellen des Bereiches $\varrho$, $\lambda$ liefert. Aus den Gleichungen des § 5 $F = 0$ $F' = 0$ geht nämlich unmittelbar hervor, daß die unendlich fernen Punkte der Koordinatenachsen der Kurve angehören. Also in der Ebene $x = 0$ liegen zwei unendlich ferne Punkte, diese liegen aber ebensogut in der Ebene $x = c$, wo $c$ willkürlich endlich ist. Es braucht demnach dort $x$ nicht Null zu sein.

Fragen wir zuerst, für welche Wertsysteme $\varrho$, $\lambda$, $x = 0$ wird, so sind die Gleichungen zu befriedigen

$$\begin{aligned} y\omega_5 + z\omega_6 &= 0, \\ \sigma_1 yz + \sigma_5 y + \sigma_6 z &= 0, \\ \sigma_1' yz + \sigma_5' y + \sigma_6' z &= 0. \end{aligned} \tag{45}$$

Ihnen genügt für jedes $\lambda$ der Punkt $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Werden aber die Koordinaten durch $\varrho$ und $\lambda$ dargestellt, so erhält man für jedes $\lambda$ die beiden Punkte, die die Ebene $T_\lambda = 0$ *neben* dem Koordinatenanfange noch mit der Kurve gemein hat. Der Koordinatenanfang selbst wird für dasjenige $\lambda$ erhalten, welches $T_\lambda$ zur Schmiegungsebene macht, für welche $T_\lambda$ Tangentialebene an das Hyperboloid des Büschels $F + \lambda F' = 0$ ist, das die Gerade

$$\sigma_4 x + \sigma_5 y + \sigma_6 z = 0, \quad \sigma_4' x + \sigma_5' y + \sigma_6' z = 0$$
$$x : y : z = \sigma_{56} : \sigma_{64} : \sigma_{45}$$

enthält. Es hat die Gleichung

$$F + \lambda_0 F' = 0,$$

Digitized by Google

wenn $\lambda_0$ aus der Gleichung

$$(\sigma_9 + \lambda_0\sigma_9')\sigma_{64}\sigma_{45} + (\sigma_2 + \lambda_0\sigma_2')\sigma_{45}\sigma_{56} + (\sigma_3 + \lambda_0\sigma_3)\sigma_{56}\sigma_{64} = 0$$

bestimmt wird. Es ist demnach in der Bezeichnung der Gleichung (34)

$$\lambda_0 = -\sigma_0 : \sigma_0'. \tag{46}$$

Aus (42) folgt weiter

$$\frac{\sigma_{65}}{\sigma_{40}} = \frac{\sigma_{10}\sigma_{40} - \sigma_{20}\sigma_{50} - \sigma_{30}\sigma_{60}}{2\sigma_{30}\sigma_{50}} + \frac{\varepsilon\varrho_0\sigma_0'\sigma_0'}{2\sigma_{30}\sigma_{50}},$$

wodurch $\varepsilon\varrho_0$ eindeutig (rational) bestimmt ist. Das Wertepaar $-\varepsilon\varrho_0$, $\lambda_0$ gehört zu dem Punkte, den die Schmiegungsebene neben ihrem Berührungspunkte noch mit der Kurve gemein hat.

Um den andern Schnittpunkt $\lambda = \lambda_1$, den die Ebene $x = 0$ noch mit der Kurve gemein hat, zu finden, ersetzen wir das Gleichungssystem (45) durch das äquivalente

$$\begin{aligned} \omega_5 y + \omega_6 z &= 0, \\ \sigma_{51} y + \sigma_{61} z &= 0, \\ \sigma_1 yz + \sigma_5 y + \sigma_6 z &= 0, \end{aligned} \tag{47}$$

das nur erfüllbar ist, wenn $\lambda = \lambda_1 = -\sigma_1 : \sigma_1'$ ist. Da in diesem Falle $y : z = -\sigma_{61} : \sigma_{51}$, also nicht Null ist, so folgt aus (43′) für $\varepsilon\varrho$ der Wert

$$\varepsilon\varrho_1\sigma_1'\sigma_1' = \sigma_{21}\sigma_{51} - \sigma_{31}\sigma_{61}. \tag{48}$$

Durch zyklische Vertauschung der Indices 1, 2, 3 bez. 4, 5, 6 findet man die Parameterwerte, die zu den in der Ebene $y = 0$, $z = 0$ liegenden Punkten gehören und vom Koordinatenanfang verschieden sind. Sie sind

$$\lambda_2 = -\sigma_2 : \sigma_2', \quad \sigma_2'\sigma_2'\varepsilon\varrho_2 = \sigma_{32}\sigma_{62} - \sigma_{12}\sigma_{42}, \tag{49}$$

$$\lambda_3 = -\sigma_3 : \sigma_3', \quad \sigma_3'\sigma_3'\varepsilon\varrho_3 = \sigma_{13}\sigma_{43} - \sigma_{23}\sigma_{53}. \tag{50}$$

Es werde

$$\lambda_4 = -\sigma_4 : \sigma_4', \quad \lambda_5 = -\sigma_5 : \sigma_5', \quad \lambda_6 = -\sigma_6 : \sigma_6' \tag{51}$$

gesetzt, so folgt aus den Gleichungen (42) bis (44) mit $T_\lambda = 0$ das System von Formeln:

$$\begin{aligned} x = \infty;\ \lambda = \lambda_4, &\quad \sigma_4'\sigma_4'\varepsilon\varrho_4 = \sigma_{34}\sigma_{64} - \sigma_{24}\sigma_{54}, \\ y = \infty;\ \lambda = \lambda_5, &\quad \sigma_5'\sigma_5'\varepsilon\varrho_5 = \sigma_{15}\sigma_{45} - \sigma_{35}\sigma_{65}, \\ z = \infty;\ \lambda = \lambda_6, &\quad \sigma_6'\sigma_6'\varepsilon\varrho_6 = \sigma_{26}\sigma_{56} - \sigma_{16}\sigma_{46}. \end{aligned} \tag{51′}$$



Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&x = \infty; \quad y : z = \sigma_{64} : \sigma_{45},\\
&y = \infty; \quad z : x = \sigma_{45} : \sigma_{56},\\
&z = \infty; \quad x : y = \sigma_{56} : \sigma_{64}.
\end{aligned} \tag{52}
$$

Es erübrigt noch den Parameterwert $\lambda_\infty$ des vierten unendlich fernen Punktes auszurechnen. In ihm sind die Gleichungen zu befriedigen

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_4 + \lambda_\infty \sigma_4')x + (\sigma_5 + \lambda_\infty \sigma_5')y + (\sigma_6 + \lambda\sigma_6')z = 0,\\
&\sigma_1 yz + \sigma_2 zx + \sigma_3 xy = 0,\\
&\sigma_1' yz + \sigma_2' zx + \sigma_3' xy = 0.
\end{aligned} \tag{53}
$$

Aus den beiden letzten folgt

$$
\begin{aligned}
&yz : zx : xy = \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} = \sigma_{23} : \sigma_{31} : \sigma_{12}\\
&x = t\sigma_{31}\sigma_{12}, \quad y = t\sigma_{12}\sigma_{23}, \quad z = t\sigma_{23}\sigma_{31},
\end{aligned} \tag{54}
$$

wenn $t$ ein Proportionalitätsfaktor ist. Dies in die erste der Gleichungen (53) eingesetzt gibt

$$(\sigma_4 + \lambda_\infty \sigma_4')\sigma_{31}\sigma_{12} + (\sigma_5 + \lambda_\infty \sigma_5')\sigma_{12}\sigma_{23} + (\sigma_6 + \lambda_\infty \sigma_6')\sigma_{23}\sigma_{31} = 0$$

oder in der Bezeichnung der Gleichung (35)

$$\lambda_\infty = -\sigma_\infty : \sigma_\infty'. \tag{55}$$

Aus (43) folgt

$$\frac{\sigma_{12}}{\sigma_{23}} = \frac{\sigma_{1\infty}\sigma_{4\infty} - \sigma_{2\infty}\sigma_{5\infty} - \sigma_{3\infty}\sigma_{6\infty}}{2\sigma_{3\infty}\sigma_{5\infty}} + \frac{\varepsilon\varrho_\infty \sigma_\infty' \sigma_\infty'}{2\sigma_{3\infty}\sigma_{5\infty}}, \tag{56}$$

wodurch $\varepsilon\varrho_\infty$ eindeutig (rational) bestimmt ist.

Wollte man, daß einer der unendlich fernen Punkte der Koordinatenachsen der durch die Schmiegungsebene des Koordinatenanfangs bestimmte Punkt sei, so würden zwischen den $\sigma\sigma'$ noch Bedingungen stattfinden müssen. Diese Zahlen sind aber hier freigelassen worden.

§ 6. *Darstellung der Koordinaten der Kurve durch* $\varrho$ *und* $\lambda$. Wir wollen nun $x\ y\ z$ in den Formen darstellen

$$x = -\frac{f_1(\varrho, \lambda)}{f_{41}(\varrho, \lambda)}, \quad y = -\frac{f_2(\varrho, \lambda)}{f_{42}(\varrho, \lambda)}, \quad z = -\frac{f_3(\varrho, \lambda)}{f_{43}(\varrho, \lambda)}, \tag{57}$$

wo die $f$ ganze Funktionen von $\varrho$ und $\lambda$ sind. Es ist gleichgültig, ob wir für $\varepsilon + 1$ oder $-1$ setzen, man erhält in beiden Fällen alle Stellen des Bereiches $\varrho$, $\lambda$, wenn man $\lambda$ in der zu-

Digitized by Google

gehörigen RIEMANNschen Fläche stetig zu allen Punkten hinführt. Deshalb mag $\varepsilon = +1$ sein. Es genügt die Rechnungen für die Koordinate $x$ durchzuführen, weil die beiden andern Koordinaten durch zyklische Vertauschungen daraus gefunden werden. Hierzu bilden wir den Ausdruck

$$2\omega_1\omega_5\omega_6(\sigma_1' F - \sigma_1 F') : x = \tag{58}$$

$$2\omega_1\omega_5\omega_6\left(x\frac{z}{x}\sigma_{21} + x\frac{y}{x}\sigma_{31} + \sigma_{41} + \sigma_{51}\frac{y}{x} + \sigma_{61}\frac{z}{x}\right) = 0,$$

und setzen darin für $z:y$, $y:x$ die unter (43) und (44′) gefundenen Werte ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} &x\left(\begin{matrix}(\sigma_{21}\omega_5(\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6 + \varrho)\\ +\sigma_{31}\omega_6(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \varrho)\end{matrix}\right)\\ &+ 2\sigma_{21}\omega_1\omega_5\omega_6 + \sigma_{51}\omega_6(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \varrho)\\ &+ \sigma_{61}\omega_5(\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6 + \varrho)\\ &= xf_{41}(\varrho,\lambda) + f_1(\varrho,\lambda) = 0. \end{aligned} \tag{59}$$

Den Ausdruck $f_1(\varrho,\lambda)$ formen wir mittels (31) um. Nach diesen Gleichungen ist

$$\omega_6\sigma_{51} - \omega_5\sigma_{61} = \omega_1\sigma_{56},$$

woraus sich ergibt

$$f_1(\varrho,\lambda) = \tag{60}$$

$$\omega_1(2\sigma_{41}\omega_5\omega_6 - \sigma_{51}\omega_6\omega_4 - \sigma_{61}\omega_4\omega_5 + (\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \varrho)\sigma_{56}),$$

so daß also $f_1(\varrho,\lambda)$ den Faktor $\omega_1$ hat. Es ergibt sich aber aus dieser Form auch noch, daß für einen der zugehörigen Werte $\varrho$ selbst $f_1(\varrho,\lambda):\omega_1$ für $\lambda = \lambda_1$ verschwindet. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} &2\sigma_{41}\omega_5\omega_6 - \sigma_{51}\omega_6\omega_4 - \sigma_{61}\omega_4\omega_5 =\\ &\omega_6(\sigma_{41}\omega_5 + \sigma_{15}\omega_4) + \omega_5(\sigma_{41}\omega_6 + \sigma_{16}\omega_4)\\ &= \omega_1\omega_5\sigma_{46} + \omega_1\omega_6\sigma_{45} \end{aligned}$$

woraus für $f_1(\varrho,\lambda)$ die neue Form fließt:

$$f_1(\varrho,\lambda) = \omega_1(\omega_1\omega_5\sigma_{46} + \omega_1\omega_6\sigma_{45} + (\omega_3\omega_6 - \omega_2\omega_5 - \varrho)\sigma_{56}), \tag{60′}$$

aus der man das Verschwinden der Klammer an der Stelle $\lambda_1, \varrho_1$ sofort erkennt. Um die Nullstellen dieser Funktion sämtlich zu finden, bilden wir den Ausdruck

$$f_1(\varrho,\lambda)f_1(-\varrho,\lambda) = \tag{61}$$

$$\begin{aligned} &-4\omega_1^3\omega_5\omega_6(\omega_1\sigma_{46}\sigma_{54} + \omega_2\sigma_{54}\sigma_{65} + \omega_3\sigma_{65}\sigma_{46})\\ &= -\omega_0\omega_1^3\omega_5\omega_6. \end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Funktion $f_1(\varrho, \lambda)$ verschwindet demnach dreimal bei $\lambda_1$ und je einmal bei $\lambda_0 \lambda_5 \lambda_6$. — Die Nullstellen der Funktion

$$(62) \qquad f_{41}(\varrho, \lambda) = \varrho(\sigma_{21}\omega_5 + \sigma_{13}\omega_6)$$
$$+ \sigma_{21}\omega_5(\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6) + \sigma_{31}\omega_6(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5)$$

finden wir ebenfalls dadurch, daß wir $f_{41}(\varrho, \lambda) f_{41}(-\varrho, \lambda)$ bilden. Es ist

$$f_{41}(\varrho, \lambda) f_{41}(-\varrho, \lambda) =$$
$$\sigma_{21}^2(\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 + \omega_3\omega_6)^2\omega_5^2 + \sigma_{31}^2(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5)^2\omega_6^2$$
$$+ 2\sigma_{21}\sigma_{31}(\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5)\omega_5\omega_6$$
$$- \varrho^2(\sigma_{21}^2\omega_5^2 + \sigma_{31}^2\omega_6^2 - 2\sigma_{21}\sigma_{31}\omega_5\omega_6) =$$
$$4\sigma_{21}^2\omega_1\omega_3\omega_4\omega_6\omega_5^2 + 4\sigma_{31}^2\omega_1\omega_2\omega_4\omega_5\omega_6^2$$
$$+ 2\sigma_{21}\sigma_{31}(\omega_2\omega_4 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6)(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5)\omega_5\omega_6$$
$$+ \sigma_{21}\sigma_{31}\omega_5\omega_6((\omega_2\omega_4 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6)^2 + (\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5)^2$$
$$- 4\omega_1\omega_3\omega_4\omega_6 - 4\omega_1\omega_2\omega_4\omega_5)$$
$$= 4\sigma_{21}^2\omega_1\omega_3\omega_4\omega_6\omega_5^2 + 4\sigma_{31}^2\omega_1\omega_2\omega_4\omega_5\omega_6^2$$
$$+ \sigma_{21}\sigma_{31}\omega_5\omega_6(\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6 + \omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5)^2$$
$$- 4\sigma_{21}\sigma_{31}\omega_5\omega_6(\omega_1\omega_3\omega_4\omega_6 + \omega_1\omega_2\omega_4\omega_5)$$
$$= 4\omega_1\omega_4\omega_5\omega_6(\sigma_{21}^2\omega_3\omega_5 + \sigma_{13}^2\omega_2\omega_6 + \sigma_{31}\sigma_{21}\omega_1\omega_4$$
$$- \sigma_{21}\sigma_{31}(\omega_3\omega_6 + \omega_2\omega_5),$$

$$(63) \qquad f_{41}(\varrho, \lambda) f_{41}(-\varrho, \lambda) =$$
$$4\omega_1\omega_4\omega_5\omega_6(\sigma_{21}^2\omega_3\omega_5 + \sigma_{21}\sigma_{31}(\omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \omega_3\omega_6) + \sigma_{31}^2\omega_2\omega_6)$$
$$= 4\omega_1^2\omega_4\omega_5\omega_6(\omega_4\sigma_{21}\sigma_{31} + \omega_5\sigma_{32}\sigma_{12} + \omega_6\sigma_{13}\sigma_{24})$$
$$= -4\omega_1^2\omega_4\omega_5\omega_6,$$

Es wird also $f_{41}$ zweimal über $\lambda_1$ und je einmal über $\lambda_4\lambda_5\lambda_6$ Null. — Für die Koordinaten ergeben sich nun die Darstellungen

$$(64) \qquad x = -f_1(\varrho, \lambda) : f_{41}(\varrho, \lambda) =$$
$$\frac{-\omega_1(\omega_1\omega_5\sigma_{46} + \omega_1\omega_6\sigma_{45} + (\omega_2\omega_6 - \omega_2\omega_5)\sigma_{56} - \varrho\sigma_{56})}{\sigma_{21}\omega_5(\omega_2\omega_5 - \omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6) + \sigma_{31}\omega_6(\omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5) + \varrho\sigma_{21}\omega_5 + \sigma_{13}\omega_6)}$$

$$(65) \qquad y = -f_2(\varrho, \lambda) : f_{42}(\varrho, \lambda) =$$
$$\frac{-\omega_2(\omega_3\omega_6\sigma_{54} + \omega_3\omega_4\sigma_{56} + (\omega_1\omega_4 - \omega_3\omega_6)\sigma_{64} - \varrho\sigma_{64})}{\sigma_{32}\omega_6(\omega_2\omega_6 - \omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5) + \sigma_{12}\omega_4(\omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \omega_3\omega_6) - \varrho\sigma_{32}\omega_6 + \sigma_{21}\omega_4)}$$

$$(66) \qquad z = -f_3(\varrho, \lambda) : f_{43}(\varrho, \lambda) =$$
$$\frac{-\omega_3(\omega_3\omega_4\sigma_{65} + \omega_3\omega_5\sigma_{64} - (\omega_2\omega_6 - \omega_1\omega_4)\sigma_{45} - \varrho\sigma_{45}}{\sigma_{13}\omega_4(\omega_1\omega_4 - \omega_2\omega_5 - \omega_3\omega_6) + \sigma_{23}\omega_5(\omega_2\omega_5 - \omega_3\omega_6 - \omega_1\omega_4) - \varrho(\sigma_{13}\omega_4 + \sigma_{23}\omega_5)}.$$

Digitized by Google

Die Koordinaten haben je eine gemeinsame Nullstelle und je eine gemeinsame Unendlichkeitsstelle.

§ 7. *Andere Form der Koordinatendarstellung. Anzahl der Kurvenzüge.* Wir haben das Ziel, die Koordinaten rational in den Flächenkoeffizienten und in $\varrho$ und $\lambda$ darzustellen, erreicht. Da die Nullstellen und Unendlichkeitsstellen der Koordinaten bekannt sind, so kann man durch diese Daten die Koordinaten durch $\varrho\lambda$ so darstellen, daß die Nenner rational sind. Man kann nach bekannten Prinzipien diese Formen sofort anschreiben, nämlich

$$(67)\qquad x\omega_4\omega_\infty = c_1 \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \varrho \\ 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \varrho_1 \\ 1 & \lambda_4 & \lambda_4^2 & -\varrho_4 \\ 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \varrho_0 \end{vmatrix} = \frac{X_1}{X_4},$$

$$(68)\qquad y\omega_5\omega_\infty = c_2 \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \varrho \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \varrho_2 \\ 1 & \lambda_5 & \lambda_5^2 & -\varrho_5 \\ 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \varrho_0 \end{vmatrix} = \frac{X_2}{X_4},$$

$$(69)\qquad z\omega_6\omega_\infty = c_3 \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \varrho \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 & \varrho_3 \\ 1 & \lambda_6 & \lambda_6^2 & -\varrho_6 \\ 1 & \lambda_0 & \lambda_0^2 & \varrho_0 \end{vmatrix} = \frac{X_3}{X_4},$$

und es lassen sich die konstanten Faktoren $c_1 c_2 c_3$ z. B. durch Spezialisierung von $\lambda$ bestimmen, eine Rechnung, die ich nicht ausführen will.

Da hier ein Punkt der Kurve als reell vorausgesetzt wurde, so besitzt dieselbe mindestens einen reellen Zug. Läßt man $\lambda$ von $-\infty$ bis $+\infty$ laufen und gibt $\varrho$ beide zugehörige Werte, so erhält man alle reellen Punkte der Kurve. Hat die Gleichung $\varrho^2 = 0$ keine reellen Wurzeln, so daß $\varrho^2$ sein Zeichen nicht wechseln kann, wenn $\lambda$ von $-\infty$ bis $+\infty$ läuft, so können die beiden Züge, die den beiden verschiedenen $\varrho$ angehören, nicht zusammenhängen, die Kurve besteht aus *zwei* getrennten Zügen.

Hat die Gleichung $\varrho^2 = 0$ vier reelle Wurzeln, so gibt es zwei getrennte Intervalle für $\lambda$, in denen $\varrho$ reell ist, zwei andere, in denen $\varrho$ imaginär ist. Den beiden Intervallen, in denen $\varrho$ reell ist, entsprechen *zwei* getrennte reelle Züge der Kurve.

Digitized by Google

Denn durch stetige reelle Änderung von $\lambda$ kann man nicht aus dem einen Intervall in das andere gelangen, ohne daß $\varrho$ imaginär würde.

Hat die Gleichung $\varrho^2 = 0$ zwei reelle und zwei komplexe Wurzeln, so gibt es nur ein zusammenhängendes Intervall für $\lambda$, in dem $\varrho$ reell ist. An den Enden dieses Intervalles kann man $\lambda$ rückkehren und $\varrho$ sein Zeichen wechseln lassen, so daß man einen und nur einen zusammenhängenden reellen Zug erhält.

§ 8. *Zyklisch symmetrische Form der Größe* $\varrho_0$. Die Funktionen $f_1(\varrho, \lambda) : \omega_1 \sigma_{56}$, $f_2(\varrho, \lambda) : \omega_2 \sigma_{64}$, $f_3(\varrho, \lambda) : \omega_3 \sigma_{45}$ verschwinden gleichzeitig für $\lambda = \lambda_0$, $\varrho = \varrho_0$. Daraus folgt durch Addition dieser drei Ausdrücke

$$3\varrho_0\sigma_0'\sigma_0' = \sigma_{10}\frac{(\sigma_{50}\sigma_{40} + \sigma_{60}\sigma_{45})}{\sigma_{56}} + \sigma_{20}\frac{(\sigma_{60}\sigma_{54} + \sigma_{40}\sigma_{56})}{\sigma_{64}} + \sigma_{30}\frac{(\sigma_{40}\sigma_{65} + \sigma_{50}\sigma_{64})}{\sigma_{45}}. \tag{70}$$

Diese Form ändert sich nicht, wenn man die Indices 1, 2, 3 bez. 4, 5, 6 gleichzeitig zyklisch vertauscht. Man kann sie noch von den Größen $\sigma_{10}\sigma_{20}\sigma_{30}$ leicht befreien, denn es ist

$$\begin{aligned} \sigma_{10} &= \sigma_{56}(\sigma_{21}\sigma_{45} + \sigma_{31}\sigma_{64}) \\ \sigma_{20} &= \sigma_{64}(\sigma_{32}\sigma_{56} + \sigma_{12}\sigma_{45}) \\ \sigma_{30} &= \sigma_{45}(\sigma_{13}\sigma_{64} + \sigma_{23}\sigma_{50}) \end{aligned} \tag{71}$$

Dies in (70) eingesetzt gibt

$$\begin{aligned} 3\varrho_0\sigma_0'\sigma_0' = {} & \sigma_{50}\sigma_{21}\sigma_{45}\sigma_{46} + \sigma_{50}\sigma_{31}\sigma_{64}\sigma_{46} + \sigma_{60}\sigma_{21}\sigma_{45}\sigma_{45} + \sigma_{60}\sigma_{31}\sigma_{64}\sigma_{45} \\ & + \sigma_{60}\sigma_{32}\sigma_{56}\sigma_{54} + \sigma_{60}\sigma_{12}\sigma_{45}\sigma_{54} + \sigma_{40}\sigma_{32}\sigma_{56}\sigma_{56} + \sigma_{40}\sigma_{12}\sigma_{45}\sigma_{56} \\ & + \sigma_{40}\sigma_{13}\sigma_{64}\sigma_{65} + \sigma_{40}\sigma_{23}\sigma_{56}\sigma_{65} + \sigma_{50}\sigma_{13}\sigma_{64}\sigma_{64} + \sigma_{50}\sigma_{23}\sigma_{56}\sigma_{64}. \end{aligned}$$

Durch Zusammenziehen folgt endlich

$$\begin{aligned} 3\varrho_0\sigma_0'\sigma_0' = {} & \sigma_{40}\sigma_{56}(\sigma_{12}\sigma_{45} + \sigma_{13}\sigma_{46}) + \sigma_{50}\sigma_{64}(\sigma_{23}\sigma_{56} + \sigma_{21}\sigma_{54}) \\ & + \sigma_{60}\sigma_{45}(\sigma_{31}\sigma_{64} + \sigma_{32}\sigma_{65}) \\ & + 2\sigma_{40}\sigma_{32}\sigma_{56}^2 + 2\sigma_{50}\sigma_{13}\sigma_{64}^2 + 2\sigma_{60}\sigma_{21}\sigma_{45}^2. \end{aligned} \tag{72}$$

Ebenso läßt sich $\sigma_\infty'\sigma_\infty'\varrho_\infty$ in zyklisch symmetrische Form bringen.

---

Druckfertig erklärt 29. V. 1904.]

Digitized by Google

# Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Kurbelbewegung.

Von

M. Krause.

Im folgenden sollen die elliptischen Funktionen für die Theorie der Kurbelbewegung verwandt werden. Die Zahl der Anwendungen der elliptischen Funktionen für die Kinematik und zwar insbesondere für die Bewegung eines ebenen unveränderlichen Systems ist, soweit dem Verfasser bekannt, bisher nur eine kleine. Die erste stammt aus dem Jahre 1879 und rührt von Herrn Darboux[1]) her. Dieselbe bezieht sich auf die Darstellung der für die Bewegung eines ebenen Gelenkvierecks charakteristischen Größen mit Hilfe der Jacobischen elliptischen Funktionen und darf für diese Theorie als fundamental bezeichnet werden. Mit demselben Problem beschäftigt sich im Jahre 1900 Herr Picciati[2]) und zwar unter Einführung der Weierstrassschen elliptischen Funktionen. Ferner findet sich in dem Werke über elliptische Funktionen von Herrn Greenhill[3]) aus dem Jahre 1892 der Satz, daß die Kurve, auf welcher man eine Ellipse mit den Halbachsen $a$ und $b$

1) Darboux: De l'emploi des fonctions elliptiques dans la théorie du quadrilatère plan. Comptes rendus 88 oder Bulletin des Sciences math. II Ser. III.

2) Picciati: La funzione di Weierstrass nella cinematica del quadrilatero articolato. Atti del' Ist. Veneto. 40. 1900—1901. Siehe auch das Werk von Herrn Loria über ebene Kurven Leipzig 1902 pag. 232 sequ.

3) Greenhill: The applications of elliptic fonctions London. Siehe auch die Übersetzung dieses Werkes von Griess in die französische Sprache. Paris 1895.

Digitized by Google

rollen lassen muß, damit das Zentrum eine gerade Linie beschreibt, die Gleichung besitzt:

$$\frac{y}{a} = \mathrm{dn}\,\frac{x}{b}$$

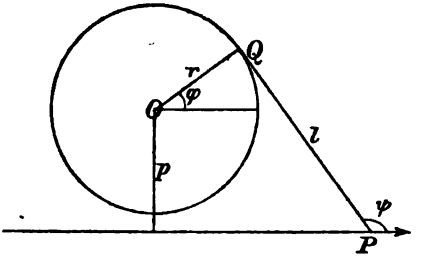
Eine ausführliche Untersuchung der hierdurch bedingten Bewegung der Ebene findet sich in einer Arbeit von Herrn Opitz[1]) aus dem Jahre 1904.

Endlich hat Herr Lacour[2]) im Jahre 1901 die Theorie der Kurbelbewegung untersucht und zwar unter der Voraussetzung, daß die feste Gerade durch den Mittelpunkt des festen Kreises hindurchgeht. An diese Arbeit von Herrn Lacour soll die folgende Notiz anknüpfen und zwar indem die Annahme fallen gelassen wird, daß die gerade Linie durch den Mittelpunkt des Kreises hindurchgeht.

## § 1.

### Grundgleichungen der Kurbelbewegung. Normierung des zu behandelnden Problemes.

Wie aus den letzten Bemerkungen der Einleitung folgt, handelt es sich um das folgende Problem.




Eine gerade Linie $PQ$ von gegebener Länge $l$ bewegt sich so, daß ihr einer Endpunkt $P$ auf einer festen geraden Linie $L$, ihr anderer Endpunkt $Q$ auf einem festen Kreise gleitet, es soll die Bewegung der Ebene beschrieben werden.

Den Mittelpunkt des Kreises nennen wir $O$, den Radius desselben $r$ und legen durch $O$ ein rechtwinkliges in der Ebene festes Koordinatensystem $x$, $y$, dessen $x$-Achse parallel der Geraden $L$ ist. In der beweglichen Ebene nehmen wir ein zweites rechtwinkliges Koordinatensystem $\xi$, $\eta$ an, dessen Anfangspunkt der Punkt $Q$ und dessen $\xi$-Achse

1) Opitz: Anwendung der elliptischen Funktionen auf ein Problem aus der Theorie der Rollkurven. Dresden 1904.

2) Lacour: Mouvement d'un plan invariablement lié à une bielle. Nouv. Annales. IV Bd. 1.

Digitized by Google

die Linie $PQ$ ist. Als positive Richtung nehmen wir die Richtung von $P$ nach $Q$ an.

Den Winkel, welchen die positive $x$- und $\xi$-Achse miteinander bilden, nennen wir $\psi$. Die $\eta$-Achse ist senkrecht zur $\xi$-Achse, ihre positive Richtung ist so gewählt, daß bei einer genügenden Drehung des festen Koordinatensystems im positiven Sinne ihre Richtung die der positiven $y$-Achse wird. Die Entfernung der festen Geraden vom Koordinatenanfang nennen wir $p$, den Winkel der Linie $OQ$ mit der positiven $x$ Achse $\varphi$. Der Punkt $Q$ hat dann die Koordinaten $x_1$ und $y_1$, die sich in der Form darstellen lassen:

$$x_1 = r\cos\varphi, \quad y_1 = r\sin\varphi. \tag{1}$$

Der Punkt $P$ hat die Koordinaten $x_2$, $y_2$, von denen $y_2$ gleich $-p$ ist. Zwischen den Größen $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$ bestehen die Beziehungen:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= l\cos\psi \\ y_1 - y_2 &= l\sin\psi, \end{aligned} \tag{2}$$

aus denen sich für $x_2$ der Wert ergibt:

$$x_2 = r\cos\varphi - l\cos\psi, \tag{3}$$

während zwischen $\varphi$ und $\psi$ die Beziehung besteht:

$$r\sin\varphi = l\sin\psi - p. \tag{4}$$

Zwischen den Koordinaten $x$, $y$ und $\xi$, $\eta$ eines beliebigen Punktes $M$ der Ebene bestehen die Gleichungen:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + \xi\cos\psi - \eta\sin\psi, \\ y &= y_1 + \xi\sin\psi + \eta\cos\psi. \end{aligned} \tag{5}$$

*Halten wir $\xi$, $\eta$ fest, so stellen diese Gleichungen die Bahn des Punktes $M$ dar.*

Das Momentanzentrum $C$ liegt auf der Kreisnormale im Punkte $Q$ und auf der Normalen zur $x$-Achse, die durch den Punkt $P$ hindurchgeht.

Infolgedessen *stellen die Gleichungen:*

$$\begin{aligned} x &= r\cos\varphi - l\cos\psi, \\ y &= (r\cos\varphi - l\cos\psi)\operatorname{tang}\psi \end{aligned} \tag{6}$$

*die Gleichungen der Kurve dar, die vom Punkte $C$ beschrieben wird.*

Digitized by Google

Setzen wir diese in die Gleichungen (5) ein, so ergibt sich das System:

$$\xi = -\frac{l\cos\psi}{\cos\varphi}\cos(\varphi-\psi),$$
$$\eta = -\frac{l\cos\psi}{\cos\varphi}\sin(\varphi-\psi) \tag{7}$$

*Diese Gleichungen stellen die rollende Kurve M dar.*

Damit ist die Bewegung beschrieben, so weit sie hier ins Auge gefaßt wird. Die für die Bewegung charakteristischen Größen stellen sich durch zwei Größen $\varphi$ und $\psi$ dar, zwischen welchen die Gleichung (4) besteht, so daß nur eine Größe willkürlich bleibt. *Es ist die Aufgabe der folgenden Notiz, die beiden Größen $\varphi$ und $\psi$ mit Hilfe der elliptischen Funktionen durch eine einzige Größe $u$ zu ersetzen, so zwar, daß die vier Funktionen:*

$$\sin\varphi,\quad \cos\varphi,\quad \sin\psi,\quad \cos\psi,$$

*sich durch diese Größe $u$ in einfacher Weise darstellen lassen.*

## § 2.

### Erste Parameterdarstellung mit Hilfe von elliptischen Funktionen, wenn die Ungleichung besteht: $r+p<l$.

Die am Schlusse des vorigen Paragraphen angegebenen Größen können auf mehrfachem Wege mit Hilfe der elliptischen Funktionen dargestellt werden. Die Darstellung, die sich zunächst darbietet, ist die folgende. Wir führen eine neue Größe $s$ mit Hilfe der Gleichung

$$\sin\varphi = \frac{a+bs}{c+ds} \tag{1}$$

ein, wobei $a$, $b$, $c$, $d$ einstweilen willkürliche Größen bedeuten. Dann wird:

$$\cos\varphi = \frac{1}{c+ds}\sqrt{c^2-a^2+2s(cd-ab)-s^2(b^2-d^2)}.$$

Wir verfügen über die Größen $a$, $b$, $c$, $d$ zunächst so, daß die Gleichungen bestehen:

$$cd-ab=0,$$
$$c^2-a^2=b^2-d^2. \tag{2}$$

Denselben wird jedenfalls Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$c=b,\quad d=a. \tag{3}$$

Digitized by Google

Unter dieser Voraussetzung nimmt $\cos\varphi$ den Wert an:

$$\cos\varphi = \sqrt{b^2 - a^2}\,\frac{\sqrt{1-z^2}}{c+dz}. \tag{4}$$

Die Wurzel $\sqrt{b^2 - a^2}$ wird reell, wenn $b^2 > a^2$ ist.

$\sin\psi$ drückt sich vermöge Gleichung (4) des ersten Paragraphen rational durch $z$ aus. Setzen wir:

$$m = \frac{r}{l}, \quad n = \frac{p}{l}, \tag{5}$$

so können wir diese Gleichung schreiben:

$$\sin\psi = m\sin\varphi + n,$$

so daß wird:

$$\sin\psi = \frac{am + bn + (bm + an)z}{b + az}. \tag{6}$$

Endlich erhalten wir:

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{A + Bz - Cz^2}}{b + az},$$

wobei die Größen $A$, $B$, $C$ die Werte besitzen:

$$A = b^2 - (am + bn)^2,$$
$$B = 2(ab - (am + bn)(bm + an)),$$
$$C = (bm + an)^2 - a^2.$$

Wir können die Größen $a$, $b$, $c$, $d$ noch einer Bedingung unterwerfen — es möge dieses die Gleichung sein:

$$B = 0.$$

Es folgt dann für den Quotienten $\frac{b}{a}$ der Ausdruck:

$$\frac{1 - m^2 - n^2 \pm \sqrt{(m^2 + n^2 - 1)^2 - 4m^2n^2}}{2mn}.$$

Damit die Wurzel reell ist, muß der Ausdruck:

$$(m^2 + n^2 - 2mn - 1)(m^2 + n^2 + 2mn - 1)$$

positiv sein. Es geschieht das, wenn beide Faktoren entweder positiv oder beide negativ sind. Wir beschränken uns auf den letzten Fall. $m$ und $n$ sind positive Größen, die beiden Faktoren negativ, wenn die Ungleichung besteht:

$$m + n < 1. \tag{7}$$

Digitized by Google

Diese Annahme soll jetzt gemacht werden, dann folgt, daß in der Darstellung von $\frac{b}{a}$ das positive Zeichen gewählt werden muß, wenn $b^2 > a^2$ sein soll, oder also es wird:

$$(8) \quad 2mn\frac{b}{a} = 1 - m^2 - n^2 + \sqrt{(m^2+n^2-1)^2 - 4m^2n^2}.$$

Ferner ergibt sich, daß wir setzen können:

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{A - Cz^2}}{b + az}.$$

Die Größen $A$ und $C$ sind vermöge der Ungleichung (7) positive Größen, der Quotient:

$$(9) \quad \frac{C}{A} = k^2 = \frac{(bm+an)^2 - a^2}{b^2 - (am+bn)^2},$$

den wir auch schreiben können:

$$\frac{(an+bm)^2}{b^2} = \frac{a^2}{(am+bn)^2},$$

positiv und kleiner als 1.

Unter Hinzunahme der Größe $k$ kann $\cos\psi$ geschrieben werden:

$$(10) \quad \cos\psi = \sqrt{A}\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{b+az}.$$

Es lassen sich also die vier Funktionen:

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

mit Hilfe eines Parameters $z$ darstellen. Die Darstellung ist derart, daß sich die Einführung elliptischer Funktionen von selbst empfiehlt.

Wir setzen dazu

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}},$$

wobei $k^2$ den in Formel (9) angegebenen Wert besitzt, und erhalten den

*Lehrsatz: Wenn die Ungleichung besteht:*

$$r + p < l,$$

*so können die vier Funktionen:*

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

Digitized by Google

*mit Hilfe eines Parameters $u$ in der folgenden Form dargestellt werden:*

$$N\sin\varphi = g + \operatorname{sn} u, \quad N\cos\varphi = \sqrt{1-g^2}\operatorname{cn} u,$$
$$N\sin\psi = mg + n + (ng+m)\operatorname{sn} u,$$
$$N\cos\psi = \sqrt{(1-(mg+n)^2)}\operatorname{dn} u,$$
$$N = 1 + g\operatorname{sn} u, \quad g = \frac{a}{b},$$

*wobei die Konstanten $g$ und $k^2$ durch die Formeln* (8) *und* (9) *bestimmt sind.*

Die Formeln gestalten sich etwas eleganter, wenn wir auch die Konstanten mit Hilfe von elliptischen Funktionen darstellen. Wir führen dazu eine Hilfsgröße $\alpha$ durch die Gleichung ein:

$$\operatorname{sn}\alpha = \frac{g}{m+ng}, \tag{12}$$

wobei zu bemerken ist, daß die rechte Seite derselben positiv und kleiner als 1 ist, dann folgen die Beziehungen:

$$g = k\operatorname{sn}\alpha, \tag{13}$$

$$md\,n^2\alpha = k\operatorname{cn}^2\alpha, \tag{14}$$
$$nd\,n^2\alpha = k'^2\operatorname{sn}\alpha,$$

so daß die Konstanten $m$ und $n$ durch die Größen $k$ und $\alpha$ ersetzt werden können.

Wir erhalten demgemäß den

*Lehrsatz: Wenn die Konstanten $m$ und $n$ der Ungleichung Genüge leisten:*

$$m + n < 1,$$

*so können die vier Funktionen:*

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

*mit Hilfe eines Parameters $u$ in der folgenden Form dargestellt werden.*

$$N\sin\varphi = k\operatorname{sn}\alpha + \operatorname{sn} u, \quad N\cos\varphi = \operatorname{dn}\alpha\operatorname{cn} u,$$
$$N\sin\psi = \operatorname{sn}\alpha + k\operatorname{sn} u, \quad N\cos\psi = \operatorname{cn}\alpha\operatorname{dn} u.$$
$$N = 1 + k\operatorname{sn}\alpha\operatorname{sn} u.$$

*Die Beziehungen zwischen den gegebenen Konstanten $m$ und $n$ und den Konstanten $\alpha$ und $k$ werden durch die Formeln* (14) *vermittelt.*

Zu bemerken ist, daß bei Vertauschung von $\alpha$ und $u$, $\varphi$ in $\psi$ übergeht.

Digitized by Google

## § 3.

### Zweite Parameterdarstellung mit Hilfe von elliptischen Funktionen, wenn die Ungleichung besteht: $r + p < l$.

Außer der im vorigen Paragraphen untersuchten Parameterdarstellung, wenn $r + p < l$, gibt es noch weitere mit Hilfe der elliptischen Funktionen. Wir wählen die folgende, die den Vorzug besitzt, daß die Beziehungen, die zwischen den Konstanten $m$, $n$, $k^2$, $\alpha$ bestehen, sich etwas einfacher gestalten.

Wir führen dazu eine Größe $z$ ein, die mit $\varphi$ durch die Gleichung verbunden ist:

$$\sin\varphi = \frac{a + bz^2}{c + dz^2}, \tag{1}$$

dann wird:

$$\cos\varphi = \frac{\sqrt{(c^2 - a^2) + 2z^2(cd - ab) - z^4(b^2 - d^2)}}{c + dz^2}.$$

Die Größen $c$ und $a$ unterwerfen wir der Gleichung:

$$c^2 - a^2 = 0.$$

Hieraus folgt entweder $c = a$ oder $c = -a$. Wir wählen zunächst den Fall:

$$c = a. \tag{2}$$

Ferner setzen wir die Gleichung fest:

$$2(cd - ab) = b^2 - d^2$$

oder also:

$$2c = -(b + d), \tag{3}$$

dann folgt:

$$\cos\varphi = \sqrt{b^2 - d^2}\,\frac{z\sqrt{1 - z^2}}{c + dz^2}. \tag{4}$$

Die erste Wurzel auf der rechten Seite wird reell, wenn die Ungleichung besteht:

$$b^2 > d^2.$$

$\sin\psi$ drückt sich vermöge Gleichung (4) des ersten Paragraphen rational durch $z$ aus, und zwar können wir die Gleichung schreiben:

$$\sin\psi = \frac{am + cn + (bm + dn)z^2}{c + dz^2}. \tag{5}$$

Endlich erhalten wir:

$$\cos\psi = \frac{\sqrt{A - Bz^2 + Cz^4}}{c + dz^2},$$

Digitized by Google

wobei gesetzt ist:

$$A = c^2(1 - (m+n)^2),$$
$$B = 2c((m+n)(bm+dn) - d),$$
$$C = d^2 - (bm+dn)^2.$$

Zu den bisherigen Gleichungen für die Größen $a$, $b$, $c$, $d$ fügen wir die weitere:

$$C = 0, \text{ d. h.}$$
$$d^2 = (bm+dn)^2.$$

Auch hier sind zwei Fälle möglich. Wir beschränken uns auf den Fall:

$$d = bm + dn, \tag{6}$$

dann sind die Quotienten der Größen $a$, $b$, $d$ und $c$ bestimmt, und zwar wird:

$$\frac{a}{c} = 1, \quad \frac{d}{2c} = -\frac{m}{1+m-n}, \quad \frac{b}{c} = \frac{1-m}{n}\frac{d}{c}. \tag{7}$$

Zu gleicher Zeit nimmt $\cos\psi$ die Form an:

$$\cos\psi = \sqrt{A}\,\frac{\sqrt{1-k^2z^2}}{c+dz^2}, \tag{8}$$

wobei gesetzt ist:

$$k^2 = \frac{B}{A} = \frac{4m}{(1+m+n)(1+m-n)}. \tag{9}$$

Die Formeln gelten für alle Werte von $m$ und $n$. Nehmen wir an, daß $m$ und $n$ derselben Ungleichung Genüge leisten, wie im zweiten Paragraphen, d. h. der Ungleichung:

$$m + n < 1, \tag{10}$$

so folgt, daß die Ungleichung besteht:

$$b^2 > d^2, \tag{11}$$

daß $A$ positiv und $k^2$ positiv und kleiner als 1 ist.

Es lassen sich also die vier Funktionen:

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

mit Hilfe eines Parameters $z$ darstellen. Die Darstellung ist derart, daß sich die Einführung der elliptischen Funktionen von selbst empfiehlt.

Wir setzen dazu:

$$z = \operatorname{sn} u, \tag{12}$$



Digitized by Google

so folgt der

*Lehrsatz: Wenn die Ungleichung besteht:*

$$m + n < 1,$$

*so lassen sich die vier Funktionen:*

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

*mit Hilfe eines Parameters $u$ in der folgenden Form darstellen:*

$$M\sin\varphi = a + b\,\mathrm{sn}^2 u, \quad M\cos\varphi = \sqrt{b^2 - d^2}\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$M\sin\psi = am + cn + (bm + dn)\varepsilon^2, \quad M\cos\psi = \sqrt{A}\,\mathrm{dn}\,u,$$

$$M = c + d\,\mathrm{sn}^2 u,$$

*wobei die Quotienten der Größen $a$, $b$, $c$, $d$ und* die Größe $k^2$ *in der vorhin angegebenen Weise durch $m$ und $n$ bestimmt sind.*

Die Formeln nehmen eine übersichtlichere Gestalt an, wenn wir auch die Konstanten mit Hilfe von elliptischen Funktionen darstellen. Dazu bestimmen wir das Argument $\alpha$ durch die Gleichung:

$$1 - n - m = 2\,\mathrm{cn}^2\alpha. \tag{13}$$

Durch diese Gleichung ist $\mathrm{cn}^2\alpha$ als positive Größe kleiner als 1 definiert.

Wir können die Größen $m$ und $n$ dann durch die Konstanten $\alpha$ und $k^2$ ersetzen, und zwar wird:

$$\begin{aligned} m\,\mathrm{dn}^2\alpha &= k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^2\alpha \\ n\,\mathrm{dn}^2\alpha &= -1 + 2\,\mathrm{sn}^2\alpha - k^2\mathrm{sn}^4\alpha. \end{aligned} \tag{14}$$

Die Quotienten der Größen $a$, $b$, $d$ und $c$ nehmen die Form an:

$$\frac{a}{c} = 1, \quad \frac{b}{c} = k^2\mathrm{sn}^2\alpha - 2, \quad \frac{d}{c} = -k^2\mathrm{sn}^2\alpha \tag{15}$$

während $A$ wird

$$A = 4c^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{cn}^2\alpha. \tag{16}$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den

*Lehrsatz. Wenn die Ungleichung besteht:*

$$m + n < 1,$$

*so lassen sich die Funktionen:*

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi,$$

*mit Hilfe von elliptischen Funktionen in der Form darstellen:*

Digitized by Google

$$N\sin\varphi = 1 - (2 - k^2\mathrm{sn}^2\alpha)\,\mathrm{sn}^2 u, \quad N\cos\varphi = 2\,\mathrm{dn}\alpha\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{cn}u,$$
$$N\sin\psi = 2\,\mathrm{sn}^2\alpha - 1 - k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2 u, \quad N\cos\psi = 2\,\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{dn}u,$$
$$N = 1 - k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2 u.$$

*Die Beziehungen zwischen den Größen $m$, $n$, $k^2$, $\alpha$ werden durch die Gleichungen* (14) *vermittelt.* Die Vertauschung von $\alpha$ und $u$ führt $\varphi$ in $-\psi$ über.

## § 4.

**Parameterdarstellung mit Hilfe von elliptischen Funktionen, wenn die Ungleichungen bestehen: $r+p>l$, $|r-p|<l$.**

Wir wollen nunmehr die Bedingung fallen lassen, daß $r+p<l$ ist, vielmehr annehmen, daß die Ungleichung besteht:

(1) $$r+p>l \text{ oder } m+n>1.$$

In diesem Falle beschränken wir uns auf *eine* Parameterdarstellung, und zwar indem wir an die Resultate des vorigen Paragraphen anknüpfen. Unter der Voraussetzung (1) wird die Größe:

$$A = c^2(1-(m+n)^2)$$

negativ — dasselbe würde für $B$ der Fall sein, wenn

$$1+m-n>0$$

wäre. Dieser Ungleichung wird jedenfalls Genüge geleistet, wenn:

(2) $$|m-n|<1$$

ist, eine Annahme, die wir zu der Annahme (1) hinzufügen wollen. Jedenfalls folgt dann, daß:

$$\frac{B}{A} = \frac{4m}{(1+m-n)(1+m+n)}$$

positiv, ferner daß es größer als 1 ist. In der Tat, es ist:

$$0>(1-m-n)(1-m+n)>(1-m)^2-n^2$$

oder also:

$$4m>(1+m)^2-n^2.$$

Endlich ergibt sich, daß die Ungleichung besteht:

$$\left|\frac{b}{d}\right|<1.$$

Setzen wir daher:

(3) $$k^2 = \frac{A}{B} = \frac{(1+m-n)(1+m+n)}{4m},$$



Digitized by Google

so ergeben sich die Ausdrücke:

$$\cos\varphi = \sqrt{d^2 - b^2}\,\frac{s\sqrt{s^2-1}}{c+ds^2}, \tag{4}$$

$$\cos\psi = \sqrt{-B}\,\frac{\sqrt{-k^2+s^2}}{c+ds^2}. \tag{5}$$

Wir überzeugen uns also, daß die vier Funktionen:

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

sich mit Hilfe eines Parameters $s$ darstellen lassen. Auch hier ist die Darstellung derart, daß sich die Einführung von elliptischen Funktionen empfiehlt. Wir setzen:

$$\frac{1}{s} = \operatorname{sn} u, \tag{6}$$

um den Lehrsatz zu erhalten:

*Wenn die Ungleichungen bestehen:*

$$m + n > 1, \quad |m - n| < 1,$$

*so lassen sich die Funktionen:*

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

*mit Hilfe von elliptischen Funktionen in der Form darstellen:*

$$M\sin\varphi = b + a\operatorname{sn}^2 u, \quad M\cos\varphi = \sqrt{d^2 - b^2}\,\operatorname{cn} u,$$

$$M\sin\psi = bm + dn + (am + cn)\operatorname{sn}^2 u, \quad M\cos\psi = \sqrt{-B}\operatorname{sn} u \operatorname{dn} u,$$

$$M = d + c\operatorname{sn}^2 u,$$

*wobei die Quotienten der Größen $a$, $b$, $c$, $d$ und die Größe $k^2$ in der vorhin angegebenen Weise durch $m$ nnd $n$ auszudrücken sind.*

Auch hier empfiehlt es sich, bei den Konstanten elliptische Funktionen einzuführen.

Wir bestimmen dazu eine Größe $\alpha$ durch die Gleichung:

$$1 + n + m = \frac{2}{\operatorname{sn}^2\alpha} \tag{7}$$

Durch dieselbe ist $\operatorname{sn}^2\alpha$ als positive Größe kleiner als 1 definiert. Es können dann die Größen $n$ und $m$ durch die Konstanten $\alpha$ und $k^2$ ersetzt werden, und zwar wird:

$$\begin{aligned} m\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{dn}^2\alpha &= \operatorname{cn}^2\alpha, \\ n\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{dn}^2\alpha &= \operatorname{dn}^2\alpha - k^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{cn}^2\alpha. \end{aligned} \tag{8}$$

Digitized by Google

Die Quotienten der Konstanten $a$, $b$, $c$ und $d$ nehmen die Form an:

$$\frac{a}{d} = \frac{c}{d} = -k^2\mathrm{sn}^2\alpha,$$

$$\frac{b}{d} = -1 + 2k^2\mathrm{sn}^2\alpha, \tag{9}$$

während $B$ wird:

$$B = -4d^2k^2\mathrm{cn}^2\alpha. \tag{10}$$

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden

*Lehrsatz: Wenn die Ungleichungen bestehen:*

$$m + n > 1, \quad |m - n| < 1,$$

*so lassen sich die Funktionen:*

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi,$$

*in der Form darstellen:*

$$N\sin\varphi = -1 + 2k^2\mathrm{sn}^2\alpha - k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2u,$$

$$N\cos\varphi = 2k\,\mathrm{sn}\alpha\,\mathrm{dn}\alpha\,\mathrm{cn}u,$$

$$N\sin\psi = 1 - k^2(2 - \mathrm{sn}^2\alpha)\,\mathrm{sn}^2u,$$

$$N\cos\psi = 2k\,\mathrm{cn}\alpha\,\mathrm{sn}u\,\mathrm{dn}u.$$

$$N = 1 - k^2\mathrm{sn}^2\alpha\,\mathrm{sn}^2u.$$

*Die Konstanten $\alpha$ und $k$ hängen mit den Konstanten $m$ und $n$ durch die Formeln* (8) *zusammen.* Eine Vertauschung von $\alpha$ und $u$ führt $\varphi$ in $-\psi$ über.

## § 5.

**Parameterdarstellung mit Hilfe von elliptischen Funktionen, wenn die Ungleichungen bestehen: $r + p > l$, $r - p > l$.**

Es bleibt der Fall zu betrachten übrig, daß die Ungleichungen bestehen:

$$m + n > 1, \quad |m - n| > 1.$$

Offenbar können wir uns darauf beschränken, daß:

$$m > n \text{ ist}$$

oder also die zweite Ungleichung lautet:

$$m - n > 1.$$

Digitized by Google

Um diesen Fall zu erledigen, gehen wir zu den ersten Betrachtungen des dritten Paragraphen zurück. Die Größen $c$ und $a$ leisteten der Gleichung Genüge:

$$c^2 = a^2.$$

Bisher war gesetzt worden:

$$c = a,$$

wir nehmen jetzt an, daß die Beziehung besteht:

$$(1) \qquad c = -a,$$

unterwerfen ferner die Konstanten der Gleichung:

$$2(cd - ab) = b^2 - d^2 \text{ oder also:}$$

$$(2) \qquad 2c = b - d.$$

Um den Koeffizienten $C$ zum Verschwinden zu bringen, muß die Gleichung erfüllt sein:

$$d^2 = (bm + dn)^2.$$

Dieser Gleichung wird Genüge geleistet, wenn wir setzen:

$$(3) \qquad -d = bm + dn.$$

Unter solchen Umständen erhalten wir:

$$(4) \qquad \frac{b}{d} = -\frac{1+n}{m}, \quad \frac{2c}{d} = -\frac{2a}{d} = -\frac{1+m+n}{m}.$$

Die Koeffizienten $A$ und $B$ nehmen die Formen an:

$$(5) \qquad A = c^2(1-(m-n)^2), \quad B = 2cd(m-n-1).$$

Den Quotienten derselben setzen wir gleich $k^2$, d. h.

$$(6) \qquad \frac{B}{A} = \frac{4m}{(1+m+n)(1+m-n)} = k^2.$$

Wir machen nunmehr die Annahme, daß die Ungleichungen bestehen:

$$m+n>1, \quad m-n>1,$$

so wird $A$ negativ, $B$ negativ, $k^2$ positiv und kleiner als 1, ferner besteht die Ungleichung:

$$\left|\frac{b}{d}\right| < 1.$$

Unter solchen Umständen ergeben sich die Formen:

$$(7) \qquad \cos\varphi = \sqrt{d^2 - b^2}\,\frac{z\sqrt{z^2-1}}{c+dz^2},$$

$$(8) \qquad \cos\psi = \sqrt{-A}\,\frac{\sqrt{-1+k^2z^2}}{c+dz^2}.$$

Digitized by Google

Es lassen sich also wiederum die vier Funktionen:

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

mit Hilfe eines Parameters $z$ in einer Weise darstellen, welche die Einführung der elliptischen Funktionen von selbst empfiehlt. Setzen wir:

$$\frac{1}{kz} = \operatorname{sn} u, \tag{9}$$

so folgt der

*Lehrsatz: Wenn die Ungleichungen bestehen:*

$$m + n > 1, \quad m - n > 1,$$

*so können die vier Funktionen:*

$$\sin\varphi, \quad \cos\varphi, \quad \sin\psi, \quad \cos\psi$$

*mit Hilfe eines Parameters $u$ in der folgenden Form dargestellt werden:*

$$M\sin\varphi = b + ak^2\operatorname{sn}^2 u, \quad M\cos\varphi = \sqrt{d^2 - b^2}\operatorname{dn} u,$$

$$M\sin\psi = bm + dn + k^2(am + cn)\operatorname{sn}^2 u, \quad M\cos\psi = \sqrt{-A}\,k^2\operatorname{sn} u \operatorname{cn} u,$$

$$M = d + ck^2\operatorname{sn}^2 u.$$

*Die Quotienten der Größen $a$, $b$, $c$, $d$ und die Größe $k^2$ sind in der oben angegebenen Weise durch die Konstanten $m$ und $n$ darstellbar.*

Schließlich drücken wir auch hier die Konstanten mit Hilfe der elliptischen Funktionen aus. Wir setzen dazu:

$$\operatorname{sn}^2\alpha = \frac{1 + m + n}{2m}. \tag{10}$$

Es ist dann $\operatorname{sn}^2\alpha$ eine positive Größe kleiner als 1. Die Größen $m$ und $n$ können durch die Größen $\alpha$ und $k^2$ ersetzt werden, und zwar wird:

$$\begin{aligned} mk^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{cn}^2\alpha &= \operatorname{dn}^2\alpha, \\ nk^2\operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{cn}^2\alpha &= -\operatorname{cn}^2\alpha + \operatorname{sn}^2\alpha\operatorname{dn}^2\alpha. \end{aligned} \tag{11}$$

Die Quotienten der Größen $a$, $b$, $c$ und $d$ nehmen die Formen an:

$$\frac{b}{d} = 1 - 2sn^2\alpha, \quad \frac{c}{d} = -\frac{a}{d} = -\operatorname{sn}^2\alpha, \tag{12}$$

während $A$ wird:

$$A = -\frac{4d^2\cdot\operatorname{dn}^2\alpha}{k^4}. \tag{13}$$

Digitized by Google

Unter solchen Umständen erhalten wir den folgenden

*Lehrsatz: Wenn die Ungleichungen bestehen:*

$$m + n > 1, \quad m - n > 1,$$

*so gelten die Parameterdarstellungen:*

$$N \sin \varphi = 1 - 2\,\mathrm{sn}^2 \alpha + k^2 \mathrm{sn}^2 \alpha\, \mathrm{sn}^2 u, \quad N \cos \varphi = 2\,\mathrm{sn}\,\alpha\,\mathrm{cn}\,\alpha\,\mathrm{dn}\,u,$$

$$N \sin \psi = -1 + (2 - k^2 \mathrm{sn}^2 \alpha)\,\mathrm{sn}^2 u, \quad N \cos \psi = 2\,\mathrm{dn}\,\alpha\,\mathrm{sn}\,u\,\mathrm{cn}\,u,$$

$$N = 1 - k^2 \mathrm{sn}^2 \alpha\, \mathrm{sn}^2 u.$$

*Die Konstanten $\alpha$ und $k^2$ hängen mit den Konstanten $m$ und $n$ durch die Formeln* (11) *zusammen.* Wie wir uns überzeugen, geht bei der Vertauschung von $\alpha$ und $u$ $\varphi$ in $-\psi$ über.

---

Druckfertig erklärt 14. VI. 1904.]

Digitized by Google

# Vierter Bericht der Erdbebenstation Leipzig.

## Die in Leipzig vom 1. Juli 1903 bis 30. April 1904 von Wiecherts Pendelseismometer registrierten Erdbeben und Pulsationen.

Mit einer Tafel und drei Tabellen.

Von

Franz Etzold.

Die 10 Monate, welche der vorliegende Bericht umfaßt, bilden die ruhigste Periode seit der Aufstellung des Leipziger Seismometers. Es gelangten in diesem Zeitraum nur 51 Erdbeben zur Aufzeichnung, während in dem vorhergegangenen Halbjahr 47 Fern- und 44 Nahbeben registriert wurden. Das Vogtland hat seit dem 2. Mai 1903 keinen Stoß hervorgebracht, der sich mikroseismisch bis Leipzig fortgepflanzt hätte, denn die am 16. Juli 1903 verzeichnete Erschütterung dürfte zwar wahrscheinlich in etwa 100 km Entfernung vom Seismometer, nicht aber im Vogtland stattgefunden haben, da sie in letzterem Falle sicher von einem der Referenten der sächsischen Erdbebenkommission als dort wahrgenommen gemeldet worden wäre.

Das Seismometer hat während der ganzen Berichtszeit keiner größeren Reparatur bedurft, nur die Schreibnadeln sind erneut worden, ein Vorgang, der sich wahrscheinlich von Zeit zu Zeit notwendig machen wird, da der verwendete Aluminiumdraht das Festklemmen der gläsernen Schreibstifte nicht lange aushält. Größere Schwierigkeit machte die Zeitmarkierung. Die in diesen Berichten (1902, S. 290) beschriebene Kontakteinrichtung im Räderwerk des Regulators funktionierte 18 Monate lang zur Zufriedenheit, dann aber gestaltete sich die Reibung auf dem Minutenrad bald so stark, daß die Uhr aufgehalten wurde, bald so schwach, daß der Kontakt ausblieb. Da Abänderungen nicht zu einem dauernd guten Gange der Uhr führten, wurde dieselbe

Digitized by Google

schließlich am 22. März gegen einen anderen Regulator au getauscht, bei dem, ähnlich wie bei einem Schlagwerk, währen der Kontaktzeit ein besonderes Gewicht in Wirksamkeit trit Diese neue Uhr ist bis jetzt tadellos gegangen, so daß von d an die Zeitbestimmung für die Beben einwandfrei ist.

## Die in Leipzig vom 1. Juli 1903 bis 30. April 1904 aufgezeichnete Seismogramme.

Siehe nebenstehende **Tabellen I—III.**

## Die in Leipzig vom 1. Juli 1903 bis 30. April 1904 aufgezeichnete Pulsationen.

Pulsatorische Bewegungen gelangen in den Sommermonate stets nur schwach und während kurzer Zeit zur Aufzeichnun während in der Winterszeit selten an einem Tage jede Spu von ihnen vermißt wird. Nie setzen sie plötzlich ein, sonder nehmen an Intensität ganz allmählich bis zu einem jeweilige Maximum zu, um dann ebenso allmählich wieder zu verschwinde Im Winter halten die Pulsationen vielfach Tage, ja Wochen lan an. In diesem Falle ist es unmöglich, ihr Maximum in Leipz auf die Stunde genau zu bestimmen, da die chronischen Tage störungen die schwachen Wellen auffällig verbreitern, so daß d am Tage aufgezeichneten Pulsationen mit den während der Nac registrierten gar nicht verglichen werden können. Zur Sommer zeit gelangt an vielen Tagen nur dann und wann für die Dau von etwa einer Minute ein Zug ganz flacher Wellen zur Aufzeichnun

Die in dem Zeitraum, welchen dieser Bericht umfaßt, au gezeichneten Pulsationen verteilen sich folgendermaßen:

*Juli* 1903.

Am 1.—3. und 6.—8. ganz schwache Wellenzüge.

*August.*

Vom 8.—9., 12.—13., 14.—16., 17.—19., 25.—30. zeichn sich pulsatorische Bewegungen auf, unter denen nur die vo 27.—29. einigermaßen kräftig sind.

*September.*

Vom 9.—12. und vom 17.—19. werden Pulsationen deutlich aber immerhin noch schwach registriert.

Digitized by Google

Tabelle I.

## Bemerkungen über die Ausbildung der Seismogramme

| |
|---|
| Den beiden Aufzeichnungen erster Vorphasen folgen nur ganz vereinzelte und sehr flache Wellen. |
| Lange flache Wellen. |
| Knopfartige Verdickung beider Registrierlinien, gefolgt von einer Reihe kursperiodiger ganz leichter Zitterbewegungen. |
| Dem scharfen ersten Einsatz folgt bei beiden Komponenten ein weniger deutlicher zweiter, weiterhin aber nur ganz vereinzelte flache Wellen. |
| Lange flache Wellen. |
| Scharf gezähnelte, allmählich anschwellende und in gleicher Weise wieder abnehmende Linie. |
| desgl. |
| Lange flache Wellen. |
| Beide Vorphasen namentlich bei der NS.-Komponente deutlich, Hauptphase aus flachen, wenig regelmäßigen Wellen bestehend. |
| Siehe Tafel V Fig. 1 und 2, sowie die Tafelerklärung S. 292. |
| Lange, ziemlich regelmäßige Wellen. |
| Scharf gezähnelte, allmählich anschwellende und in gleicher Weise wieder abnehmende Linie. |
| Auf der Registrierlinie erscheinen zweimal allmählich stärker und wieder schwächer werdende Zähnelungen, sodaß möglicherweise die Hauptphasen der Seismogramme zweier mäßig entfernter Beben vorliegen. Die NS.-Komponente hat nicht geschrieben. |
| Erster Einsatz scharf, die Hauptphase dagegen nur dadurch erkennbar, daß die Erzitterungen allmählich etwas kräftiger und dabei langsamer werden. |
| Dem ersten Einsatz folgen nach 10 Minuten flache Wellen. |
| Dem ersten Einsatz folgen bereits nach ca. 6 Minuten flache Wellen. |
| Ziemlich lange flache Wellen. |
| Flache Wellen folgen dem 1. Einsatz nach 8 Minuten. Vorphase sehr schwach. |

Digitized by Google

Digitized by Google

*Oktober.*

Von den Aufzeichnungen des 2.—7., 9.—10. und des 21.—31. sind die am 25. und 26. als kräftig zu bezeichnen.

*November.*

Ruhe herrscht nur am 4. und 5. Vom 7.—11., 14.—15., 18.—19., 20.—22., 28.—29. sind die Pulsationen ziemlich kräftig.

*Dezember.*

Vom 2.—3., 11.—12., 14.—15., 19.—20., 24.—27. herrscht Ruhe. Vom 4.—10., 21.—24., 29.—31. sind die pulsatorischen Bewegungen ziemlich energisch, am kräftigsten am 8., 9., 23. und 30.

*Januar* 1904.

Am 2., 6., 12.—14., 16.—18., 26. sind die Pulsationen sehr schwach, an allen anderen Tagen deutlich erkennbar, am 3.—4., 7.—8., 10.—11., 20.—23., 28.—31. aber kräftig.

*Februar.*

Am 2.—5., 9.—10., 19.—20., 26.—29. schwache, die übrigen Tage hindurch deutliche, am 7.—8., 12.—15., 21.—22., 25.—26. kräftige Pulsationsbewegungen.

*März.*

Deutlich sind die Pulsationsaufzeichnungen am 2. und 3., 12.—14., 16.—18., 29., am 30. und 31. sind sie kräftig, an allen anderen Tagen sehr schwach.

*April.*

Außer am 1.—2., wo sie kräftig, sowie am 9. und 10., wo sie mäßig stark waren, sind stets nur ganz leichte pulsatorische Wellen aufgezeichnet worden.

## Erklärung von Tafel V.

Die auf der Tafel V photolithographisch in ihrer natürlichen Größe (250fache Vergrößerung der wirklichen Bodenbewegungen) wiedergegebenen Seismogramme rühren von Beben her, deren Epizentralgebiete auf der Balkanhalbinsel, bez. in dem dieselbe nach Süden hin begrenzenden Mittelmeere gelegen sind. Sie wurden einesteils ihrer charakteristischen Ausbildungsweise

Digitized by Google

wegen reproduziert, anderenteils aber deswegen, weil die betreffenden Beben sich an allen seismologischen Stationen bemerkbar gemacht haben und die erzielten Aufzeichnungen wahrscheinlich eine zusammenfassende Bearbeitung finden werden.

*Fig. 1 und 2. Seismogramme der Beben im östlichen Mittelmeer am 11. August 1903 $5^h36^m$.* Die Aufzeichnungen weisen einen ganz außerordentlich kräftigen ersten Einsatz samt sich anschließenden Vorphasen auf. Die Hauptphasen fallen dadurch auf, daß kurzperiodige Bewegungen sich wesentlich langsameren Wellen überordnen. Diese eigentümliche Art der Registrierung läßt sich vielleicht aus den makroseismischen Beobachtungen erklären. An der kaiserlichen Hauptstation zu *Straßburg* wurde die Vorphase I eines starken Bebens von allen Apparaten in der Zeit zwischen $5^h36^m30^s$ und $5^h36^m51^s$ registriert. Als dessen Epizentralgebiet gibt der Bericht das östliche Mittelmeer an. Entsprechend steht in dem Abschnitt über „gefühlte Beben": „$5^h35^m$ und $36^m$ Syra, Cerigo, Candia, Mineo; Beben des östlichen Mittelmeeres; gefühlt in Kairo, Konstantinopel, Mittelitalien." BELAR verkündet in seiner Erdbebenwarte[1]), daß das Beben in Laibach $5^h35^m18^s$ registriert, in zahlreichen italienischen Städten gefühlt und von allen dortigen Warten verzeichnet worden ist, sowie daß sein Epizentralgebiet im Jonischen Meer zu suchen sei. Von *Hamburg*[2]) werden Vorphasen nicht angegeben, der Beginn der Hauptbewegung wird auf $5^h36^m20^s$ gelegt. Ausführlich berichtet SCHÜTT an derselben Stelle über gleichzeitig gefühlte Beben. Danach vollzog sich $5^h30^m$ ein heftiges, stellenweise zerstörendes Beben in ganz Griechenland; das Epizentrum lag vermutlich auf der Insel Cerigo (Kythera), wo zwei Dörfer vollständig zerstört, und in Kapsali mehrere Kirchen stark beschädigt wurden. Unter der Zeitangabe $5^h33^m2^s$ wurde aus *Athen* über einen viele Gebäude schädigenden Stoß von 6 Sekunden Dauer berichtet. Die letzten Ausläufer dieser offenbar sehr heftigen Erschütterung wurden auf Kreta, in Smyrna und Konstantinopel noch deutlich gefühlt. Weiter schreibt der Hamburger Bericht, daß zwischen $5^h30^m$ und $5^h40^m$ heftige, wellenförmige, stellenweise mit unterirdischem Rollen verbundene Stöße auf Sizilien,

1) Neueste Erdbeben-Nachrichten, Jahrgang 3. Nr. 3—5 vom 5. Dezember 1903.

2) Mitteilungen der Hauptstation für Erdbebenforschung, Aug. 1903.

Digitized by Google

südlich bis nach Malta und in mehr und mehr abgeschwächtem Grade durch die ganze italische Halbinsel hindurch nördlich bis nach Chieti, Ancona und Ferrara gefühlt wurden. Das Epizentrum derselben lag nach dem Bolletino meteorico im Untergrund des Jonischen Meeres südwestlich von Griechenland. Alle diese Berichte lassen es unentschieden, ob bloß ein gewaltiger Erdstoß um die angegebene Zeit herum stattgefunden hat oder ob sich deren zwei ereignet haben und ob in letzterem Falle ein Herd oder deren zwei in Tätigkeit getreten sind.

Wie oben bereits angegeben wurde und wie Fig. 1 und 2 zeigen, fällt die Leipziger Aufzeichnung dieses seismischen Ereignisses dadurch auf, daß eine kurzperiodige Bewegung einer aus langsamen, kräftigen Wellen bestehenden übergeordnet ist. Man wird also annehmen dürfen, daß zwei Stöße stattgefunden haben und wird die kurzperiodigen Wellen auf den einen, die langperiodigen auf den anderen beziehen. Wenn beide Erschütterungen von dem nämlichen Herde ausgegangen wären, so müßten sie ähnliche Seismogramme geliefert haben, es müßten dann die den langperiodigen Schwingungen der Hauptphase des ersten Stoßes übergeordneten raschen Wellen dem ersten Einsatz des zweiten Stoßes angehören und weiterhin müßte die Hauptphase dieses letzteren folgen. Das letztere ist nicht der Fall, sondern man sieht bloß eine Phase langperiodiger Wellen, und dieselben halten, sich ganz allmählich abschwächend, noch an, als die raschen bereits wieder verschwunden sind. Demnach muß der zweite Stoß von einem anderen Herde ausgegangen sein als der erste. Da nun diejenigen Hauptphasenwellen von Erdbeben, welche aus der Richtung der Apenninen bisher zu uns gekommen sind, sich immer durch kurze Perioden ausgezeichnet haben (vergl. z. B. Nr. 39 der Tabelle III) und da ferner auch die oben wiedergegebenen Berichte bald auf einen mehr östlich, bald auf einen mehr westlich gelegenen Herd im Untergrund des Mittelmeeres zu deuten scheinen, so dürfte es am wahrscheinlichsten sein, daß in der Leipziger Aufzeichnung sowohl die langperiodigen wie die übergeordneten kurzperiodigen Wellen solche von Hauptphasen sind und daß also geradezu gleichzeitig ein Stoß südlich bez. südöstlich von Griechenland und ein anderer im jonischen Meer in der geradlinigen Verlängerung der Apenninen stattgefunden hat.

*Fig. 3 und 4. Seismogramme der bulgarischen Beben vom 4. April 1904.* Die beiden heftigen Erdstöße, deren Epizentrum

Digitized by Google

wahrscheinlich dort zu suchen ist, wo Bulgarien, Serbien und die Türkei an einander grenzen, haben die größte Aufmerksamkeit aller seismologischen Stationen dadurch erregt, daß sie ganz gewaltige Ausschläge der Seismometerschreibarme verursachten. In Laibach wanderten die Lichtpunkte der photographisch registrierenden Pendel über die Registrierpapierstreifen hinaus, und in Straßburg wurden die Schreibnadeln des Wiechertschen Seismometers zweimal aus ihrer Fassung geschleudert. Dieses Schicksal bereiteten die seismischen Wellen auch dem Leipziger Apparat, indem hier die Schreibnadel der Ostwestkomponente durch die Hauptphasenwellen des ersten Stoßes, diejenige der Nordsüdkomponente durch die Hauptphasenwellen des zweiten Stoßes zu Boden geworfen wurde. Wie GERLAND in Straßburg solche direkt beobachten konnte, so scheinen auch in Leipzig die Schreibnadeln Hüpfbewegungen ausgeführt zu haben, indem die weiten aufgezeichneten Ausschläge z. T. aus einer Aneinanderreihung von Punkten bestehen, die jedoch auf der photolithographischen Reproduktion, so weit es möglich war, zu vollen Linien ergänzt wurden. Das Seismogramm der Nordsüdkomponente beginnt mit 4 kräftigen Ausschlägen, denen sich Zitterbewegungen überordnen. Nach $2^{3}/_{4}$ Minuten erscheinen rasch zu großer Schwingungsweite anschwellende, langsamere Wellen, während die kurzperiodigen Schwingungen noch fortdauern. Vom Aufhören der letzteren, etwa $11^{h}9^{m}34^{s}$, an dürfte man den Beginn der Hauptphase zu rechnen haben. Auch der zweite Stoß $11^{h}28^{m}46^{s}$ beginnt mit vier Ausschlägen, die aber an Kraft das Dreifache derjenigen des ersten Stoßes erreichen. Nach genau derselben Zeit, nämlich nach $2^{3}/_{4}$ Minuten, folgen auch bei der zweiten Erschütterung die langsameren Wellen, so daß bei der absoluten Gleichartigkeit der Aufzeichnung das zweite Beben offenbar von genau derselben Stelle ausgegangen ist wie das erste. Das Seismogramm der Ostwestkomponente ähnelt dem der Nordsüdkomponente in der auffallendsten Weise, vor allen Dingen zeigt der Vergleich der ersten Einsätze, daß bei denselben die Aufzeichnung der einen das Spiegelbild derjenigen der anderen Komponente ist.

*Fig.* 5 *und* 6. *Seismogramme des bulgarischen Erdstoßes vom* 10. *April* 1904 $9^{h}55^{m}$. Dieser Stoß wurde nach Ortszeit in Bulgarien $10^{h}53^{m}$ wahrgenommen. Die Seismogramme wurden reproduziert, weil der Vergleich mit denen vom 4. April recht deutlich vor Augen führt, wie die geringere Intensität des Bebens

Digitized by Google

an dem Gesamtcharakter der Aufzeichnungen absolut nichts ändert, so daß sofort auf den nämlichen Herd wie bei dem Erdbeben am 4. April geschlossen werden konnte. So verfließt vom ersten Einsatz an bis zum Erscheinen der langsameren Wellen in beiden Fällen genau dieselbe Zeit, ferner wiederholen sich in der Hauptphase die Gruppen stärkster Wellen in der gleichen Zahl. Nur die Dauer der Hauptphase ist bei dem Beben vom 10. April infolge dessen geringerer Intensität eine kürzere.

Erdbebenstation des paläontologisch-geologischen Instituts Leipzig, 30. April 1904.

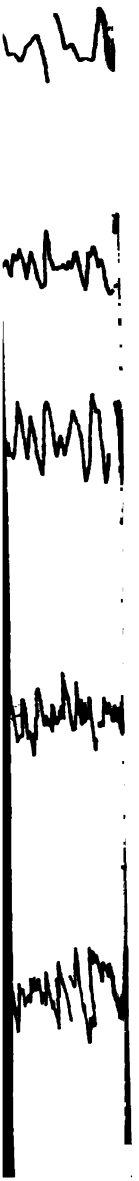
---

Druckfertig erklärt 16. VI. 1904.]

Digitized by Google

Digitized by Google

Ball



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# INHALT.


Seite

*Eduard Riecke*, Ergebnisse der von Dr. Cuomo auf Capri ausgeführten Messungen der Elektrizitätszerstreuung in der freien Luft . . . . . 250

*J. Thomae*, Parameterdarstellung der Schnittkurve zweier Flächen zweiter Ordnung . . . . . 257

*M. Krause*, Anwendungen der elliptischen Funktionen auf die Theorie der Kurbelbewegung . . . . . 273

*F. Etzold*, Vierter Bericht der Erdbebenstation Leipzig. Die in Leipzig vom 1. Juli 1903 bis 30. April 1904 von Wiecherts Pendelseismometer registrierten Erdbeben und Pulsationen. Mit einer Tafel und drei Tabellen . . . . . 289



Druck von B. G. Teubner in Leipzig.



Digitized by Google

Loc 1726.9
Title-Pag.

# BERICHTE

ÜBER DIE

# VERHANDLUNGEN

DER KÖNIGLICH SÄCHSISCHEN

## GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG

MATHEMATISCH-PHYSISCHE KLASSE.

SECHSUNDFÜNFZIGSTER BAND.

1904.

# V.

LEIPZIG
BEI B. G. TEUBNER.
1905.

Digitized by Google

Digitized by Google

## SITZUNG VOM 9. JUNI 1904.

Erledigung verschiedener Eingänge und des Tauschverkehrs.

An Stelle des am 1. Mai d. J. verstorbenen Herrn W. His wird Herr F. Zirkel zum Sekretär der mathematisch-physischen Klasse gewählt.

Die Herren H. Credner und P. Flechsig erstatten Bericht über die Londoner General-Versammlung der internationalen Assoziation der Akademien.

## SITZUNG VOM 4. JULI 1904.

Herr W. Ostwald gibt einen Bericht über die augenblickliche Entwickelung des Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaften und Technik in München.

Vortrag des a. o. M. Herrn Held: „Zur weiteren Kenntnis der Nervenendfüße und zur Struktur der Außenglieder der Sehzellen" (zum Abdruck in den Abhandlungen).

Die Klasse beschließt, zur Herausgabe der Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften ebenfalls einen Beitrag zu gewähren; Herr Hölder wird vorläufig als Delegierter in die betr. Kommission eintreten.

An Stelle des verstorbenen Herrn W. His wird Herr E. Hering zum Mitglied der Kommission der v. Roemerschen Stiftung gewählt.

## GEMEINSAME ÖFFENTLICHE SITZUNG BEIDER KLASSEN ZUR VORFEIER DES GEBURTSTAGS SEINER MAJESTÄT DES KÖNIGS GEORG AM 1. AUGUST 1904.

Der Sekretär der math.-phys. Klasse hält eine die Bedeutung des Tages würdigende Ansprache.

Vortrag des Herrn Bruns über Uhrenprüfungen an der hiesigen Sternwarte.

Vortrag des Herrn Chun über Untersuchungen, ausgeführt an Bord der Valdivia während der Fahrt der Deutschen Tiefsee-Expedition.



Digitized by Google

# GEMEINSAME ÖFFENTLICHE SITZUNG BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1904 ZUR ERINNERUNG AN LEIBNIZ.

Der Sekretär der math.-phys. Klasse gedachte bei Eröffnung der Sitzung der Verdienste von LEIBNIZ unter Erinnerung an die heutige 188. Wiederkehr seines Todestages und hielt darauf folgende Ansprache:

„In der allgemeinen öffentlichen Sitzung zum Gedächtnis von Leibniz pflegen wir auch das Andenken derjenigen zu feiern, die unserer Gesellschaft im Verlauf des Jahres entrissen worden sind. Unsere diesjährigen Verluste werden als besonders herbe empfunden: wenn wir einmal das Hinscheiden verhältnismäßig zahlreicher und dabei gerade hochverdienter und teuer gewesener Mitglieder zu beklagen haben, so ist aber auch der erhabene und huldvolle Protektor unserer Gesellschaft, Se. Majestät unser König Georg, inzwischen zur ewigen Ruhe eingegangen.

Noch am 1. August bei der Vorfeier seines Geburtstages durften wir an dieser Stätte die Hoffnung aussprechen, daß die deutschen und österreichischen Heilquellen dem vielgeliebten Herrscher neue Kräftigung verleihen würden, aber in der Nacht zum 15. Oktober ist er in Pillnitz sanft entschlafen. Nun ist ihm, dem nichts Menschliches fremd geblieben, Frieden nach vielem Leid geworden. Denn unter zunehmender Kränklichkeit und von herbem Schicksal getroffen, seines jüngsten Sohnes und seiner jugendlichen Nichte Maria Isabella durch den Tod beraubt, hat der heimgegangene, gütige und milde, weise und gerechte Regent unter Sorgen die Krone getragen; aber der eiserne Pflichteifer lieh ihm die Kraft, als Vorbild nie ermüdender Arbeit bis zum letzten Atemzug an seinem Platze auszuharren, bis auch er seine Ruhe in der Gruft der Wettiner gefunden. Er konnte wahrlich mit dem Bewußtsein scheiden, sein Leben lang in Treuen darnach gestrebt zu haben, als Mensch und als Fürst seine Schuldigkeit zu erfüllen. Auf den mannigfachsten Gebieten hat der edle Dahingeschiedene seine hohe geistige Begabung, seine gediegene Bildung, zu der er noch

Digitized by Google

bei dem greisen Ernst Moritz Arndt und bei Perthes in Bonn den Grund gelegt, daneben auch seine warme Humanität rastlos betätigt. Wie ernst faßte er seine frühere Stellung in der Finanzdeputation der Ersten Ständekammer auf, welcher er, dem Klarheit der Rede und strenge Sachlichkeit zu eigen war, nicht nur dem Namen nach Vorsitzender sein wollte, mit welch' wirklicher Kennerschaft hat er in erster Linie beigetragen zur Erhaltung sächsischer Kunstdenkmäler, wie der Albrechtsburg, des Doms in Meißen, der Goldenen Pforte in Freiberg. Das war dann aber derselbe Prinz, der mit der anderen Schar tapferer fürstlicher Heerführer vor 34 Jahren in großer Zeit auf den französischen Schlachtfeldern die deutschen Stämme von Sieg zu Sieg geleitete, um dessen Sarg jetzt die Namen St. Privat, Nouart, Beaumont, Sedan und Villiers strahlen durften, durch die seine Gestalt neben der des königlichen Bruders fortlebt in der Dankbarkeit unseres ganzen Volkes. Seinem Lande hat unser König alle Segnungen einer aufgeklärten und umsichtigen Regierung zuteil werden lassen. Mit hoher Verehrung haben wir zu unserem Schirmherrn aufgeblickt, mit warmem Dank uns der unwandelbar wohlwollenden Gesinnung erfreut, die er den Bestrebungen unserer Gesellschaft jederzeit gewährt hat. Unter seinem Schutz war dem gelehrten Leben Ruhe und Bestand verheißen, der stillen ernsten Arbeit günstig. Noch im verflossenen Februar hat mitten zur Winterszeit wie ein warmer Sonnenstrahl auf unsere Universität und Stadt geleuchtet der Besuch des Allerhöchsten Herrn, mit dem raschen Blick für das, was not tut, mit dem offenen Ohr für das, was uns bewegt. Niemals sind wir an der Zuversicht irre geworden, daß, solange dieser König die Herrschaft übt, auch unsere lehrende und forschende Tätigkeit durch keine verständnislosen Gewalten getrübt, von keinem Druck belastet werde, daß unsere Arbeiten nur die eigene Überzeugung zur Richtschnur zu haben fortfahren sollen und daß die Stellung der Wissenschaft im Staat nicht niedriger bemessen werde, als die aller anderen Kräfte, die dem Wohl des Ganzen dienen. Dafür bürgte das feinsinnige Verständnis



Digitized by Google

unseres treuen Protektors für die uns obliegenden Aufgaben und ihre fundamentalen Bedürfnisse, dafür die Gewißheit, daß er allezeit geruhen werde, unseren Bitten und Wünschen zugänglich zu sein. Ave, pia anima et candida!

Unter den seit der letzten Novembersitzung dahingeschiedenen Mitgliedern der Gesellschaft befindet sich eines, dessen Verlust wir noch im verflossenen Dezember zu beklagen hatten, Hr. Geh. Hofrat Dr. Sophus Ruge, o. Professor der Geographie und Ethnologie an der Technischen Hochschule in Dresden, der Gesellschaft angehörig seit dem 25. Juli 1894, ein namhafter und eifriger Forscher insbesondere auf dem Gebiete der Geschichte der Geographie und der Entwicklung der Kartographie; für unsere Abhandlungen hat er als wertvollen Beitrag geliefert: Topographische Studien zu den portugiesischen Entdeckungen an den Küsten Afrikas (1903).

Die anderen hochgeschätzten Mitglieder, welche die Königl. Gesellschaft der Wissenschaften im laufenden Jahre durch den Tod verloren hat, sind: Hr. Geh. Rat Dr. Wilhelm His, ord. Professor der Anatomie in Leipzig, Sekretär unserer mathematisch-physischen Klasse; Hr. Dr. Otto Böhtlingk in Leipzig, Kaiserl. russ. Geh. Rat, Exzellenz; Hr. Geh. Hofrat Dr. Friedrich Ratzel, ord. Professor der Geographie in Leipzig; Hr. Dr. Ernst Hugo Berger, a. o. Professor der Geschichte der Erdkunde und historischen Geographie in Leipzig; Hr. Geh. Rat Clemens Winkler in Dresden, vormals Professor der Chemie an der Bergakademie in Freiberg. Die Zahl dieser Mitglieder ist eine so schmerzlich große und ihre Verdienste um die Wissenschaft bedingen eine so eingehende Würdigung, daß es schwierig gewesen wäre, an dem heutigen Abend ihrer aller Andenken einen Nekrolog zu widmen; dazu kommt, daß zwei Herren, welche gütigst übernommen haben, diese Ehrenschuld mit zu lösen, heute am Erscheinen gehindert sind."

Die Gedächtnisrede auf W. His wurde alsdann von Herrn Marchand, diejenige auf O. Böhtlingk von Herrn Delbrück aus Jena, die auf Cl. Winkler von Herrn Beckmann gehalten.

Digitized by Google

Vortrag des Herrn Leskien über die Bedeutung der kirchenslavischen Sprache für die Kultur der Slaven, die der griechisch orientalischen Kirche angehören.

Herr Credner legt einen weiteren Bericht des Herrn Etzold über Beobachtungen auf der Leipziger Erdbebenstation vor (zum Abdruck in den Berichten).

## SITZUNG VOM 5. DEZEMBER 1904.

Bei Eröffnung der Sitzung teilt der Sekretär mit, daß laut eingegangener ministerieller Mitteilung Se. Majestät der König Friedrich August allergnädigst geruht haben, das Protektorat über die kgl. sächsische Gesellschaft der Wissenschaften zu übernehmen.

An das kgl. sächsische und das kgl. preußische Kultusministerium sind Dankschreiben ergangen für die zur Erinnerung an das Jubiläum der Berliner Akademie hergestellte und der Gesellschaft geschenkweise zugewandte silberne Plakette.

Die Klasse beschließt, daß Herr Credner an den im nächsten Frühjahr zur Vermittelung zwischen den Akademien und der internationalen seismologischen Sozietät in Aussicht genommenen Verhandlungen als Vertreter der Gesellschaft und zur Wahrung ihrer Interessen teilnehmen möge.

Auf Wunsch des Museums von Meisterwerken der Naturwissenschaft und Technik in München sollen demselben als aktive Unterstützung die Schriften der Klasse für die Museumsbibliothek überlassen werden.

Es wird beschlossen, für die in den Berichten erscheinenden Nekrologe einen stärkeren Durchschuß zu wählen.

Erledigung verschiedener anderweitiger Eingänge sowie des Tauschverkehrs.

Über die Präsentation eines neuen Mitglieds wird statutenmäßig in der nächsten Sitzung abgestimmt werden.

Herr v. Oettingen legt einen weiteren Band seiner Fortsetzung von Poggendorffs biographischem Lexikon als Geschenk vor und knüpft daran vergleichend statistische Angaben über die sich daraus ergebende Bibliographie der exakten Wissenschaften.

Herr Correns, a. o. M., legt vor und bespricht zehn entwickelungsgeschichtlich bemerkenswerte Briefe von Gregor v. Mendel an Karl Naegeli (zum Abdruck in den Abhandlungen).

Herr Scheibner gibt Zusätze zu einer früheren Abhandlung über Gleichungen 5. und 6. Grades.

Digitized by Google

GEMEINSAME ÖFFENTLICHE SITZUNG
BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1904.

# Fünfter Bericht der Erdbebenstation Leipzig.

$51^{0}\,20'\,6''$ nördl. Br., $49^{m}\,34^{s}$ östlich von Greenwich.

## I. Die in Leipzig vom 1. Mai bis 31. Oktober 1904 registrierten Erdbeben und Pulsationen.

## II. Über die Aufzeichnung der infolge des Läutens der Kirchenglocken zu Leipzig erzeugten Bodenschwingungen.

Mit einer Tafel und zwei Tabellen.

Von

Franz Etzold.

Vom 1. Mai bis 31. Oktober dieses Jahres gelangten in der Erdbebenstation Leipzig 36 Erdbeben zur Aufzeichnung. Der Herd der bei weitem meisten derselben ist in großer Ferne zu suchen, zur Zeit aber hier noch von keinem dieser Fernbeben das Epizentralgebiet bekannt geworden. Die gleiche Ungewißheit herrscht über die Herkunft der aus größerer Nähe (bis etwa 1500 km) zu uns gelangten seismischen Wellen, mit einziger Ausnahme des skandinavischen Bebens vom 23. Oktober. Den Herd von mehreren der aufgezeichneten, offenbar ziemlich nahen Erdbeben würde man auf Grund der Ausbildung älterer Seismogramme in Italien zu suchen geneigt gewesen sein, doch fällt auf, daß die durch Alfani verfaßten Berichte[1]) über die am

1) Bollettino sismologico dell' Osservatorio Ximeniano. Firenze, Maggio — Settembre 1904.

*Nachtrag:* Das soeben während der Korrekturlesung eingegangene Bollettino Ottobre führt die sämtlichen in Leipzig während des Oktober wahrgenommenen sieben Beben als von den Florentiner Seismometern registriert auf, unter ihnen auch das skandinavische Beben vom 23. Oktober (1. Einsatz $11^{h}\,32^{m}\,30^{s}$).

Digitized by Google

Osservatorio Ximeniano in Florenz erhaltenen Aufzeichnungen gerade von diesen seismischen Ereignissen nichts erwähnen. Im übrigen entsprechen die Florentiner Berichte den vorliegenden Leipziger Registrierungen sehr gut, indem von den bis zum letzten September in Leipzig aufgezeichneten 29 Beben 20 auch in Florenz beobachtet wurden und hinsichtlich der Zeitangaben vielfach eine ausgezeichnete Übereinstimmung besteht. Ein eigentliches Nahbeben hat sich in der Berichtszeit in Leipzig nicht wahrnehmbar gemacht, alle die „Erdstöße", über die aus dem Vogtlande und aus der Greizer Gegend Notizen in die Zeitungen gebracht wurden, waren nicht stark genug, um selbst an Ort und Stelle von einer größeren Anzahl der Bewohner oder gar allgemein bemerkt zu werden und bis Leipzig reichende Wellen zu erregen. Der bebenreichste Monat dieses Sommerhalbjahres war der Juni, in dem neun Fernbeben zur Registrierung gelangten. Von diesen drängen sich sechs auf die Tage vom 24. bis 27. Juni zusammen, welche von dem nämlichen Herde ausgegangen sein dürften, da sich ihre Seismogramme, so weit sie kräftig genug sind, um eine Phasengliederung aufzuweisen, in hohem Grade ähneln. Von dreien dieser seismischen Ereignisse hat die Firma Bosch in Straßburg in ihrem Katalog Nr. 17 die in ihrer Privat-Erdbebenwarte von ihrem photographisch registrierenden Horizontalpendel aufgezeichneten Seismogramme veröffentlicht (25. Juni $12^h 57^m$ und $22^h 12^m$, 26. Juni $12^h 15^m$). Dem vorliegenden Berichte sind auf Tafel VI die durch das Wiechertsche Seismometer zu Leipzig erhaltenen Seismogramme vom 25. Juni $22^h 12^m$, ferner diejenigen vom 9. Oktober $14^h 57^m$ sowie die vom 23. Oktober $11^h 29^m$ (skandinavisches Beben) in photolithographischer Reproduktion beigegeben, weil sie alle eine seither noch nicht beobachtete Ausbildung zeigen.

### Die in Leipzig vom 1. Mai bis 31. Oktober 1904 aufgezeichneten Seismogramme.

Siehe umstehende **Tabellen I und II.**

### Die in Leipzig vom 1. Mai bis 31. Oktober 1904 aufgezeichneten Pulsationen.

Pulsatorische Bewegungen gelangten während der ganzen Berichtszeit in Leipzig nur in höchst schwacher und dürftiger Weise zur Aufzeichnung. Dieselben verteilen sich auf folgende Tage:

Digitized by Google

*Mai:* 2./3. (schwach), — 7./10., — 20./21., — 22./23., — 2
(am stärksten vom ganzen Monat), 28./29.;
*Juni:* 3./4., — 20./21., — 27./28. (stets ganz schwach und
einzelt);
*Juli:* 5./6., — 19./21. (ganz schwach);
*August:* 9./10., — 14./15., — 17./18. (OW-Komponente
NS-Komponente schwache Wellen mit 6—12, im Durch
8 Sekunden Periode), 23./24.;
*September:* 12./14. (schwach), — 18./19.;
*Oktober:* 4./5. ($20^h 15^m$ bis $21^h 5^m$, — $21^h 14^m$ bis $21^h 50$
die NS-Komponente Wellen aufgeschrieben, deren Ampli
nahezu 1 mm erreichen, während die Perioden 50—30 Sek
lang sind. Auch weiterhin in der Nacht erscheinen wi
holt Wellen mit 15, 20 und mehr Sekunden langen Per
Auf dem Streifen der OW-Komponente sind alle diese W
auch vorhanden, jedoch wesentlich schwächer. Eine
zeichnung derartiger langer gleichmäßiger Wellen hat
Leipziger Seismometer bisher noch nie geliefert), 18
(deutlich), 29./31. (ganz schwach).

## Über die Aufzeichnung der infolge des Läutens der Kirchenglock zu Leipzig erzeugten Bodenschwingungen.

Schon seit der Aufstellung des Leipziger Seismometers w
beobachtet, daß die winzigen chronischen Zitterbewegung
gelegentlich für die Dauer einiger Minuten durch die Aufzeich
etwas stärkerer, sehr regelmäßiger Erzitterungen ersetzt we
Man sieht nämlich, daß die Periode der minimalen Vibrati
ganz allmählich wächst, wobei sich gleichzeitig auch deren
plitude vergrößert, daß die erreichten größten Maße eine Zeit l
festgehalten werden und daß endlich diese langsameren und stärke
Erzitterungen wieder ganz allmählich in die chronischen, rasche
übergehen. Auf Grund oft angestellter Zählungen läßt sich k
statieren, daß auf den Raum zwischen zwei Minutenmarkierun
69 bis 74 solcher leichter Wellen fallen. Da nun die A
zeichnung durch die Zeitmarkierung nach jeder Minute auf
Dauer von etwa 2 Sekunden unterbrochen wird[2]), so würd
während der vollen Minute im Durchschnitt 75 jener klein

1) Diese Berichte 1902, S. 292.
2) Diese Berichte 1902, S. 290.

Digitized by Google

## Tabelle I (zu Seite 303).

| oden d der ptphase | Bemerkungen über die Ausbildung der Seismogramme |
|---|---|
| o—18 | Die Aufzeichnung weist ostindischen Typus (diese Berichte 1903, p. 37) auf. Die Schwingung der Hauptphase mit 3 mm Amplitude besitzt eine Periode von 25 Sek. |
| 1—17 | Flache, langsame Wellen. |
| o—18 | Flache, langsame, durch die Tagesstörungen stark beeinträchtigte Wellen. |
| o—6 | Der namentlich von der NS.-Komponente verzeichnete Zug von langsam anschwellenden und wieder abnehmenden Wellen erinnert sehr an Pulsationen, hebt sich aber hinsichtlich der Amplitudenstärke und Periodendauer so scharf von den schwachen Pulsationen der gleichen Nacht ab, daß an eine seismische Ursache gedacht werden muß. |
| 24 | Flache langsame Wellen, am kräftigsten $1^h\,51^m$ bis $1^h\,54^m$. |
| 1—12 | Auf die mit schwächsten Erzitterungen beginnende erste folgt die zweite Vorphase, die sich durch auffallend kräftige Ausschläge scharf von jener abhebt, aber ganz allmählich in die aus relativ kurzperiodigen und schwachen Wellengruppen zusammengesetzte Hauptphase übergeht. |
| 1,6 | Rasche Ausschläge, die zweimal ruckartig wachsen und weiterhin ganz allmählich abnehmen. |
| 4—8 | Leichte Kräuselwellen. |
| o—18 | Leichte Vorphasen, ganz flache Hauptphasen. |
| 9—21 | Das Seismogramm gleicht im höchsten Grade dem folgenden, erscheint nur — namentlich in seinem Anfangsteil — durch die Tagesstörungen etwas beeinträchtigt. |
| 7—16 | Siehe Taf. VI, Fig. 1 und 2, sowie die Tafelerklärung S. 307. |
| 6—15<br>4—13 | Die aufgezeichnete Hauptphase ähnelt der von Nr. 10 und 11, nur sind die Wellen auf die angegebenen Maße abgeflacht. |
| o—18 | Lange, flache Wellen, namentlich auf dem Streifen der OW.-Komponente. |
| 5—18<br>8 bei OW.) | Das Seismogramm ähnelt in hohem Maße Nr. 10 und Nr. 11. |
| 20 | Ganz flache Wellen, namentlich auf dem Streifen der OW.-Komponente. |
| 20 | Lange flache Wellen. |
| bis 2 | Crescendo-decrescendo-Zickzacklinie, stärkste Schwingungen $6^h\,34^m\,30^s$. |
| —2,6 | Sehr scharf gezähnelte Zickzacklinie. |

Digitized by Google

Digitized by Google

## Tabelle II (zu Seite 303).

| en der tphase | Bemerkungen über die Ausbildung der Seismogramme |
|---|---|
| —16 | Sehr flaches, an den ostindischen Typus erinnerndes Seismogramm. |
| 1 | Sehr schwache Zickzacklinie. |
| 11 | Lange flache Wellen, die zwischen $3^h\,33^m$ und $3^h\,38^m$ die angegebenen Maße aufweisen. |
| 11 | Das Seismogramm ist durch die Tagesstörungen erheblich verunstaltet, mit großer Wahrscheinlichkeit dürfte es auf ein Beben in Zentralasien zurückzuführen sein (kontinentaler Typus). |
| 13 | Durch den herrschenden Wind sind die aufgezeichneten Linien sehr unruhig geworden, so daß das Erkennen von seismischen Wellen erschwert ist, doch dürften die leichten raschen Wellen ca. $21^h\,8^m$ die zweite Vorphase und die längeren und regelmäßigeren, welche $21^h\,14^m$—$21^h\,18^m$ besonders deutlich sind, die Hauptphase eines Bebens wiedergeben, das sich in mäßiger Entfernung abgespielt hat. |
| 14<br>16 | An dem namentlich von der NS.-Komponente sehr kräftig aufgezeichneten Seismogramm fällt auf, daß sich langperiodige Wellen im ersten Teil der Hauptphase nicht bemerklich machen, so daß die Abgrenzung der Phasen unsicher und der Beginn der Hauptphase möglicherweise erst auf $11^h\,46^m\,30^s$ zu legen ist. |
| —17 | Dem vorigen ähnlich entwickeltes, nur wesentlich flacheres Seismogramm. |
| 25 | Über die Tagesstörungen gewinnen allmählich seismische Wellen die Oberhand und erreichen $13^h\,16^m$ etwa $40^s$ Schwingungsdauer, die stärkste Schwingung (siehe die angegebenen Maße) erfolgt $13^h\,19^m$, dann werden die Wellen rasch wesentlich flacher. |
| 30 | Lange flache Wellen. |
| 25 | Das Seismogramm ist ähnlich Nr. 26, nur wesentlich flacher. |
| 1 | Scharfe Crescendo-decrescendo-Zickzacklinie. |
| 15 | Gruppen von langen flachen Wellen. |
| 17<br>bei OW.) | Das Seismogramm ähnelt dem unter Nr. 24, die in der zweiten Zeile angegebenen langen Perioden wurden bei der OW.-Komponente gemessen, deren Aufzeichnung viel flacher erscheint als die der NS.-Komponente. |
| —14 | Lange flache Wellen. |
| —10 | Siehe Taf. VI, Fig. 3 und 4, sowie die Tafelerklärung S. 308. |
| —8 | Kräuselwellen, ähnlich Nr. 8. |
| —1,5 | Siehe Taf. VI, Fig. 5 und 6, sowie die Tafelerklärung S. 308. |
| —12 | Lange, flache Wellen. |

Digitized by Google

Digitized by Google

Schwingungen aufgezeichnet werden, so daß deren Periode eine Länge von $\frac{60}{75} = 0{,}8$ Sekunden besitzt. Weniger gleichmäßig ist die jeweils erreichte Schwingungsweite; am häufigsten wurde dieselbe auf den Streifen der NS-Komponente mit 0,5 mm bestimmt, doch wurden nicht selten auch Beträge bis zu 0,75 mm und darüber konstatiert. Da solch relativ rasche Schwingungen von dem Leipziger Seismometer in 250facher Vergrößerung aufgezeichnet werden, so ergibt sich, daß der Standort des Seismometers während der Aufzeichnung dieser auffälligen Vibrationen in horizontaler nordsüdlicher Richtung um den Betrag von $\frac{0{,}5}{250} = 0{,}002$ mm hin- und herbewegt wird. Die OW-Komponente registriert zwar die gleichen Schwingungen, doch bleiben ihre Amplituden hier gewöhnlich so klein, daß deren Messung nur möglich würde, wenn man die Registrierlinie photographisch vergrößerte oder das Mikroskop zu Hilfe nähme.

Meist ließ sich feststellen, daß die Aufzeichnung derartiger Erzitterungen eine Zeitdauer von etwa 3 Minuten umfaßte, von denen zwei auf die gleichmäßigen Schwingungen, etwa $^2/_3$ auf deren Anschwellen und $^1/_3$ Minute auf das Dahinschwinden kommen. Gelegentlich passierten den Apparat aber auch $^1/_4$ Stunde lang solche gleichmäßige leichte Vibrationen.

Die Ursache dieser höchst merkwürdigen, immer wiederkehrenden, schwachen Bodenerzitterungen blieb lange unklar. An seismische Ereignisse konnte bei ihrer großen Gleichmäßigkeit nicht gedacht werden. Möglich schien — worauf bei der Beschreibung des Seismogrammes vom 25. Mai 1902 hingedeutet wurde[1]) — an irgend eine Erschütterung durch die bewegte Luft zu denken, besonders da Belar[2]) vermittels des Vicentinischen Apparates erhaltene und durch fernen Wind verursachte, sehr ähnliche Aufzeichnungen beschrieben und abgebildet hat, doch halten durch Sturm hervorgerufene Bodenpulsationen gewöhnlich stunden- und tagelang an, während die in Rede stehenden Erzitterungen, wie erwähnt, meist nur wenige Minuten, höchstens aber eine Viertelstunde andauern. Klarheit brachte endlich die Neujahrsnacht 1902/3, indem die Registrierlinien der ganzen ersten Jahresstunde mehrmals viertelstundenlang den beschriebenen

1) Diese Berichte 1902, S. 311.

2) Beiträge zur Geophysik, Erg.-Bd. I, S. 322 und Taf. VI, Fig. 17 u. 18.

Digitized by Google

scharfen Zickzackverlauf aufweisen. Bei diesem Anblick mußte man sofort an das Glockengeläute denken, mit dem das anbrechende Jahr begrüßt wird.

Daß die so oft aufgezeichneten leichten Bodenschwingungen wirklich stets durch das Läuten der Kirchenglocken hervorgerufen werden, ließ sich nunmehr leicht konstatieren, indem sie sich jeden Sonntag morgens und abends zur Zeit des Kirchengeläutes registriert vorfanden und -finden, indem sie ferner in viertelstundenlangen Zügen an den Tagen wiederkehren, an denen das Oster-, Pfingst- oder Weihnachtsfest eingeläutet wird. Schließlich mußte sich, wenn der kausale Zusammenhang zwischen dem Glockengeläute und der seismometrischen Aufzeichnung wirklich besteht, die letztere auch zeigen, als der Klang aller Glocken die Trauer Sachsens über das Hinscheiden König Alberts und später König Georgs verkündete, und in der Tat ging — wie Fig. 8 auf der beigegebenen Tafel zeigt — auch bei diesem ernsten Anlaß ein Beben durch das Land.

Die dem Leipziger Seismometer nächst stehende Kirche ist die Johanniskirche, welche sich, in Luftlinie gemessen, in einem Abstande von 625 m genau nördlich von jenem befindet. Daß die sich aufzeichnenden Wellen wirklich in der Hauptsache von dieser Kirche her, also mit nordsüdlicher Richtung an das Seismometer gelangen, viel abgeschwächter dagegen von der 830 m westsüdwestwärts stehenden Peterskirche und den noch weiter entfernten Kirchen aus den Seismometerstandort erreichen, ergibt sich aus der Stärke ihrer Aufzeichnung auf den Streifen der Nordsüdkomponente gegenüber derjenigen der Ostwestkomponente. Daß sich aber anderseits doch auch durch die Glocken erregte Bodenwellen aus größerer Entfernung als 625 m bis zum Seismometer fortpflanzen, lehren die Aufzeichnungen, welche erhalten werden, wenn sämtliche Leipziger Glocken ertönen. Man sieht alsdann, daß die Registrierung der Ostwestkomponente sich an Stärke jener der Nordsüdkomponente nähert und daß die aufgezeichneten Amplituden periodisch anschwellen und zurückgehen, je nachdem sich die von verschiedenen Punkten heraneilenden Wellen gegenseitig verstärken oder hemmen (siehe Tafel VI, Fig. 8 besonders gegen das rechte Ende hin).

Von hohem Interesse ist schließlich die Abhängigkeit der Stärke der durch die Glocken erregten Bodenschwingungen von der Temperatur bez. der Durchfeuchtung des Erdreiches. Je

Digitized by Google

länger nämlich die Hitzeperiode des vergangenen Sommers andauerte, desto geringfügiger wurden die Amplituden der aufgezeichneten Schwingungen, so daß in der zweiten Hälfte des August und im September nur noch schwache Spuren derselben erkennbar waren. Man geht wohl nicht fehl, wenn man annimmt, daß der Boden mit der infolge längerer Erwärmung zunehmenden Austrocknung die Leitfähigkeit für derartige schwache oberflächliche Wellen einbüßt. Nicht minder auffällig ist die Beobachtung, daß auf den Registrierpapieren die sonst durch das Glockengeläute erzeugten Schwingungsaufzeichnungen gleichfalls fehlen, wenn der Boden durch harten Frost erstarrt. So läßt sich beispielsweise an folgenden drei Sonntagen, dem 3., 24. und 31. Januar dieses Jahres, in den Registrierlinien keine Spur jener Schwingungen erkennen. An diesen Tagen betrug die mittlere Temperatur nach freundlicher Mitteilung der hiesigen Universitätssternwarte — 4,5, — 2,75, bez. — 0,75° C.

Selbstverständlich entsprechen die zur Aufzeichnung gelangenden Schwingungen keineswegs denjenigen der Glocken, vielmehr wird der Kirchturm nach Art eines elastischen Stabes durch das Läuten der in ihm aufgehängten Glocken zum Schwingen gebracht, seine Schwingungen werden auf den Boden übertragen, in den er gegründet ist, und gelangen durch denselben zum Standorte des Seismometers. Da nun bei Frost keine derartigen Vibrationen zur Aufzeichnung kommen, so ist anzunehmen, daß die durch die Kälte bewirkte Erstarrung des Bodens auf den Kirchturm wirkt wie der Schraubstock, in den man einen elastischen Stab spannt, d. h. daß die den Turm durchlaufenden Schwingungen in der Höhe der Erdoberfläche reflektiert werden.

## Tafelerklärung.

*Fig. 1 und 2. Seismogramme des Fernbebens vom 25. Juni 1904, $22^h\,12^m\,5^s$.* Wie bereits in der Einleitung erwähnt, ist das Epizentralgebiet dieses Bebens hier noch nicht bekannt. Die Aufzeichnung desselben auf dem Streifen der NS-Komponente (Fig. 1) weist scharfe Einsätze in der ersten und zweiten Vorphase auf, der Übergang der letzteren in die Hauptphase dagegen ist ein ganz allmählicher. Der Beginn der Hauptphase wurde auf $22^h\,37^m\,30^s$ gelegt, weil von da ab die kurzperiodigen Schwingungen fehlen, welche sich den ersten langperiodigen noch überordnen. In seiner

Digitized by Google

Gesamtlänge wurde das Seismogramm nicht reproduziert, weil die Abbildung der sich noch $^3/_4$ Stunden lang bis zum völligen Verschwinden hinziehenden Wellen wohl kaum von Interesse sein kann. Punkt $A'$ schließt an $A$ an. — Auf Fig. 2, der Aufzeichnung der Ostwestkomponente, ist der erste Einsatz viel weniger deutlich als bei der Nordsüdkomponente.

Die gleiche Entwickelung und Gliederung, wie das eben erörterte Seismogramm, weist das vom 25. Juni $15^h\,57^m$ auf; auch das vom 27. Juni $1^h\,20^m$ ist ihm sehr ähnlich, nur sind seine Wellen besonders in der Hauptphase viel schwächer.

*Fig. 3 und 4, Seismogramme vom 9. Oktober 1904, $14^h\,57^m$.* Das Epizentralgebiet des Bebens, welches diese höchst eigentümlichen Aufzeichnungen geliefert hat, ist gleichfalls bis jetzt nicht bekannt geworden. Dem mit einem gewaltigen Ausschlage beginnenden, infolgedessen außerordentlich scharfen ersten Einsatze folgen eine Reihe raschperiodiger, an Energie immer schwächer werdender Schwingungen und bereits nach 247 Sekunden die Wellen der zweiten Vorphase, die bei beiden Komponenten sich gleichfalls sehr scharf von denen der ersten Vorphase abheben. In auffälligem Mißverhältnisse, und zwar bei der Aufzeichnung der NS-Komponente noch mehr als bei derjenigen der OW-Komponente, steht zu dieser überraschend scharfen und kräftigen Vorphasenentwickelung die geradezu dürftige der Hauptphase. Nach der kurzen Vorphasendauer zu schließen, muß sich das Beben in nicht sehr großer Entfernung abgespielt haben.

*Fig. 5 und 6. Seismogramme des skandinavischen Bebens vom 23. Oktober 1904, $11^h\,29^m$.* Dieses Beben hat infolge seiner für sein Epizentralgebiet ganz ungewöhnlichen Heftigkeit und durch die Größe des Gebietes seiner Fühlbarkeit für Menschen allgemeines Aufsehen erregt. Es wird wahrscheinlich an allen europäischen Stationen aufgezeichnet worden sein, so daß seine hier wiedergegebenen Leipziger Seismogramme nur einen kleinen Beitrag zu dem seiner monographischen Bearbeitung zur Verfügung stehenden Beobachtungsmateriale liefern dürften. Auffällig an diesen Seismogrammen ist vor allem wohl die kurze Dauer der Perioden, indem sich keine solchen mit einer 1,5 Sekunden überschreitenden Zeitlänge auffinden lassen. Während die seismometrischen Registrierungen der nahen vogtländischen Erdstöße sich dadurch auszeichnen, daß ein Abschnitt der Hauptphase von relativ langsamen, ruhigen und gleichmäßigen Schwingungen

Digitized by Google

ausgefüllt wird[1]), gerade wie dies bei den Fernbeben der Fall ist, findet sich in der Aufzeichnung des skandinavischen Bebens kein derartiger, aus gleichmäßigen Wellen bestehender Teil.

Auf Grund der vorliegenden Zeitungsberichte scheint das Beben seinen Herd in der Nähe des Wenersees gehabt zu haben, einer Gegend, die sich schon oft als Epizentrum bewährt hat. Das stark erschütterte Gebiet war auffallend groß, denn in Hjo, am Westufer des Vetter-Sees, wurde ein Kirchengiebel beschädigt, und in Stromstadt, am Skagerrak nahe der norwegischen Grenze, stürzten Schornsteine ein. An beiden Orten besaßen somit die seismischen Äußerungen ungefähr gleiche und zwar beträchtliche Stärke, obwohl dieselben über 70 km voneinander entfernt liegen. Das Beben gab sich kund in wellenförmigen Hebungen und Senkungen des Erdbodens, zwischen denen in kurzen Intervallen ruckartige Stöße von unten her fühlbar wurden; dabei hörte man in der Erdtiefe dumpfes Grollen und explosionsartige Knalle, das alles in einer Dauer von 1,5 bis 4 Minuten. Auf die an derartige Ereignisse nicht gewöhnte Bevölkerung wirkte das Erdbeben natürlich im höchsten Grade schreckenerregend. Die Leute stürzten aus dem sonntäglichen Gottesdienst ins Freie und sahen hier, wie die Straßen, Bäume, Wohnhäuser sich hoben, senkten und schwankten. Die Erdbewegung war stark genug, um voll geladene Güterzüge zum Fortrollen zu bringen.

Was das Gesamtgebiet der Fühlbarkeit anlangt, so wurden die Erschütterungen nach Norden zu bis nach Namsos, unter $64{,}5^0$ nördlicher Breite, also bis zu einer Entfernung von etwa 230 km, allenthalben verspürt. Nach Osten zu wurde das Beben in Stockholm zwar bloß so stark wie das Rollen eines Eisenbahnzuges empfunden, doch liegt noch eine Meldung über seine Beobachtung aus dem 750 km entfernten Rihimäki nördlich von Helsingfors vor. Während nach Westen zu das Meer seiner terrestren Ausdehnung bald eine Grenze setzte, wurde in südlicher Richtung die Ostsee von den seismischen Wellen überschritten: in Jütland und auf den dänischen Inseln empfand man das Beben ziemlich allgemein; von besonderem Interesse aber ist es, daß auch in den preußischen Ostseeprovinzen, deren Bewohner bis dahin kaum je ein Erdbeben gefühlt hatten, an verschiedenen Orten ziemlich starke Schütterwirkungen verspürt und beobachtet

1) H. Credner, Der vogtländische Erdbebenschwarm vom 13. Februar bis zum 18. Mai 1903. Abh. d. math.-phys. Klasse der K. Sächs. Ges. d. Wiss. Bd. 28, Nr. 6.

Digitized by Google

wurden. So fühlte in *Memel* ein Leser seinen Stuhl schwanke und sah, wie sich die Palmenwedel auf dem Blumentische be wegten. In *Königsberg* wurden zwei kurz aufeinanderfolgend Erderschütterungen verspürt. In *Danzig* pendelten die Gewicht einer Hängelampe mehrere Minuten lang und mußte ein Schreibende seine Tätigkeit unterbrechen. In *Lauenburg* endlich schwankte Bilder an der Wand und Hängelampen, kleine Bilderstaffelei stürzten um, Türen und Portieren bewegten sich. Auch in Greifs wald, Stralsund, Stettin und vielen anderen Orten Pommern wurden die Erschütterungen dieses Bebens deutlich wahrgenommen Alle diese Schütterwirkungen sind so stark, daß vereinzelte Be obachtungen wohl noch weiter südlich gemacht worden sein werden Auf Grund der vorstehenden Angaben aber ist bereits zu sagen daß die von der Gegend des Wenersees ausgegangenen seismischen Wellen in südlicher Richtung eine Strecke von über 600 km mi fühlbarer Stärke durcheilt haben. Eine ganz ungefähre Schätzung auf Grund der oben wiedergegebenen Meldungen führt zu dem Resul tat, daß das skandinavische Beben vom 23. Oktober 1904, wenn ma das zwischenliegende Meer mitrechnet, auf einem Flächenraume vo mindestens 1 100 000 qkm wahrnehmbare Stärke besessen hat, d ist ungefähr das 25fache der Fläche von 46 500 qkm, welche di vogtländischen Erdstöße vom 5. März 1903 erschüttert haben.

*Fig. 7 und 8. Beispiele der vom Leipziger Seismometer au gezeichneten, durch das Läuten der Kirchenglocken erregten Boden schwingungen in ca. 1000facher Vergrößerung.*

Fig. $7^{a,b}$. Die Bodenschwingungen, welche erregt wurde als am 1. November 1903 früh vor 9 Uhr zur Kirche geläut wurde (Nordsüdkomponente). Im Vergleiche hierzu *cd* die no male Registrierlinie gegen 10 Uhr des gleichen Tages nur mit de chronischen Erzitterungen.

Fig. $8^{a,b}$. Die Bodenschwingungen, welche Leipzig durcheilte als am 22. Juni 1902 die Glocken die Landestrauer über d Hinscheiden des Königs Albert verkündeten (die Figur umfaßt de Zeitraum von $12^h\,24^m\,28^s$ bis $12^h\,28^m\,46^s$). Im Vergleiche hier *cd* die Registrierlinie gegen $13^h\,30^m$ des gleichen Tages mit de chronischen Erzitterungen und unregelmäßigen, durch örtliche starken Wind hervorgerufenen Wellen.

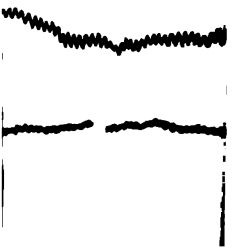
Erdbebenstation des paläontologisch-geologischen Instituts Leipzig
14. November 1904.

---

Druckfertig erklärt 20. XII. 1904.]

Digitized by Google

23. Oktober 19(



Digitized by Google

Digitized by Google

SITZUNG VOM 5. DEZEMBER 1904.

# Zusatz zu Art. 10* S. 163 dieses Bandes.

Von

W. Scheibner.

Bei der Verallgemeinerung der Jacobi'schen Resolvente, um durch Einführung von $z = \frac{1}{\sqrt{20}}(xy - \eta)$ eine Gleichung zu erhalten, deren Koeffizienten durch Kovarianten ausgedrückt werden, ist bemerkt, daß bereits Cayley (*Math. Papers* Vol. IV, N. 268) die betreffende Gleichung, wenn auch in anderer Form, abgeleitet hat. Er benutzt dazu die lineare Kovariante

$$g_1 = [fg_2^2]_4, \text{ Dimension } 5, \text{ Gewicht } 12, \quad \text{oder}$$

$$g_1 = *A^5 \sum_{60} (x_0 - x_1)^4 (x_2 - x_3)^2 (x_2 - x_4)^2 (x_3 - x_4)^2 (x_0 - x_2)(x_1 - x_3)(x - x_4),$$

welche aus zwanzig Gliedern von der Form

$$a_i x + b_i, \qquad A \mathfrak{S} a_i = 9H^2 - G^3 - 2A'G - A_1 K$$

besteht. Der Hermite'sche Satz liefert:

$$f^1 g_1 = f_2 f_5^2 - 2 f_3 f_4 f_5 + f_4^3 - 2 f_2^2 f_3 f_5 + 14 f_2^2 f_4^2 - 22 f_2 f_3^2 f_4 + \\ + 9 f_3^4 - 15 f_2^4 f_4 + 10 f_2^3 f_3^2.$$

Daraus ergibt eine leichte Rechnung den Cayley'schen Wert des Koeffizienten

$$g_2^3 + 2 g_2 g_4 + 16 g_5^2 + gK = 25 g_3^2 - f g_1,$$

sodaß für $x = x_i$ oder $f = 0$:

$$a_6 = -125 g_3^2.$$

Übrigens erhält man für $B = D = 0$

$$g_1 = (A^2 CF^2 + A^2 E^3 + 14 AC^2 E^2 - 15 C^4 E)x - \\ - A^2 E^2 F + 8 AC^2 EF + 9 C^4 F.$$

Digitized by Google

Die sechs Wurzeln $\varepsilon_i = \frac{A}{\sqrt{20}} y_i$ der aufgestellten Resolvente werden nach Jacobi (*Werke* Bd. III, S. 278) durch die Gleichungen definiert:

$$\varepsilon_0 = \frac{A}{\sqrt{20}} \{x_0x_1+x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_0-x_0x_2-x_2x_4-x_4x_1-x_1x_3-x_3x_0$$

$$\varepsilon_1 = \frac{A}{\sqrt{20}} \{x_0x_1+x_1x_3+x_3x_4+x_4x_2+x_2x_0-x_0x_3-x_3x_2-x_2x_1-x_1x_4-x_4x_0$$

$$\varepsilon_2 = \frac{A}{\sqrt{20}} \{x_0x_1+x_1x_4+x_4x_2+x_2x_3+x_3x_0-x_0x_4-x_4x_3-x_3x_1-x_1x_2-x_2x_0$$

$$\varepsilon_3 = \frac{A}{\sqrt{20}} \{x_0x_4+x_4x_1+x_1x_3+x_3x_2+x_2x_0-x_0x_1-x_1x_2-x_2x_4-x_4x_3-x_3x_0$$

$$\varepsilon_4 = \frac{A}{\sqrt{20}} \{x_0x_3+x_3x_1+x_1x_2+x_2x_4+x_4x_0-x_0x_1-x_1x_4-x_4x_2-x_2x_3-x_3x_0$$

$$\varepsilon_5 = \frac{A}{\sqrt{20}} \{x_0x_2+x_2x_1+x_1x_4+x_4x_3+x_3x_0-x_0x_1-x_1x_3-x_3x_2-x_2x_4-x_4x_0$$

deren Summe verschwindet, während der Übergang von $\varepsilon_0$ zu den übrigen Wurzeln durch die Vertauschung der Indices 0 1 2 3 4 mit resp. 2 0 1 3 4, 4 2 3 0 1, 1 4 0 2 3, 3 1 2 4 0 und 0 3 4 1 2. oder durch diesen äquivalente Permutationen, vermittelt wird. Zu dieser Form gelangt man durch die nachstehende Überlegung.

Die sogenannte resolvierende Funktion von Lagrange und Vandermonde (1771)

$$\varpi = x_0 + \alpha x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha^3 x_3 + \alpha^4 x_4, \qquad \text{wo} \qquad \alpha = e^{\frac{2\pi i}{5}},$$

nimmt durch alle möglichen Vertauschungen der Wurzeln $x_i$ 120 Werte an. Beschränkt man die Vertauschungen auf die drei Wurzeln $x_2x_3x_4$, so erhält man die sechs Werte:

$$\varpi_0 = x_0+\alpha x_1+\alpha^2x_2+\alpha^3x_3+\alpha^4x_4, \quad \varpi_1 = x_0+\alpha x_1+\alpha^2x_2+\alpha^4x_3+\alpha^3x_4,$$

$$\varpi_2 = x_0+\alpha x_1+\alpha^3x_2+\alpha^2x_3+\alpha^4x_4, \quad \varpi_3 = x_0+\alpha x_1+\alpha^3x_2+\alpha^4x_3+\alpha^2x_4,$$

$$\varpi_4 = x_0+\alpha x_1+\alpha^4x_2+\alpha^2x_3+\alpha^3x_4, \quad \varpi_5 = x_0+\alpha x_1+\alpha^4x_2+\alpha^3x_3+\alpha^2x_4.$$

Jedem dieser Ausdrücke entspricht eine Gruppe von 20 Werten, welche hervorgehen, wenn man 1) die Produkte $\alpha^k \varpi_i$ bildet, wo $\alpha^k$ die fünf Einheitswurzeln durchläuft, und 2) $\alpha$ mit $\alpha^2$, $\alpha^3$, $\alpha^4$ vertauscht. Schreibt man jetzt

$$v_i = \varpi_i(\alpha)\, \varpi_i(\alpha^2)\, \varpi_i(\alpha^3)\, \varpi_i(\alpha^4),$$

Digitized by Google

wobei die Faktoren $\alpha^k$ von selbst wegfallen, so ergeben sich sechs Produkte $v_0 v_1 .. v_5$, die den sechs Wurzeln $y_i$ oder $z_i$ entsprechen.

Um dies durch direkte Rechnung zu zeigen, bilde man etwa für $i = 0$ die beiden Produkte

$$\varpi\alpha\,\varpi\alpha^4 = s_2 + (\alpha + \alpha^4)\xi_1 + (\alpha^2 + \alpha^3)\xi_2 \quad \text{und}$$

$$\varpi\alpha^2\,\varpi\alpha^3 = s_2 + (\alpha + \alpha^4)\xi_2 + (\alpha^2 + \alpha^3)\xi_1.$$

Hier hat man

$$\xi_1 + \xi_2 = \mathrm{S}\, x_0 x_1 = \frac{10C}{A}, \qquad \xi_1 - \xi_2 = \frac{\sqrt{20}}{A} z_0,$$

$$s_2 = 5\,\frac{5B^2 - 4AC}{A^2};$$

ferner wird

$$v_0 = s_2^2 - s_2(\xi_1 + \xi_2) + \xi_1\xi_2 - (\xi_1 - \xi_2)^2$$

$$= \frac{25}{A^4}\{25A_1^2 - A^2 z_0^2\}.$$

Während hiernach $v$ und $z^2$ Gleichungen sechsten Grades mit *rationalen* Koeffizienten genügen, hebt Jacobi hervor, daß durch Vertauschung zweier Wurzeln $x_i$ und $x_k$ die Wurzeln $z$ in die entgegengesetzten Werte übergehen, und schließt daraus, daß eine bikubische Resolvente für $z$ existiert, wenn man $z$ mit $\Pi(x_i - x_k)$ oder $\sqrt{D_5}$ multipliziert. Mit anderen Worten: die rationale Gleichung 6ten Grades für $v$ oder $z^2$ zerfällt in zwei Faktoren von der Form

$$\zeta \pm \zeta_1 z\sqrt{D_5},$$

wo $\zeta$ und $\zeta_1 = A$ gerade Funktionen von $z$ bezeichnen.

Vielleicht mag es hier am Orte sein, die gleichfalls von Jacobi (Crelle's *Journal* III, S. 308 oder *Werke* I, S. 261) herrührende Resolventengleichung $n+1$ten Grades für den auf eine Transformation $n$ter Ordnung der elliptischen Funktionen bezüglichen Multiplikator $M = z^2$ zu erwähnen. Zwischen den Wurzeln $z_0 z_1 .. z_n$ finden, wenn $n = 2\nu + 1$ eine Primzahl bedeutet, $\nu + 1$ lineare Relationen statt, dergestalt, daß

$$z_0 = \sqrt{(-1)^\nu n}\cdot A_0, \quad \text{und für } i = 1 \text{ bis } n:$$

$$z_i = A_0 + A_1\alpha^i + A_2\alpha^{4i} \cdots + A_\nu\alpha^{\nu^2 i}$$



Digitized by Google

wird. Damit erhält man für $n = 5$:

$$z_0 = A_0\sqrt{5}, \qquad z_1 = A_0 + A_1\alpha + A_2\alpha^4,$$
$$z_2 = A_0 + A_1\alpha^2 + A_2\alpha^3, \qquad z_3 = A_0 + A_1\alpha^3 + A_2\alpha^2,$$
$$z_4 = A_0 + A_1\alpha^4 + A_2\alpha, \qquad z_5 = A_0 + A_1 + A_2$$

und folglich

$$\sum_{i=1}^{5} z_i = z_0\sqrt{5}, \qquad \mathrm{S}\,\alpha^{3i} z_i = 0, \qquad \mathrm{S}\,\alpha^{3i} z_i = 0.$$

KRONECKER hat in einem Briefe an HERMITE (*Comptes rendus* vom 14. Juni 1858), sowie in den *Berliner Monatsberichten* vom 27. Juni 1861 gezeigt, daß die Wurzeln $\pm z_i$ der Resolvente mit denen der Gleichung $f = 0$ in Verbindung treten durch den Ausdruck

$$z_0 = \sum_{i=1}^{4} \sin\frac{2i\pi}{5} \sum_{k=0}^{4} \{x_k x_{i+k}^2 x_{2i+k}^2 + v \cdot x_k^2 x_{i+k} x_{2i+k}\}$$
$$= \varphi(v, x_0, x_1 \ldots x_4),$$

wo $v$ einen beliebigen Parameter bezeichnet, während im übrigen für $i = 1, 2 \ldots 5$ und $x_{k\pm 5} = x_k$

$$z_i = \varphi(v, x_{i-1}, x_{i+2}, x_{i-2}, x_i, x_{i+1})$$

sein soll. Man kann mithin $z_0$ durch eine der beiden Formen definieren:

$$z_0 = (\alpha - \alpha^4)\sum x_0^2 x_1 x_4 (x_1 - x_4) + (\alpha^2 - \alpha^3)\sum x_0^2 x_2 x_3 (x_2 - x_3),$$

oder

$$z_0 = (\alpha - \alpha^4)\sum x_0^3 (x_1 x_2 - x_3 x_4) + (\alpha^2 - \alpha^3)\sum x_0^3 (x_2 x_4 - x_1 x_3),$$

wobei die Summen $\sum$ zyklische Funktionen bedeuten, und das Produkt

$$w = (z_0 - z_1)(z_2 - z_5)(z_3 - z_4)$$

einer kanonischen Gleichung fünften Grades genügt, in welcher sowohl der zweite als der vierte Koeffizient gleich Null ist.[1])

1) Bekanntlich haben nicht allein HERMITE und BRIOSCHI diese algebraischen Zusammenhänge näher untersucht, sondern vornehmlich F. KLEIN in seinen *Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade* gezeigt, welchen Gewinn man durch die Einführung geometrischer Vorstellungen in die algebraische Theorie erzielen kann.

Digitized by Google

Wir kehren von dieser Abschweifung zu den früheren Jacobi'schen Formeln zurück, welche gleichfalls die Resolventenwurzeln $z_i$ als zyklische Funktionen der $x_i$ bestimmten. Der Lagrange'schen Theorie entsprechend kann es sich umgekehrt darum handeln, auch die Wurzeln $x_i$ rational durch die $z_i$ auszudrücken. Zu diesem Zwecke hat Cayley a. a. O. (1861), im Anschlusse an vorgängige Untersuchungen von Cockle und Harley (*Quarterly Journal* III, p. 343, 1859), als Funktionen der $z_i$ die fünf Werte $w_i$ eingeführt:

$$w_0 = z_0z_5 + z_1z_4 + z_2z_3,$$
$$w_1 = z_1z_5 + z_2z_4 + z_0z_3,$$
$$w_2 = z_2z_5 + z_3z_4 + z_0z_1,$$
$$w_3 = z_3z_5 + z_1z_2 + z_0z_4,$$
$$w_4 = z_4z_5 + z_1z_3 + z_0z_2.$$

Damit wird

$$w_i = \varphi(\overset{4}{x_i}), \quad \text{wo für} \quad G = AE - 4BD + 3C^2:$$

$$\varphi(\overset{4}{x}) = 4f_{,}f_{\mathrm{V}} + 2f_{,,}f_{\mathrm{IV}} - 4f_{,,,}^2 + 3G = 2Af_{,} - 10g_{\mathrm{IV}} + 3G$$
$$= 2A^2x^4 + 8ABx^3 + (22AC - 10B^2)x^2 +$$
$$+ (18AD - 10BC)x + 7AE - 10BD + 5C^2.$$

Cayley betont hierbei, daß die Funktionen $w_i$ durch die Vertauschung der $y_i$ resp. $z_i$ im Ganzen 15 Werte annehmen, die als Wurzeln einer rationalen Gleichung 15ten Grades betrachtet werden können. Diese Gleichung aber ist infolge der erwähnten Doppeldeutigkeit der Wurzeln $z_i$ nicht irreduktibel, sondern läßt sich — was immerhin als ein bemerkenswertes Beispiel angesehen werden darf — in zwei irreduktible Faktoren vom 5ten und 10ten Grade zerlegen, von denen der erste die angeführten Wurzelwerte $w_0 \ldots w_4$ enthält, während der zweite von den zehn Wurzeln

$$w_5 = z_0z_5 + z_1z_2 + z_3z_4, \qquad w_6 = z_0z_5 + z_1z_3 + z_2z_4,$$
$$w_7 = z_1z_5 + z_2z_3 + z_0z_4, \qquad \text{usw.}$$

abhängt.

Transformiert man nach Tschirnhaus die Gleichung $f(\overset{5}{x}) = 0$ durch die Substitution $w = \varphi(\overset{4}{x})$, so ergibt die Elimination von $x$



Digitized by Google

aus beiden Gleichungen die Gleichung fünften Grades $\psi(w) = 0$, und die *lineare* Gleichung

$$\alpha x + \beta = 0$$

mit den rationalen Koeffizienten $\alpha$ und $\beta$ liefert $x_i$ als rationale Funktion von $w_i$. Übrigens hat man neben

$$\sum_6 z_i = \mathrm{S}\, z_i z_k z_l = 0, \qquad \sum_5 w_i = \mathrm{S}\, z_i z_k = -5G,$$

sodaß die Gleichung für $w$ die Form annimmt:

$$\psi w = w^5 + 5Gw^4 + 10c_2 w^3 + 10c_3 w^2 + 5c_4 w + c_5.$$

Legt man nun die *kanonische* Form von $f$ zu Grunde und setzt $B = D = 0$, so sind die Eliminationen auszuführen mittels der Gleichungen

$$f = Ax^5 + 10Cx^3 + 5Ex + F = 0 \qquad \text{und}$$
$$\varphi = 2A^2x^4 + 22ACx^2 + 7AE + 5C^2 = w.$$

Eine kunstlose Rechnung ergibt für

$$G = AE + 3C^2, \qquad w' = w + 3G + 8C^2:$$

$$\varphi_4 = \varphi - w = 2A^2x^4 + 22ACx^2 - (w' - 10G + 8C^2),$$
$$\varphi_3 = x\varphi_4 - 2Af = 2ACx^3 - (w' - 22C^2)x - 2Af,$$
$$\varphi_2 = C\varphi_4 - Ax\varphi_3 = Aw'x^2 + 2A^2Fx - C(w' - 10G + 8C^2),$$
$$\varphi_1 = 2C(w'x - 2AF)\varphi_2 - w'^2\varphi_3 = \alpha x + \beta,$$
$$\alpha = w'^3 - 24C^2w'^2 + 4C^2(5G - 4C^2)w' - 8A^3CF^2,$$
$$\beta = 2AF\{w'^2 + 2C^2w' - 4C^2(5G - 4C^2)\}.$$

Eliminiert man endlich $x$ aus $\varphi_1$ und $\varphi_2$, so folgt

$$C(w' - 10G + 8C^2)\alpha^2 + 2A^2F\alpha\beta - Aw'\beta^2 = CWw'^2 = 0,$$

$$W = w'^5 - 10(G + 4C^2)w'^4 + 40C^2(13G + 4C^2)w'^3 -$$
$$- 40C[3A^2F^2 + 2C(G + 16C^2)(5G - 4C^2)]w'^2 +$$
$$+ 80C[A^2F^2(4G - C^2) + 5C^3(5G - 4C^2)^2]w' -$$
$$- 32[A^4F^4 + 11A^3C^3F^2(5G - 4C^2) + C^4(5G - 4C^2)^3],$$

während

$$x = -\frac{\beta}{\alpha} = -\frac{C(w' - 10G + 8C^2)\alpha}{A(w'\beta - 2AF\alpha)}$$
$$= -\frac{C(w' - 10G + 8C^2)\alpha + 2A^2F\beta}{Aw'\beta},$$

Digitized by Google

oder

$$x = -2AF\,\frac{w'^3 + 2C^2w' - 4C^2(5G - 4C^2)}{w'^3 - 24C^2w'^2 + 4C^2(5G - 4C^2)w' - 8A^3C^2F^2}$$

$$-\frac{1}{2A^2F}\,\frac{Cw'^3 - 2C(5G + 8C^2)w'^2 + 4[A^2F^2 + 13C^2(5G - 4C^2)]w' - 8C^3(5G - 4C^2)^2}{w'^2 + 2C^2w' - 4C^2(5G - 4C^2)}.$$

Hier bleibt nur noch übrig, $w'$ durch $w$ zu ersetzen, um die gesuchten Werte der Koeffizienten in den Formeln für $x$ und $\psi$ zu erhalten. Man berechnet ohne Schwierigkeit

$$\alpha = w^3 + 9(AE + 3C^2)w^2 + (27A^2E^2 + 182AC^2E + 95C^4)w -$$
$$- 8A^3CF^2 + 27A^3E^3 + 303A^2C^2E^2 + 625AC^4E - 1275C^6,$$

$$\beta = 2AF\{w^2 + 6(AE + 6C^2)w + 9A^2E^2 + 88AC^2E + 279C^4\},$$

$$c_2 = -\{3A^2E^2 - 2AC^2E + 15C^4\},$$

$$c_3 = -\{12A^3CF^2 + 27A^3E^3 + 103A^2C^2E^2 + 65AC^4E + 125C^6\},$$

usw., doch werden diese Ausdrücke wenig übersichtlich. Läßt man aber weiter $C$ verschwinden, so hat man mit JERRARD für $B = C = D = 0$ zu setzen:

$$Ax^5 + 5Ex + F = 0, \quad \text{neben} \quad w = A(2Ax^4 + 7E),$$
$$w' = w + 3AE, \quad \text{wodurch} \quad \alpha = w'^3, \quad \beta = 2AFw'^2,$$

sowie

$$w'^5 - 10AEw'^4 - 32A^6F^4 = 0$$

hervorgeht. Folglich wird in diesem Falle

$$(w_i + 3AE)x_i + 2AF = 0 \quad \text{oder} \quad x_i = -\frac{2AF}{w_i + 3AE}.$$

HARLEY findet (a. a. O. S. 351) etwas weniger einfach für $B = C = E = 0$:

$$fx = Ax^5 + 10Dx^2 + F, \qquad w = Ax^4 + 9Dx,$$
$$\alpha = Aw^3 - 2ADFw - 9D^4, \quad \beta = AFw^2 + D^3w - ADF^2,$$

nebst

$$Aw^5 + 5ADFw^3 - 10D^4w^2 - 25AD^2F^2w - F(A^2F^3 + 81D^5) = 0,$$

$$x = -\frac{AFw^2 + D^3w - ADF^2}{Aw^3 - 2ADFw - 9D^4} = -\frac{F(Aw^3 - 2ADFw - 9D^4)}{Aw^4 - 3ADFw^2 - 10D^4w + AD^2F^2},$$

wo $2Aw$ für $w$ geschrieben ist.

Digitized by Google

Durch die bahnbrechenden Untersuchungen von Hermite und Kronecker (1858) ist die Theorie der elliptischen Funktionen für die Auflösung der Gleichungen fünften Grades nutzbar gemacht worden. Doch läßt trotz der einschlagenden Arbeiten von Brioschi, Gordan, Klein, Kiepert u. a. die praktische Anwendbarkeit der komplizierten Formeln noch manches zu wünschen übrig. In dieser Beziehung kann die Bemerkung von Interesse sein, daß sich die *kanonische* Gleichung 5. Grades

$$Ax^5 - Cx^3 + Ex - F = 0$$

leicht auf die Auflösung einer transzendenten Gleichung von der Form

$$F\vartheta^5(u, q) = A\psi(q)\vartheta_1(5u, q^5)$$

zurückführen läßt.

Da bekanntlich für die vier koordinierten Thetafunktionen $\Theta$:

$$\chi_1^5\Theta(5u, q^5) = \chi_1(q^5)\Theta u\,\Theta(u+\tfrac{\pi}{5})\Theta(u-\tfrac{\pi}{5})\Theta(u+\tfrac{2\pi}{5})\Theta(u-\tfrac{2\pi}{5}),$$

wo das Euler'sche Produkt $\chi_1 = \prod_{p=1}^{\infty}(1-q^{2p})$ geschrieben ist, so liefern die elementaren Formeln

$$\vartheta^2\vartheta(u+v)\vartheta(u-v) = \vartheta^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta_1^2 u\,\vartheta_1^2 v,$$

$$\vartheta^2\vartheta_1(u+v)\vartheta_1(u-v) = \vartheta_1^2 u\,\vartheta^2 v - \vartheta^2 u\,\vartheta_1^2 v$$

die Multiplikationsgleichungen:

$$\chi_1^5\vartheta^4\vartheta(5u, q^5) = \chi_1(q^5)\vartheta u\,(\vartheta^2 u\vartheta^2\tfrac{\pi}{5} - \vartheta_1^2 u\vartheta_1^2\tfrac{\pi}{5})(\vartheta^2 u\vartheta^2\tfrac{2\pi}{5} - \vartheta_1^2 u\vartheta_1^2\tfrac{2\pi}{5}),$$

$$\chi_1^5\vartheta^4\vartheta_1(5u, q^5) = \chi_1(q^5)\vartheta_1 u(\vartheta_1^2 u\vartheta^2\tfrac{\pi}{5} - \vartheta^2 u\vartheta_1^2\tfrac{\pi}{5})(\vartheta_1^2 u\vartheta^2\tfrac{2\pi}{5} - \vartheta^2 u\vartheta_1^2\tfrac{2\pi}{5}),$$

sodaß für $u = 0$ nicht allein

$$\chi_1^5\vartheta(q^5) = \chi_1(q^5)\vartheta\cdot\vartheta^2(\tfrac{\pi}{5})\vartheta^2(\tfrac{2\pi}{5}),$$

sondern auch wegen $\vartheta_1' = \lim\frac{\vartheta_1 u}{u} = 2q^{\frac{1}{4}}\chi_1^3$:

$$\vartheta_1(\tfrac{\pi}{5})\vartheta_1(\tfrac{2\pi}{5}) = \chi_1\cdot\chi_1(q^5)\sqrt{5q}$$

erhalten wird. Setzt man

$$u = \int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{\vartheta_3^4\cos^2\varphi + \vartheta^4\sin^2\varphi}} \qquad \text{oder} \qquad \varphi = \operatorname{am} u\vartheta_3^2,$$

Digitized by Google

so folgt

$$\frac{\vartheta_1 u}{\vartheta u} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \sin\varphi\,, \qquad \text{neben}$$

$$\frac{\vartheta_1 \frac{\pi}{5}}{\vartheta \frac{\pi}{5}} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \sin\varphi_1\,, \qquad \frac{\vartheta_1 \frac{2\pi}{5}}{\vartheta \frac{2\pi}{5}} = \frac{\vartheta_2}{\vartheta_3} \sin\varphi_2\,,$$

womit für $x = r\sin\varphi$ die Gleichung hervorgeht:

$$\psi(q)\vartheta_1(5u, q^5) = \vartheta^5 u\,\{x^5 - r^2(\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2)x^3 + r^4\sin^2\varphi_1\sin^2\varphi_2 x\}.$$

Hier ist

$$\psi(q) = \frac{r^5\chi_1^5\vartheta_2^5\vartheta^4}{\chi_1(q^5)\vartheta_2^5\vartheta^2\left(\frac{\pi}{5}\right)\vartheta^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)} = \frac{r^5\vartheta^5\vartheta_2^5}{\vartheta_2^5\vartheta(q^5)}$$

geschrieben und beide Seiten der Gleichung gehen in ihren entgegengesetzten Wert über, wenn man $u$ um $\frac{\pi}{5}$ ändert.

Bestimmt man jetzt

$$y_1 = r^2\sin^2\varphi_1 \qquad \text{und} \qquad y_2 = r^2\sin^2\varphi_2$$

als Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$y^2 - Cy + E = 0$$

und schreibt

$$F = \psi(q)\frac{\vartheta_1(5u, q^5)}{\vartheta^5 u}\,,$$

so folgt

$$x^5 - Cx^3 + Ex - F = 0.$$

Die Quotienten $z_1 = \frac{\sin\varphi_1}{\sin\varphi_2}$ und $z_2 = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}$ dagegen werden Wurzeln der reziproken Gleichung

$$z^2 - \frac{C}{\sqrt{E}}z + 1 = 0,$$

folglich ist für

$$C\sin\gamma = 2\sqrt{E}: \quad z = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma\,,$$

und man hat den Wert des Modularguments $q$ aus der Gleichung

$$\frac{\vartheta_1 \frac{\pi}{5}}{\vartheta \frac{\pi}{5}} : \frac{\vartheta_1 \frac{2\pi}{5}}{\vartheta \frac{2\pi}{5}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma$$

Digitized by Google

zu ermitteln.[1]) Für $q = 0$ z. B. wird $\operatorname{tg} \frac{1}{2}\gamma = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1)$, im übrigen werden wegen der raschen Konvergenz der Thetareihen bei der Entwickelung nach den Potenzen von $q$ nur wenige Glieder zu berücksichtigen sein.

Es bleiben neben $u$ noch die Werte von $r$ und $\psi$ aufzusuchen. Hierzu setze man

$$\chi = \prod_{p=1}^{\infty}(1 - q^{2p-1}), \qquad \vartheta = \chi^2 \chi_1,$$

also

$$\chi\vartheta\left(\frac{\pi}{5}\right)\vartheta\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \chi_1^2\chi(q^5), \qquad \text{wodurch}$$

$$\frac{\vartheta_1\frac{\pi}{5}\,\vartheta_1\frac{2\pi}{5}}{\vartheta\frac{\pi}{5}\,\vartheta\frac{2\pi}{5}} = \frac{\vartheta_2^2}{\vartheta_3^2}\sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \frac{\chi\cdot\chi_1(q^5)}{\chi_1\chi(q^5)}\sqrt{5q},$$

mithin

$$r^2 = \frac{\sqrt{E}}{\sin\varphi_1\sin\varphi_2} = \frac{\chi_1\chi(q^5)}{\chi\chi_1(q^5)}\cdot\frac{\vartheta_3^2}{\vartheta_2^2}\sqrt{\frac{E}{5q}}.$$

Durch Verbindung mit dem früheren Ausdruck $\psi = \frac{r^5\vartheta^5\vartheta_2^5}{\vartheta_3^5\vartheta(q^5)}$ ergibt sich

$$\psi(q) = \left(\frac{\chi\chi_1}{\chi(q^5)\chi_1(q^5)}\right)^{\frac{15}{2}}\vartheta^4(q^5)\left(\frac{E}{5q}\right)^{\frac{5}{4}},$$

$$x = \left(\frac{\chi_1\chi(q^5)}{\chi\chi_1(q^5)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{E}{5q}\right)^{\frac{1}{4}}\frac{\vartheta_1(u,\,q)}{\vartheta(u,\,q)}.$$

Übrigens dürfen wir hier an die mannigfaltigen Reihenentwickelungen für die Produkte $\chi$ und $\chi_1$ erinnern[2]), von denen nur die nachstehenden angeführt werden mögen:

$$\chi = \frac{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}{\Sigma q^{n(2n+1)}} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}}{\Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)}}$$

$$= \frac{\Sigma(-1)^n q^{n^2}}{\Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}} = \frac{\Sigma(-1)^n q^{3n^2}}{\Sigma q^{\frac{1}{2}n(3n+1)}},$$

---

1) Für $C = 2\sqrt{E}\cos\gamma$ und $2\sqrt{E} = Ci\operatorname{tg}\gamma$ hat man $\varepsilon = e^{\gamma i}$ resp. $\varepsilon = i\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma$.

2) Vergl. *Leipziger Berichte* Bd. 14, S. 105, sowie JACOBI *Werke* Bd. II, S. 217. Die Summen $\Sigma$ erstrecken sich auf alle ganzen positiven und negativen Zahlen $n$.

Digitized by Google

$$\chi^8 = \frac{\Sigma(-1)^n q^{n\,n}}{\Sigma q^{n(2n+1)}} = \frac{\Sigma(4n+1)q^{n(2n+1)}}{\Sigma(4n+1)q^{2n(2n+1)}},$$

$$\chi_1 = \Sigma(-1)^n q^{n(3n+1)},$$

$$\chi_1^3 = \Sigma(4n+1)q^{2n(2n+1)},$$

$$\chi\chi_1 = \Sigma(-1)^n q^{\frac{1}{2}n(3n+1)} = \chi_1(\sqrt{q}),$$

$$\frac{\chi_1}{\chi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n(2n+1)} = \sum_{m=0}^{\infty} q^{\frac{1}{2}m(m+1)}.$$

## Berichtigungen.

S. 139 Z. 12 v. o. lies „nach Art. 14“

S. 141 Z. 4 v. u. lies $= \mathfrak{A}x^{5m-20} +$

S. 143 unten lies $\mathfrak{L} = 6[h_4 h_4]_4$ oder $\Delta = 70[gg]_8$

S. 144 Z. 8 v. o. lies „lassen sich auf Grund des Art. 7 ohne“

S. 147 Z. 9 v. u. lies „resp. $m > 4$ oder 5“

S. 150 Z. 6 v. o. lies $\frac{1}{4}(\sigma_4 - \frac{1}{2}\sigma_2^2)z$

S. 154 Z. 1 v. u. lies $= f\mathfrak{g}_9$, $\mathfrak{g}_9 =$

S. 157 Z. 9 v. o. lies $h(x_i)$

S. 157 Z. 14 v. o. lies $g(x_i) = \Pi_i$

S. 161 Z. 8 v. o. lies $g_8 = 3f, g_8$

S. 161 Z. 8 v. u. lies $\mathfrak{E}^2\Delta^2 - 10\mathfrak{C}^2\mathfrak{E}\Delta$

S. 161 Z. 13 v. u. lies $\mathfrak{z} = \mathfrak{x}\sqrt{D_5}$

S. 163 Z. 7—9 v. u. lies „daß nach M. u. R. die Koeffizienten der bikubischen Resolvente (mithin für $\mathfrak{A} = D_5$ usw. als Invarianten von den Dimensionen 24, 48, 72,) sich in der Gestalt entwickeln lassen:“

S. 163 Z. 10 v. u. lies $+ 5\mathfrak{E}\mathfrak{x}$

S. 167 Z 8 v. o. lies $= *A^2 \sum_{45}$

S. 168 unten hinzuzufügen „oder $j_4 = \Delta x^{4m-24} + \ldots$“

S. 169 Z. 3 v. o. lies $70[gg]_8$

S. 169 Z. 4 v. o. lies Art. 4*

S. 169 Z. 11 v. o hinzuzufügen $\Delta = J_{,,}J_{,,} + 300L$:

S. 170 Z. 6 v. o. lies Artt. 8* und 9*

S. 171 Z. 15 v. u. lies $= Ax^5 +$

S. 172 Z. 5 v. u. „und *beliebige* reelle Werte von $x$ (vergl. Salmon-Fiedler *Algebra* Art. 236),“

Druckfertig erklärt 28. XII. 1904.]

Digitized by Google

Digitized by Google

# WILHELM HIS

## NEKROLOG

GESPROCHEN IN DER ÖFFENTLICHEN GESAMTSITZUNG
BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1904

VON

F. MARCHAND, O. M.



Digitized by Google

Digitized by Google

Hochverehrte Anwesende!

Am ersten Mai d. J. verlor unsere Gesellschaft ihr langjähriges berühmtes Mitglied, den Sekretär der mathematisch physikalischen Klasse, WILHELM HIS.

Dem ehrenvollen Auftrage, dem hochverdienten Mann in der heutigen feierlichen Sitzung ein Wort der Erinnerung nachzurufen, fühle ich mich nur unvollkommen gewachsen, umsomehr, als es mir nur wenige Jahre hindurch vergönnt war, ihm persönlich näherzutreten. — Wohl konnte niemand, auch bei nur vorübergehender Begegnung sich dem Eindruck der geistigen Bedeutung und der gewinnenden Liebenswürdigkeit seines Wesens verschließen, niemand der Lauterkeit und Geradheit seines Charakters die höchste Achtung versagen. Aber bei seiner tief angelegten Natur bedurfte es einer vertrauten Bekanntschaft, um die reichen Schätze seines Geistes und Gemütes voll zu würdigen. Es war nicht die Art dieses einfachen und bescheidenen Mannes, um äußere Anerkennung zu werben. HIS war eine echte Gelehrtennatur, ein unermüdlicher Forscher bis an sein Lebensende, der seine größte Befriedigung in dem Suchen nach der Wahrheit fand, aber er vereinigte damit in seltener Weise die Gabe organisatorischer Tätigkeit und das Streben, seine wissenschaftliche Arbeit von einem hohen Standpunkt der Allgemeinheit nutzbar zu machen. So wirkte er auch als Sekretär unserer Klasse, bis schweres heldenmütig ertragenes Leiden ihn zwang, sein Amt kurze Zeit vor seinem Tode niederzulegen.

Wenige Monate vorher, wohl schon im Vorgefühl des nahenden Endes, beschenkte uns HIS mit seinen anspruchslosen und zum Herzen sprechenden Lebenserinnerungen, in dank-



Digitized by Google

barem Andenken an die Fülle von trefflichen und hervorragenden Menschen, von denen er in seinen Entwicklungsjahren gelernt und Gutes empfangen hatte. Wir scheiden von ihm bei seiner Berufung an die Universität seiner Vaterstadt mit dem Bedauern, daß uns ein gleicher Einblick in sein an Erfahrungen und Erfolgen reiches späteres Leben nicht mehr vergönnt wurde.

His führt uns in das elterliche Haus in Basel, mit dem weiten Blick auf den Rheinstrom und die blauen Berge, in dem er am 9. Juli 1831 das Licht der Welt erblickte, als Enkel eines um seinen väterlichen Kanton hochverdienten, geistig hochstehenden Mannes, der sich trotz schwerer Schicksalsschläge seine ideale Gesinnung bis an sein Lebensende bewahrte. Der Vater, ein Kaufmann, hatte sich aus kleinen Anfängen zu einer einflußreichen Stellung hinaufgearbeitet; Einfachheit und Klarheit der Denkweise und ernste Lebensauffassung, große Gewissenhaftigkeit rühmt der Sohn als die bezeichnendsten Grundzüge des Wesens des Vaters. Wer würde darin nicht auch die hervortretenden Eigenschaften des Sohnes, gepaart mit dem idealen Sinn des Großvaters und der freundlichen Milde der Mutter erkennen! Der junge His widmete sich dem medizinischen Studium in seiner Vaterstadt und in Bern; ein günstiges Geschick führte ihn von hier nach Berlin, wo die mächtige Persönlichkeit Johannes Müllers in hohem Maße befruchtend auf ihn einwirkte. Von großer Bedeutung für seine ganze spätere Richtung wurde ferner die Einführung in die noch junge Wissenschaft der Entwicklungsgeschichte durch Robert Remak, der damals noch nicht in seiner vollen Bedeutung gewürdigt wurde. Die bei Remak zugebrachten Stunden sind His, wie er selbst schreibt, neben den unvergeßlichen Vorträgen von Johannes Müller das Liebste und Anregendste geblieben, was ihm in Berlin zuteil geworden ist. Bald aber zog der aufsteigende Ruhm Rudolf Virchows wie so viele andere auch den jungen His nach Würzburg, und hier war es, wo er zuerst den Zauber der eigenen wissenschaftlichen Forschung empfand. Es galt, die von Virchow neu begründete Lehre vom Bindegewebe

Digitized by Google

an einem Objekt zu prüfen, welches seitdem zu unzähligen normal- und pathologisch-histologischen Untersuchungen gedient hat, der Hornhaut des Auges. Die Ergebnisse dieser später weiter ausgeführten Arbeit erschienen in einer größeren Monographie im Jahre 1856.

Nach einem vorübergehenden Aufenthalt in Prag und Wien und nach Beendigung des Doktorexamens in seiner Vaterstadt (1854) wandte sich His nach Paris, wo er vielfache Anregung durch persönliche Beziehungen zu einer Anzahl hervorragender Männer, unter anderen Claude Bernard, empfing. Im Winter 1856 habilitierte er sich an der heimatlichen Hochschule, doch befriedigte ihn die dortige Tätigkeit so wenig, daß er einen größeren Wirkungskreis in Berlin suchte. Wurden auch seine ursprünglichen Erwartungen hier nicht erfüllt, so war doch der Aufenthalt in Berlin nicht ohne bleibenden Gewinn für His, da hier seine Freundschaft mit Billroth sich entwickelte, die erst durch den Tod getrennt wurde.

Als im Herbst 1857 die Professur für Anatomie und Physiologie in Basel durch Weggang von Georg Meissner nach Göttingen frei wurde, hatte der damals erst 26jährige das Glück, zu dessen Nachfolger berufen zu werden. Der gewiß nicht leichten Aufgabe, zwei große Lehrfächer voll zu vertreten, unterzog sich His mit dem Mute der Jugend und mit zunehmendem Erfolg 15 Jahre hindurch.[1]) Im März 1872 folgte er dem Rufe nach Leipzig, wo er eine neue Heimat fand; freilich zog es ihn alljährlich nach seiner Vaterstadt, nach den Bergen seines schönen Schweizerlandes, an dem er mit ganzer Seele hing. In sehr bescheidenen räumlichen Verhältnissen begann His seine hiesige Tätigkeit, bis er durch den Neubau eines für die damalige Zeit prächtigen Institutes eine der neu aufblühenden Hochschule würdige Arbeitsstätte schuf. Die anfangs als Erschwerung empfundene Teilung der anatomischen Professur durch die gleichzeitige Berufung

1) Im Sept. 1858 verheiratete sich His mit Frl. Elisabeth Vischer aus Basel; aus dieser Ehe entsprossen zwei Töchter und vier Söhne.

Digitized by Google

Braunes gestaltete sich im weiteren Verlauf so befriedigend, daß, als der Tod Braunes im Jahre 1892 vorzeitig das Band löste, das beide Männer vereinigte, dem Zurückbleibenden zu Mute war, „als habe er eine schwere Verstümmelung erlitten".

32 Jahre hindurch hat His an unserer Hochschule gewirkt und nicht wenig zu ihrem Ruhme beigetragen; ebenso lange gehörte er der Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften an.

Es kann nicht meine Aufgabe sein, in der kurz zugemessenen Zeit an dieser Stelle eine eingehende Darstellung der wissenschaftlichen Arbeit des Forschers zu geben. Von berufeneren Federn sind bereits mehrfache Schilderungen seiner vielseitigen Leistungen weiteren Kreisen zugänglich gemacht worden, zuletzt und besonders eingehend von seinem nahe befreundeten Fachgenossen Waldeyer. In gerechter Würdigung des großen Einflusses der Lehr- und Forschertätigkeit unseres His für die Medizin wendet sich Waldeyer in erster Linie an die ärztliche Welt, doch ohne zu verkennen, daß die hohe Bedeutung des Gelehrten His weit über den engeren Kreis seines Lehrfaches hinausreicht.

In der Tat hat His niemals über der Fülle der Erscheinungen die allgemeinen großen Gesichtspunkte aus dem Auge verloren. Er verstand es, Gedanken von grundlegender Bedeutung zu entwickeln, die die Aufmerksamkeit schon früh auf den jungen Basler Anatomen lenkten.

Das Lebenswerk von His hatte als Mittelpunkt die Entwicklungsgeschichte, doch begann er erst im Jahre 1865 sich der embryologischen Forschung selbst zuzuwenden, „die ihn von nun an immer mehr mit ihrem Reize umstrickte".

Ausgegangen war His, wie erwähnt, von histologischen Studien; in den Jahren 1859 bis 1865 beschäftigten ihn Untersuchungen über den damals noch wenig bekannten feineren Bau der Lymphdrüsen, die er gemeinsam mit Billroth in Berlin begonnen hatte. Eng damit verbunden war die wichtige Frage nach dem Zusammenhang des Bindegewebes mit den Anfängen der aufsaugenden Gefäße, die durch die Virchowsche

Digitized by Google

Lehre von den Bindegewebszellen in den Vordergrund getreten war, und in die His schon in seiner Hornhautarbeit nachdrücklich eingegriffen hatte. Noch bis heute ist diese wichtige Frage, die den Normalhistologen und den Pathologen in gleichem Maße interessiert, nicht allseitig geklärt, doch muß hervorgehoben werden, daß wir heute, nach vier Dezennien, die von His verfochtene Ansicht, daß ein direkter Zusammenhang der Lymphgefäße mit den sog. Saftspalten des Bindegewebes nicht besteht, als die richtige anerkennen müssen.

Die allgemeinen Anschauungen, zu denen His im Laufe dieser bedeutsamen Studien gelangt war, legte er in dem berühmten Programm: „Über die Häute und Höhlen des Körpers" nieder, welches so nachhaltig wirkte, daß His noch kurz vor seinem Tode, nach fast 40 Jahren, zu einem Neudruck der selten gewordenen Abhandlung veranlaßt wurde. — Im Anschluß an die Lehre Remaks vom mittleren Keimblatt verfolgte His in diesem gedankenreichen Aufsatz die Beziehungen zwischen dem histologischen Aufbau und der physiologischen Funktion der Organe und ihrer Entwicklung. Er charakterisierte den Unterschied zwischen den eigentlichen Binnenräumen des mittleren Keimblattes und den übrigen Körperhöhlen, abgesehen von ihrer Entstehungsweise durch die Beschaffenheit ihrer zelligen Auskleidung, für die er den noch jetzt viel gebrauchten Namen Endothel einführte.

Was His in der Einleitung zu dieser Schrift von dem genialen Bichat sagte: „Ist es doch die Gabe geistvoller Naturen, daß sie, auch bei beschränkten Hilfsmitteln materieller Erkenntnis, Beziehungen zu ahnen und in ihrem Zusammenhange zu durchschauen vermögen, die anderen bei weit reicherem Material nur stückweise zugänglich sind, und daß sie selbst im Irrtum oft Gesichtspunkte eröffnen, die der langsam und mühselig vordringenden Einzelforschung als Wegweiser für die Richtung ihres Ganges dienen können," das gilt nicht minder von ihm selbst.

Als Frucht seiner embryologischen Forschungen erschien bereits im Jahre 1868 das große Werk über die erste Entwicklung des Hühnchens im Ei, welches His' Namen als

Digitized by Google

Embryologen begründete. „Mit unwiderstehlicher Gewalt, wie nie ein anderer Gegenstand — schreibt His — hat mich der hier bearbeitete erfaßt, und ich bin von demselben während voller zwei Jahre so lebhaft absorbiert worden, daß es mir je länger, je schwerer wurde, anderes zu tun und zu denken." Bei dem Versuch, das große Problem zu lösen, wie aus einer anscheinend gleichartigen Anlage, der befruchteten Eizelle, durch zunehmendes Wachstum und fortschreitende Sonderung die verschiedenartigen Gewebe und Organe des Körpers werden, handelte es sich für His nicht nur um die rein morphologische Beschreibung, sondern um das Aufsuchen der allgemeinen Gesetze der Entwicklung.

Nach einer späteren Formulierung lautete sein Grundgesetz: „Es ist bei gegebener Anfangsform des Keims die Form des aus demselben hervorgehenden Körpers eine abgeleitete Folge der räumlichen und zeitlichen Verteilung des Keimeswachstums." Aus der verschiedenen Schnelligkeit des Wachstums des Keims („Prinzip des ungleichen Wachstums") ergibt sich, daß an den Stellen, wo das peripherische Wachstum auf Widerstand stößt, Faltenbildungen entstehen, die die Anlagen der Organe und Organsysteme voneinander trennen; daraus leitet His weiterhin das „Prinzip der durchgehenden Grenzmarken", und besonders das bedeutungsvolle „Prinzip der organbildenden Keimbezirke" ab.

Wie sich hieraus schon ergibt, hat His frühzeitig das Bestreben gehabt, die Entstehung der Formen des sich entwickelnden Keimes auf mechanische Gesetze zurückzuführen. Eine große Anzahl von sinnreichen Versuchen stellte er an, um die Faltenbildung der wachsenden Keimscheibe durch Platten von biegsamem Material unter dem Einflusse von Druck und Schub — ganz analog der Faltung der Gesteine bei der Gebirgsbildung — nachzuahmen. Ganz besonders drängte sich ihm diese Betrachtungsweise auf, als er selbst den Versuch machte, die komplizierten Formen des sich entwickelnden Embryo durch plastische Modelle nachzubilden, eine Kunst, die durch seine Bemühungen zu einer sehr hohen Vollendung gebracht wurde.

Digitized by Google

Schon in dem Programm über die Häute und Höhlen des Körpers finden sich scharfsinnige Bemerkungen über den formbildenden Einfluß mechanischer Einwirkungen auf die sich entwickelnden Gewebe, Gedanken, die erst nach vielen Jahren zur vollen Anerkennung gelangt sind. Es ist erklärlich, daß His, der der mechanischen Betrachtungsweise in der embryologischen Forschung als Erster eine so große Rolle einräumte, der selbst schon im Jahre 1869 den Ausdruck „mechanische Entwicklungsgeschichte" gebrauchte, das Aufblühen der durch Wilhelm Roux zum Range einer eigenen Disziplin erhobenen Entwicklungsmechanik nur mit Genugtuung begrüßen konnte.[1])

Man hat His hie und da den Vorwurf gemacht, daß er über den mechanischen Gesichtspunkten die Bedeutung der Wachstumsvorgänge der Zelle zu gering veranschlagt habe; das war indes keineswegs der Fall. His verlor nie aus dem Auge, daß das, was die Entstehung der Form eigentlich bedingt, die lebenden Zellen sind, deren Ausdehnung und Form in jedem Augenblick durch das Gleichgewicht innerer und äußerer Kräfte bestimmt werde.

In der großen Frage der Auffassung der Lebensvorgänge vertrat His den Standpunkt, daß alle Zelltätigkeit auf denselben bewegenden Kräften beruhe, die in der übrigen Natur wirken. Er lehnte ausdrücklich eine vitalistische Anschauung, die Annahme einer besonderen in den Zellen wirkenden Kraft ab. Alles Leben ist übertragene Bewegung, so in der Entwicklung des einzelnen Individuums, wie der gesamten organisierten Natur. Dennoch war His keineswegs ein Anhänger einer mechanistischen Auffassung des Lebens, vielmehr betrachtete er die wunderbare Gesetzmäßigkeit, das Ineinandergreifen aller Lebensvorgänge im einzelnen Individuum, wie

1) Man kann verschiedener Meinung darüber sein, ob den relativ groben Vorgängen der Faltung von Platten, der Biegung und Knickung von Röhren tatsächlich die große ihnen von His zugeschriebene Bedeutung bei der Entstehung normaler organischer Formen zukommt. Bei der Bildungsweise abnormer Formen durch mechanische Störungen der normalen Entwicklung spielen sie zweifellos eine sehr wichtige Rolle.

Digitized by Google

in der Gesamtheit der Organismen als den Ausdruck einer prästabilierten Harmonie.

Als abgesagter Feind jeder phrasenhaften Ausdrucksweise, die über Gedanken mit Schlagworten hinwegzutäuschen sucht, legte sich His zwar eine gewisse Beschränkung in der Äußerung über die mutmaßliche Entstehung des Lebens und der geistigen Tätigkeit auf. Doch sprach er sich als 38jähriger in seiner gedankenreichen Rektoratsrede im Jahre 1869 unumwunden für die teleologische Auffassung der Natur aus als diejenige, welche unter allen nicht nur die älteste, sondern welche auch heute noch dem unbefangenen Gemüte die einzig natürliche sei.

Ich glaube die Anschauungsweise von His nicht besser charakterisieren zu können, als durch die Schlußworte der Baseler Rede: „Wenn es der fortschreitenden Forschung einst gelingen wird, auch das Problem der ersten Entstehung organischer Wesen auf mechanische Prinzipien zurückzuführen, ist dann das Problem der Schöpfung gelöst? Tritt uns dann nicht erst recht und in voller Größe jenes Lebensgeheimnis entgegen, an dessen Lösung uns mehr denn an allem andern gelegen ist, das Geheimnis von der geistigen Entwicklung der Schöpfung, das Geheimnis von dem Ausgangs- und Zielpunkte unseres eigenen inneren Lebens? Vor der Pforte dieses Geheimnisses treffen wir alle, Naturforscher und Nichtnaturforscher zusammen, und keiner von uns mag sich vermessen, mit den Waffen reiner Wissenschaft dieselbe zu erstürmen!“ Das große Reich der organischen Gestalten dachte sich His als kontinuierliche, periodische Reihe, deren einzelne Glieder dem Ausdruck einer mathematischen Wachstumsformel mit einer gewissen Anzahl konstanter Größen entsprechen. Wie aus einer handschriftlichen Notiz hervorgeht, fand His später einen dem seinigen ähnlichen Gedanken in einem Briefe von Leibniz ausgesprochen.

Er vergleicht die Entwicklung des einzelnen wie der Gesamtheit mit einer unendlichen Wellenlinie, deren Wellen den Wachstumsgang der Individuen darstellen, ebenso wie die ganze unendliche Reihe demselben durchgreifenden Gesetz

Digitized by Google

folgt. Jedes einzelne Glied erscheint nur als der augenblickliche Träger von Eigenschaften, die ihm nicht eigentümlich, sondern der ganzen Reihe gemeinsam sind.

So war denn auch His' Auffassung von dem Wesen der Erblichkeit von der zur Zeit herrschenden abweichend, die die wohl bewiesene Übertragung der elterlichen Eigenschaften durch Vermittlung minimaler geformter Bestandteile der Keime, wie wir gestehen müssen, noch keineswegs zu erklären vermag. Ähnlich wie K. E. v. Baer war His der Ansicht, daß nicht der Stoff als solcher, sondern die am Stoff ablaufenden Vorgänge, der „Idee des Typus" entsprechend, das Wesentliche sind. Eine Vererbung erworbener Eigenschaften konnte er folgerichtig nicht anerkennen.

Dem großen Gedanken Darwins von dem kontinuierlichen Zusammenhang aller Lebewesen stand His zwar sympathisch gegenüber, aber, wie wir sahen, von einem andern Gesichtspunkte als dessen Urheber, indem er es nicht für statthaft hielt, aus den typischen und entwicklungsgeschichtlichen Übereinstimmungen ohne weiteren Nachweis auf die Blutsverwandtschaft zurückzuschließen. His war also kein Anhänger der Deszendenzlehre im strengen Sinne.

Der Annahme einer regelmäßigen Wiederholung der genealogischen Entwicklung in der des Individuums vermochte er sich daher nur in sehr eingeschränktem Maße anzuschließen, und zwar nicht im Sinne der Vererbungslehre, sondern mehr unter dem Gesichtspunkte einer Wiederholung des Typus in vollkommenerer Form. Bekannt ist seine scharfe Abweisung ungerechtfertigter Übertreibungen in der Anwendung jenes sogenannten Grundgesetzes.

Eine allgemein verständliche Darstellung der wichtigsten bei seinen embryologischen Forschungen gewonnenen Anschauungen legte His (1874) in den berühmt gewordenen Briefen an einen befreundeten Naturforscher (F. Miescher) „Über unsere Körperform" nieder.

Bei seinen Untersuchungen über die erste Entwicklung des Hühnchens war His zu der Lehre von der frühzeitigen Sonderung der ersten Anlage in zwei nach ihren Leistungen

Digitized by Google

verschiedene Keime gelangt; der eine, der „Archiblast", liefert die spezifischen Gewebe, das Nerven-, Muskel- und Epithelgewebe, während das ganze Stützgewebe des Körpers, das Bindegewebe mit den Gefäßen von einem besonderen, aus den Elementen des sog. weißen Dotters stammenden Keim, dem „Parablasten", herrührt. Es würde zu weit führen, die Einzelheiten dieser Lehre ausführlich zu erörtern. His selbst hat uns in einem interessanten Rückblick dargestellt, wie er durch seine wissenschaftliche Entwicklung (besonders unter dem Einfluß der Virchowschen Lehre vom Bindegewebe) zu dieser tief einschneidenden Auffassung gelangt war, die eine große Bewegung unter den Embryologen hervorrief.

His ging dabei von der wichtigen Entdeckung aus, daß die Gefäße mit dem sie begleitenden Bindegewebe nicht in den Anlagen der primitiven Organe selbst entstehen, sondern daß sie erst nachträglich von einem anscheinend ganz gesonderten Teil des Keimes aus hineinwachsen, andererseits von der Beobachtung, daß in das Eierstocksei von der umgebenden Hülle Zellen hineingelangen, die er von Elementen des mütterlichen Bindegewebes herleitete. Er glaubte diesen eingewanderten Zellen in den kugeligen Elementen des weißen Dotters wieder zu begegnen, die sich nun, entsprechend ihrer Abstammung, zu den den ganzen Körper durchsetzenden bindegewebigen Teilen und zu Gefäßen entwickeln sollten. Dies bedeutete also nichts Geringeres, als einen Ursprung des einen, wenn auch des wichtigsten Teiles des neuen Organismus aus der Keimzelle, den eines anderen, räumlich sehr großen Teiles aus Gewebszellen des mütterlichen Körpers. Man muß dabei berücksichtigen, daß die Eizelle in gewissem Sinne ebenfalls ein Bestandteil des mütterlichen Organismus ist, und daß in jener fast 40 Jahre zurückliegenden Zeit die feineren Untersuchungsmethoden, über die wir jetzt verfügen, und daher auch die feineren Vorgänge bei der Befruchtung noch so gut wie unbekannt waren.

Es konnte indes nicht ausbleiben, daß die neue Lehre auf vielseitigen Widerspruch stieß. His konnte sich später, auf Grund der Anwendung besserer Methoden, der Überzeugung

Digitized by Google

nicht verschließen, daß die von ihm für Zellen gehaltenen Gebilde des weißen Dotters eine andere Bedeutung besitzen, und daß die Anlagen der Gefäße und des Bindegewebes nicht der gleichen Natur seien, daß beide aber ebenfalls von dem Hauptkeim abstammen.

Es liegt eine gewisse Tragik darin, daß His am Ende seines arbeitsreichen Lebens die Erkenntnis nicht erspart blieb, daß jene Lehre, deren Richtigkeit er (über 30 Jahre lang) durch immer neue mühevolle Untersuchungen zu erweisen bestrebt war, auf teilweise irrtümlichen Voraussetzungen beruhte. Aber dennoch waren auch diese Arbeiten nicht verloren, da sie direkt und indirekt zur Klärung schwieriger Fragen führten. — Der Weg zur Erkenntnis führt durch Irrtümer; nicht der Irrtum als solcher ist zu verurteilen, wenn er in ernstem Streben nach dem Wahren begangen war. Wenn His, wie er im Jahre 1900 schrieb, „als Ergebnis eingehender Arbeit und schwerer innerer Kämpfe“ seine frühere Ansicht einer besseren Erkenntnis opferte, so hat er auch hierin bewiesen, daß die Wahrheit ihm das Höchste war.

Die embryologische Forschung beschäftigte His unausgesetzt bis an sein Lebensende, und groß ist die Zahl der einzelnen Arbeiten, die davon Kunde geben. An das Werk über die Entwicklung des Hühnchens, zum Teil schon daneben hergehend, schlossen sich Untersuchungeu über das Ei und die erste Entwicklung der Knochenfische, besonders der Salmoniden, denen dann später weitere über die Plagiostomen folgten, ein Arbeitsgebiet, welches einen wiederholten Aufenthalt in der neubegründeten zoologischen Station in Neapel veranlaßte.

Diese Arbeiten führten ihn zur Aufstellung der sogen. Verwachsungs- oder Konkreszenstheorie, über deren Bedeutung die Akten noch nicht geschlossen sind.

Sie gaben aber ferner Anlaß zu wertvollen Zell- und Protoplasmastudien, deren Ergebnisse in mehreren großen Aufsätzen in den Abhandlungen unserer Gesellschaft niedergelegt sind.

Digitized by Google

Schon während der Baseler Zeit war His andauernd bemüht, Material für die Bearbeitung der menschlichen Embryologie zu sammeln; wir verdanken ihm eine große Zahl wichtiger Einzeluntersuchungen (über die Entwicklung des Gesichts, des Halses, des Herzens, der Lunge und anderes), ganz besonders aber die große zusammenfassende Darstellung der Anatomie menschlicher Embryonen (deren erster und zweiter Teil die Gestalt- und Größenentwicklung bis zum Schlusse des zweiten Monats, deren dritter die Bildungsgeschichte der Organe zum Gegenstand hat), ein Meisterwerk, in dem mit Hilfe der neueren Methoden, und illustriert durch prächtige, von der Künstlerhand des Autors entworfene Tafeln die Organisation des menschlichen Embryo in klassischer Weise dargelegt ist.

Mit besonderer Liebe widmete His seine Arbeitskraft der Entwicklung des Zentralnervensystems, ein Gebiet, auf dem er sich unvergängliche Lorbeeren erworben hat.

In morphologischer Hinsicht verfolgte His mit äußerster Genauigkeit — an der Hand sehr instruktiver plastischer Modelle — die allmähliche Umwandlung der einfachen Anlage bis zu der komplizierten Form des ausgebildeten Organs. Auf dieser Grundlage beruht auch die heute ziemlich allgemein angenommene Einteilung des Gehirns.

In histogenetischer Beziehung war von grundlegender Bedeutung die endgültige Feststellung der epithelialen Natur des Stützgewebes des Zentralnervensystems, der Neuroglia Virchows, ferner der Nachweis, daß die peripherischen Nervenfasern sich als kontinuierlich weiterwachsende Ausläufer der Nervenzellen oder Neuroblasten entwickeln. His wurde hierdurch der eigentliche Begründer der sogenannten Neuronenlehre. Wenn auch heute wieder ein lebhafter Streit entbrannt ist über die allgemeine Durchführbarkeit dieser Lehre und ihre für die Erkenntnis der Funktionen des Zentralnervensystems hochbedeutenden Konsequenzen, so bleibt doch die Tatsache von der ersten Bildung der Fasern von den Nervenzellen unbestreitbar. Noch einmal faßte His im letzten Jahre seines Lebens die Summe seiner Arbeit auf

Digitized by Google

diesem Gebiete in einer mit schönen Abbildungen ausgestatteten Darstellung zusammen, ein köstliches Vermächtnis des körperlich schon leidenden, aber unermüdlich tätigen Mannes.

Die Schilderung von His' wissenschaftlicher Arbeit würde sehr unvollständig sein, wenn ich nicht kurz noch seiner anthropologischen und topographisch-anatomischen Leistungen gedächte. Neben seiner vielseitigen Lehr- und Forschertätigkeit in Basel unternahm His gemeinsam mit dem Zoologen Rütimeyer eine auf breiter Grundlage angelegte Untersuchung der Schweizerischen Schädelformen, die zur Aufstellung von vier verschiedenen Schädeltypen führte. Das Material stammte teils aus alten, teils aus modernen Grabstätten, besonders wurden die in der Schweiz an vielen Orten vorhandenen Beinhäuser durchforscht. Das umfangreiche Werk, „Crania helvetica", mit einem Atlas von vierundachtzig Tafeln nach eigenen Zeichnungen von His erschien 1864. Daran schlossen sich noch einige kleinere Arbeiten über die rhätische Bevölkerung und anderes an.

Ich erinnere ferner an die äußerst sorgfältige Untersuchung eines im Jahre 1894 in einem Grabgewölbe der hiesigen Johanniskirche aufgefundenen Skeletts, in dem man die Überreste von Johann Sebastian Bach vor sich zu haben glaubte. Mit einer an Sicherheit grenzenden Wahrscheinlichkeit konnte His diese Vermutung bestätigen. Nach seinen Angaben gelang es dem Bildhauer Seffner, über den Schädel eine Büste zu modellieren, die unverkennbare Übereinstimmung mit den besten beglaubigten Bildern Bachs zeigte. Durch ein ähnliches Zusammenarbeiten mit einem geschickten Gipsformer (Steger) schuf His lehrreiche, plastische Nachbildungen der Organe des menschlichen Körpers in ihren natürlichen Lagebeziehungen, ein unentbehrliches Lehrmittel im anatomischen und klinischen Unterricht. Noch seine letzte Veröffentlichung, die wenige Tage vor seinem Ende erschien, hatte Untersuchungen über die topographischen Verhältnisse des Magens zum Gegenstande.

So zeigte sich His auf allen Gebieten seiner umfassenden

Digitized by Google

Wissenschaft produktiv tätig; was er angriff, führte er durch, oft mit Überwindung großer Schwierigkeiten; mit feinem künstlerischen Sinn, unterstützt durch eine seltene Vertrautheit mit technischen Fertigkeiten, lernte und lehrte er uns die oft so geheimnisvolle Bedeutung der werdenden und der ausgebildeten organischen Formen verstehen.

So war er auch als akademischer Lehrer! Unermüdlich, in seinen Schülern das Verständnis der Formen zu erwecken, die knappe, wohldurchdachte Rede beständig mit zeichnerischer Darstellung begleitend. Neben der Forschung lag ihm das Wohl seiner Schüler am nächsten, mußte doch jene oft genug hinter der Sorge für dieses zurücktreten. Mit einer Pflichttreue, die ihresgleichen sucht, führte der bereits schwer leidende Mann seine letzte Vorlesung im Winterhalbjahre bis zu Ende durch, und vielen seiner Zuhörer mag wohl erst zu spät klar geworden sein, welches Opfer er ihnen damit brachte.

Pflichttreue und das Streben, für das Wohl der Gesamtheit zu arbeiten, waren die Triebfedern, die His auch außerhalb seines Lehrberufes beseelten, gleichviel, ob er in seiner Baseler Zeit als Mitglied des großen Rates sich der Verbesserung hygienischer Zustände widmete, oder ob er ein Ehrenamt der Universität zu verwalten hatte. Ich erinnere an seine eifrige und erfolgreiche Tätigkeit bei der Reorganisation der Gesellschaft deutscher Naturforscher und Ärzte; ich erinnere an die unter seiner Mitwirkung erfolgte Begründung der Anatomischen Gesellschaft, bei deren erster Versammlung in Leipzig (1887) auf seine Veranlassung die Inangriffnahme einer einheitlichen anatomischen Nomenklatur beschlossen wurde. Das Ergebnis der langjährigen Arbeiten der damit betrauten Kommission wurde (1895) mit ausführlichen Erläuterungen von His herausgegeben.

Vor allem geziemt es uns heut, dankbar der vieljährigen Arbeit des Dahingeschiedenen als Mitglied unserer Gesellschaft und besonders seiner tatkräftigen Führung der Geschäfte als Sekretär der mathematisch-physikalischen Klasse zu gedenken. Im April des Jahres 1901, an dessen Ende

Digitized by Google

dies Ehrenamt von seinem unvergeßlichen Vorgänger Wislicenus auf His überging, hatte die erste Generalversammlung der internationalen Assoziation der Akademien in Paris stattgefunden. Es war damit diese hochbedeutende, aus dem deutschen Kartell hervorgegangene Institution ins Leben getreten, an deren Zustandekommen auch His auf das lebhafteste interessiert war. Einen besonderen Anspruch auf unseren Dank hat sich His später durch eine objektive Darstellung der Vorgeschichte des deutschen Kartells und der Assoziation erworben, durch welche er das Verdienst der geistigen Urheber des großen Unternehmens klarstellte.

Der Gedanke an eine gemeinsame Beteiligung der Fachgelehrten an der Lösung großer wissenschaftlicher Aufgaben hatte His schon lange beschäftigt; in einem Vortrag auf der Berliner Naturforscherversammlung (1886) über die Entwicklung der zoologischen Station in Neapel hatte er das allgemeine Interesse für das wachsende Bedürfnis nach wissenschaftlichen Zentralanstalten zu erwecken gesucht. Wie konnte dieser langgehegte Lieblingsgedanke glänzender verwirklicht werden, als durch die Vereinigung der angesehensten wissenschaftlichen Körperschaften Europas! So wurde denn auf seine Begründung hin von unserer Gesellschaft der Antrag an die Assoziation gerichtet, eine internationale Sammlung und Verarbeitung des Materials auf den Gebieten der Entwicklungslehre und der Gehirnanatomie vorzubereiten, ein Antrag, der von der Pariser Versammlung zunächst für die letztere angenommen wurde. Wiederum war es His, der das Arbeitsprogramm für die zu wählende Kommission aufstellte; im Verein mit seinem Mitdelegierten, Herrn Flechsig konnte er, nicht ohne Genugtuung, über den befriedigenden Verlauf der ersten Sitzung der Kommission in London (5. Juni 1903) berichten. Eine letzte schmerzliche Entsagung bedeutete für ihn der gezwungene Verzicht auf die Teilnahme an der diesjährigen Londoner Konferenz. Kurze Zeit nach seiner Absage schloß er die Augen für immer.

Wenn wir das Werk dieses unermüdlichen Forschers überblicken, so erfüllt uns Bewunderung und Verehrung!



Digitized by Google

Seine Lebensarbeit gleicht den durchsichtigen Bergwässern seiner Heimat, die, aus einer reinen Quelle entsprungen, durch immer neue Zuflüsse breiter und tiefer werdend, einem fernen Ziele zustreben, nicht in träger Strömung, sondern so manches Hindernis überwindend, das sich ihrem Laufe entgegenstellt. War das Ziel schon erreicht, als eine dunkle Gewalt den Lauf hemmte? Noch vieles wollte His vollenden, was ihn seit lange beschäftigt hatte. So mischt sich denn mit unserer Dankbarkeit für das, was er uns hinterließ, das schmerzliche Gefühl, daß er uns und der Wissenschaft zu früh entrissen wurde. Der Wunsch, den er am Schlusse seiner Lebenserinnerungen aussprach, daß man auch ihm einst ein dankbares Angedenken bewahren möge, wird in Erfüllung gehen. Wilhelm His war einer der Auserwählten, die in der Geschichte ihrer Wissenschaft unvergängliche Spuren hinterlassen; der edle Mensch aber wird in unser aller Gedächtnis leben.

---

Druckfertig erklärt 22. XII. 1904.]

Digitized by Google

# CLEMENS WINKLER

## NEKROLOG

GESPROCHEN IN DER ÖFFENTLICHEN GESAMTSITZUNG
BEIDER KLASSEN AM 14. NOVEMBER 1904

VON

ERNST BECKMANN.



Digitized by Google

Digitized by Google

Hochgeehrte Versammlung!

Vor einigen Tagen habe ich an Stelle des leider von einem schweren Schicksalsschlag betroffenen Kollegen HANTZSCH die Aufgabe übernommen, in der heutigen Sitzung zum Gedächtnis von CLEMENS WINKLER zu sprechen. Derselbe gehörte seit dem 13. Dezember 1890 zu unseren ordentlichen Mitgliedern und ist uns im vorigen Monat entrissen worden.

Im Jahre 1838 am 26. Dezember wurde CLEMENS WINKLER zu Freiberg in Sachsen geboren. Die Familie war eng mit dem hüttenmännischen Betrieb verwachsen; schon der Urgroßvater und der Großvater hatten sich im Hüttenwesen hervorgetan; der Vater bekleidete die Stelle eines Oberschiedswardeins und leitete später ein Blaufarbenwerk. Hiernach erscheint WINKLER für das Hüttenfach, dem er ebenfalls zugeführt wurde, geradezu vorgeboren.

Seine erste hüttenmännische Ausbildung erhielt er an der Bergakademie zu Freiberg, wo er bald eine besondere Vorliebe für chemische Arbeiten und Studien faßte. Im chemischen Unterrichts-Laboratorium überragte er an Wissen und Können seine Kommilitonen, und seine Kenntnisse in der Analyse sprechen sich bereits nach einigen Jahren in selbständigen Veröffentlichungen aus.

Mit 21 Jahren wurde WINKLER als Akzessist beim Königlichen Blaufarbenwerk Oberschlema im Erzgebirge angestellt. Nach 2 Jahren vertauschte er diese Stellung mit derjenigen eines Hüttenchemikers beim Blaufarbenwerk Pfannenstiel bei Aue. Im Jahre 1864 begegnen wir ihm an unserer Universität, wo er auf Grund einer Arbeit über Siliciumverbindungen die philosophische Doktorwürde erwarb.

Digitized by Google

WINKLER war ein Mann von großer Initiative, der bereits in seiner Stellung als Hüttenchemiker sich an der Lösung wissenschaftlicher Aufgaben versuchte und sich dadurch den Weg zu einer akademischen Stellung bahnte.

Im Jahre 1873 erhielt er an Stelle SCHEERERS den chemischen Lehrstuhl an der Akademie Freiberg, und in dieser Stellung ist er auch fast bis an sein Lebensende tätig geblieben. Nicht daß es ihm an Gelegenheit gefehlt hätte an andere Hochschulen überzusiedeln — außer Dresden, Charlottenburg und Göttingen hat auch unsere Universität den Versuch gemacht ihn an sich zu ziehen — er konnte sich aber nicht entschließen sein geliebtes Freiberg und die Bergakademie zu verlassen. Die Entwickelung der Freiberger Bergakademie der letzten 30 Jahre ist mit auf die wissenschaftliche und organisatorische Tätigkeit WINKLERS zu setzen. Die Arbeiten WINKLERS, welche für wissenschaftliche und technische Kreise die weitestgehende Bedeutung besaßen, hoben den Glanz der Lehrstätte, und als WINKLER im Jahre 1896 Direktor der Bergakademie wurde, sorgte er dafür, daß der chemische Unterricht die gleiche Stellung gesichert erhielt, wie an den technischen Hochschulen. Nach drei Jahren legte er das Rektorat nieder, nachdem es ihm gelungen war, dem Wahlrektorat wie an den anderen Hochschulen Eingang zu verschaffen.

In Würdigung seiner großen Verdienste um die Bergakademie suchte diese die Verbindung mit ihm auch dann noch aufrecht zu erhalten, als er im Jahre 1902 wegen Krankheit in den Ruhestand übertreten mußte. Sie erwählte ihn zu ihrem dauernden Ehrenmitgliede.

Nur zwei Jahre war es WINKLER vergönnt, sich in Dresden noch literarischen Arbeiten zu widmen; ein chronisches immer schwerer werdendes Lungenleiden, welches wohl auf das Einatmen schädlicher Stoffe zurückgeführt werden darf, verschlimmerte sich mit Unterbrechungen mehr und mehr und setzte schließlich am 8. Oktober dieses Jahres vielen mit Geduld ertragenen Qualen und seinem Leben ein Ziel.

Digitized by Google

Die wissenschaftlichen Arbeiten Clemens Winklers liegen in dem Gebiete der anorganischen und technischen Chemie; einer eigentlichen Schule hat er nicht angehört, er muß vielmehr als ein self-made-man betrachtet werden. Mit großem Geschick wußte er technische Probleme wissenschaftlich zu behandeln und bei einer Musterung seiner zahlreichen Abhandlungen und Schriftwerke finden wir, daß seine Tätigkeit auf die verschiedensten Teile der anorganischen Chemie sich erstreckt.

Den größten Triumph feierte unzweifelhaft Winkler durch die Entdeckung des Elementes Germanium (1886). Damit schenkte er der Chemie nicht nur ein neues Element, sondern er stützte dadurch in gewichtigster Weise das Lothar Meyer-Mendelejeffsche periodische System der Elemente. Die Eigenschaften des neuen Elementes stimmten fast verblüffend mit den Voraussagen Mendelejeffs überein. Aus einer Lücke, welche sein System zwischen Silicium und Zinn aufwies, hatte dieser auf ein noch zu entdeckendes Ekasilicium geschlossen, und Winkler war tatsächlich dessen Auffindung geglückt.

Für die Benennung des Elementes hatte Winkler nach einem Vortrag in der Leipziger chemischen Gesellschaft zunächst den Namen Neptunium gewählt; bekanntlich wurde der Planet Neptun entsprechend den Berechnungen von Adams und von Leverrier ebenfalls erst nachher durch Galle aufgefunden. Die Entdeckung des Galliums von französischer Seite veranlaßte ihn aber, dann dem Wunsche von Freunden nachzugeben und es Germanium zu nennen. Leider steht die Seltenheit des als Rohmaterial benutzten Argyrodits der Beschaffung größerer Quantitäten des Elementes im Wege.

In technischen Kreisen ist es besonders das Kontaktverfahren zur Darstellung von anhydrischer und rauchender Schwefelsäure aus Schwefeldioxyd und Sauerstoff durch Vermittlung von Platin gewesen, das Winklers Namen zu einem besonders glänzenden gemacht hat. Wenn auch Winkler nicht der Erste war, welcher diese Bildung von Schwefelsäure-Anhydrid beobachtete und die allgemeinere Verwertung

Digitized by Google

des Prozesses für die Schwefelsäurefabrikation erst späteren Forschern gelungen ist, so besitzt doch WINKLER das unbestrittene Verdienst, die technische Durchführung des Kontaktverfahrens zur Anhydriddarstellung in den Freiberger Hütten bewirkt zu haben. Statt des von WINKLER vorgeschriebenen Gemisches von Schwefeldioxyd und Sauerstoff in stöchiometrischen Mengen, welche man unter ständiger Wärmezufuhr bei Gegenwart von Platinasbest zur Reaktion brachte, arbeitet man jetzt, in Übereinstimmung mit den Lehren der physikalischen Chemie, weit vorteilhafter mit den zuvor gereinigten Röstgasen von Pyrit bei Sauerstoffüberschuß und benutzt die beim Prozeß freiwerdende Wärme zur Unterhaltung desselben.

Mit dem praktisch geschulten Auge vermochte WINKLER auch die exakten gasanalytischen Methoden von BUNSEN für die Technik zu fruktifizieren und der Gasanalyse eine vorher ungeahnte Bedeutung in der chemischen Industrie zu sichern. Seine Methoden sind neben denjenigen von W. HEMPEL längst Gemeingut aller Laboratorien geworden. Die „Anleitung zur chemischen Untersuchung der Industriegase" (1876) und das „Lehrbuch der technischen Gasanalyse" (1885) geben Zeugnis von einem staunenswerten experimentellen Geschick und praktischem Sinn. Für seine Verdienste um die technische Gasanalyse wurde ihm vom Verein zur Förderung des Gewerbfleißes die goldene Delbrück-Medaille verliehen.

Besondere Verdienste hat sich WINKLER auch um die Ausbildung der Maßanalyse erworben. Auch hier suchte er und mit großem Erfolg alles nach der praktischen Seite hin zu vervollkommnen. In seinem „Lehrbuch der Maßanalyse nach neuem titrimetrischen System" (1883) und in seinen „Praktischen Übungen in der Maßanalyse" (1888) haben wir eine Fundgrube bemerkenswerter Vorschläge, deren Wert auch jetzt noch fortbesteht.

Außer eingehenden Studien über zahlreiche Metalle und Mineralien möchte ich noch seine technisch wichtigen Untersuchungen über die Beseitigung der Hüttenrauchschäden sowie über die schlagenden Wetter hervorheben.

Digitized by Google

Bei dem Sinn für das Praktische ging Winkler das Bestreben, die Untersuchungsmethoden möglichst exakt zu machen, in keiner Weise ab; im Gegenteil zeichnet er sich bei seinen Arbeiten durch besondere Subtilität aus. Wenn durch seine Atomgewichts-Bestimmungen von Nickel und Kobalt das Problem nicht endgültig erledigt wurde und durch spätere Arbeiten angezweifelt werden konnte, so erhellt doch aus seinen Arbeiten, daß er nach dem jeweiligen Stande der Dinge das Vollkommenste zu erreichen gesucht hat.

Die analytische Ausbildung Clemens Winklers auf empirischer Basis brachte es naturgemäß mit sich, daß er die neuen Fortschritte, welche die physikalische Chemie auf Grund veränderter theoretischer Anschauungen der analytischen Chemie gebracht hat, nicht voll zu würdigen geneigt war. Er fürchtete immer, den Tatsachen könnte durch vorgefaßte Meinung Zwang angetan werden, und man möchte sich von dem experimentellen Boden zu weit entfernen. Wie ich glaube, dürften ihn die Erfolge der neuen Anschauung dieser Sorge zum großen Teil enthoben haben.

Wer jemals Winkler persönlich kennen gelernt und gesprochen hat, wird die liebenswürdige gewinnende Persönlichkeit nie wieder vergessen. Ihm war es Bedürfnis jedem gefällig zu sein, auch die Leistungen anderer anzuerkennen und sie in jeder Weise zu fördern. Sehr oft bin ich als jüngerer Dozent beschämt gewesen, auf die Einsendung einer Abhandlung, von Clemens Winkler ein Schreiben zu erhalten, durch welches der Arbeit die interessierteste Beachtung, nach meiner Ansicht über Gebühr, geschenkt wurde. Die liebenswürdige und elegante Art, welche Winkler im persönlichen Verkehr auszeichnete, machte auch die Lektüre seiner Abhandlungen und das Hören seiner Vorträge zu einem großen Genuß. Aus seinen Abhandlungen, z. B. denjenigen über Germanium, teilt sich dem Leser die Freude und die Befriedigung mit, welche erfolgreiches wissenschaftliches Forschen gewährt. Seine allgemeine Beliebtheit auch in weiten Fachkreisen spricht sich darin aus, daß der internationale Kongreß für angewandte Chemie in Berlin 1903 ihn zum Ehrenpräsi-

Digitized by Google

denten erwählte. Mit ADOLF BAEYER war er auch der erste Chemiker, welcher nach Schaffung des Promotions-Rechtes der technischen Hochschulen mit dem Titel eines Dr. ing. h. c. ausgezeichnet wurde. Als Ehrenmitglied stand er auch mit an der Spitze des Vereins Deutscher Chemiker, des Vereins deutscher Ingenieure, des Frankfurter Physikalischen Vereins und der Leipziger Chemischen Gesellschaft.

Viele andere wissenschaftliche Korporationen, wie unsere Gesellschaft der Wissenschaften, die Königlich Schwedische und Königlich Holländische Gesellschaft der Wissenschaften zählten ihn zu ihren erwählten Mitgliedern.

Fürstenhuld beförderte ihn 1876 zum Bergrat, 1888 zum Oberbergrat, 1893 zum Geheimen Bergrat, 1897 zum Geheimen Rat und schmückte ihn mit hohen Orden. Die Dankbarkeit seiner Mitbürger verlieh ihm das Ehrenbürgerrecht von Freiberg.

Am 5. Februar 1900 hatte unsere Gesellschaft den Vorzug, CLEMENS WINKLER in der Sitzung begrüßen zu können. Er hielt in derselben einen sehr interessanten Vortrag über die Möglichkeit der Einwanderung von Metallen in Eruptivgesteine unter Vermittlung von Kohlenoxyd, welcher in unseren Berichten[1]) erschienen ist. Wir haben es uns stets zur Ehre angerechnet, CLEMENS WINKLER zu den unsrigen zählen zu dürfen. Seine Arbeiten werden in Wissenschaft und Praxis auf lange Zeit hinaus hoher Wertschätzung sicher sein.

1) Bd. 52. 1901 S. 9—16.

Druckfertig erklärt 30. XII. 1904.]

Digitized by Google

Protektor der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften

## SEINE MAJESTÄT DER KÖNIG.

---

### Ehrenmitglied.

Seine Exzellenz der Staatsminister des Kultus und öffentlichen Unterrichts Dr. *Kurt Damm Paul v. Seydewitz.*

---

### Ordentliche einheimische Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Ernst Windisch* in Leipzig, Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1906.
Geheimer Rat *Hermann Lipsius* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der philol.-histor. Klasse bis Ende des Jahres 1906.
Professor *Adolf Birch-Hirschfeld* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Friedrich Karl Brugmann* in Leipzig.
—— —— *Karl Bücher* in Leipzig.
Professor *Berthold Delbrück* in Jena.
—— *August Fischer* in Leipzig.
Bibliotheksdirektor Professor *Oscar v. Gebhardt* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Heinrich Gelzer* in Jena.
—— —— *Georg Götz* in Jena.
Geheimer Kirchenrat *Albert Hauck* in Leipzig.
Geheimer Rat *Max Heinze* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Rudolf Hirzel* in Jena.
Oberschulrat *Friedrich Otto Hultsch* in Dresden-Striesen.
Professor *Albert Köster* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Karl Lamprecht* in Leipzig.
—— —— *August Leskien* in Leipzig.



Digitized by Google

Professor *Friedrich Marx* in Leipzig.
—— *Richard Meister* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Mitteis* in Leipzig.
Professor *Eugen Mogk* in Leipzig.
Oberstudienrat *Hermann Peter* in Meissen.
Professor *Wilhelm Roscher* in Wurzen.
—— *August Schmarsow* in Leipzig.
Hofrat *Theodor Schreiber* in Leipzig.
Professor *Gerhard Seeliger* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Eduard Sievers* in Leipzig.
Geheimer Rat *Rudolph Sohm* in Leipzig.
Professor *Georg Steindorff* in Leipzig.
—— *Wilhelm Stieda* in Leipzig.
—— *Franz Studniczka* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Georg Treu* in Dresden.
Professor *Moritz Voigt* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Curt Wachsmuth* in Leipzig
—— —— *Richard Paul Wülker* in Leipzig.
Professor *Heinrich Zimmern* in Leipzig.

## Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der philologisch-historischen Klasse.

Geheimer Hofrat *Lujo Brentano* in München.
Professor *Friedrich Delitzsch* in Berlin.
Geheimer Hofrat *Erich Marcks* in Heidelberg.
Hofrat *Friedrich Kluge* in Freiburg i. B.
Geheimer Regierungsrat *Eberhard Schrader* in Berlin.

## Ordentliche einheimische Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimer Rat *Ferdinand Zirkel* in Leipzig, Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1905.
Geheimer Bergrat *Hermann Credner* in Leipzig, stellvertretender Sekretär der mathem.-phys. Klasse bis Ende des Jahres 1905.
Professor *Ernst Abbe* in Jena.
Geheimer Hofrat *Ernst Beckmann* in Leipzig.
—— *Wilhelm Biedermann* in Jena.

Digitized by Google

Geheimer Medizinalrat *Rudolf Böhm* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Heinrich Bruns* in Leipzig.
Professor *Karl Chun* in Leipzig.
—— *Theodor Des Coudres* in Leipzig.
Dr. *Wilhelm Feddersen* in Leipzig.
Geheimer Medizinalrat *Paul Flechsig* in Leipzig.
Professor *Arthur Hantzsch* in Leipzig.
Geheimer Medizinalrat *Ewald Hering* in Leipzig.
Professor *Otto Hölder* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ludwig Knorr* in Jena.
—— —— *Martin Krause* in Dresden.
Geheimer Medizinalrat *Felix Marchand* in Leipzig.
Professor *Adolph Mayer* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Ernst von Meyer* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Müller* in Jena.
—— —— *Carl Neumann* in Leipzig.
Wirklicher Staatsrat Professor *Arthur v. Oettingen* in Leipzig.
Geheimer Hofrat *Wilhelm Ostwald* in Leipzig.
—— —— *Wilhelm Pfeffer* in Leipzig.
—— —— *Karl Rohn* in Dresden.
—— —— *Wilhelm Scheibner* in Leipzig.
Professor *Ernst Stahl* in Jena.
Geheimer Hofrat *Johannes Thomae* in Jena.
—— —— *August Töpler* in Dresden.
Professor *Otto Wiener* in Leipzig.
Geheimer Rat *Wilhelm Wundt* in Leipzig.
—— —— *Gustav Anton Zeuner* in Dresden.

---

## Außerordentliche Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Professor *Karl Correns* in Leipzig.
—— *Johannes Felix* in Leipzig.
—— *Otto Fischer* in Leipzig.
—— *Hans Held* in Leipzig.
—— *Max Siegfried* in Leipzig.
—— *Otto zur Strassen* in Leipzig.

---



Digitized by Google

## Frühere ordentliche einheimische, gegenwärtig auswärtige Mitglieder der mathematisch-physischen Klasse.

Geheimrat *Ludwig Boltzmann* in Wien.
Professor *Friedrich Engel* in Greifswald.
Geheimer Regierungsrat *Felix Klein* in Göttingen.
—— —— *Ferdinand Freiherr von Richthofen* in Berlin.

---

## Archivar:

*Ernst Robert Abendroth* in Leipzig.

---

## Verstorbene Mitglieder.

### Ehrenmitglieder.

*Falkenstein, Johann Paul von,* 1882.
*Gerber, Carl Friedrich von,* 1891.
*Wietersheim, Karl August Wilhelm Eduard von,* 1865.

### Philologisch-historische Klasse.

*Albrecht, Eduard,* 1876.
*Ammon, Christoph Friedrich von,* 1850.
*Becker, Wilhelm Adolf,* 1846.
*Berger, Hugo,* 1904.
*Böhtlingk, Otto,* 1904.
*Brockhaus, Hermann,* 1877.
*Bursian, Conrad,* 1883.
*Curtius, Georg,* 1885.
*Droysen, Johann Gustav,* 1884.
*Ebers, Georg,* 1898.
*Ebert, Adolf,* 1890.
*Fleckeisen, Alfred,* 1899.
*Fleischer, Heinr. Leberecht,* 1888.
*Flügel, Gustav,* 1870.
*Franke, Friedrich,* 1871.
*Gabelentz, Hans Conon von der.* 1874.
*Gabelentz, Hans Georg Conon von der,* 1893.
*Gersdorf, Ernst Gotthelf,* 1874.
*Göttling, Carl,* 1869.
*Gutschmid, Hermann Alfred von,* 1887.
*Hänel, Gustav,* 1878.
*Hand, Ferdinand,* 1851.
*Hartenstein, Gustav,* 1890.
*Hasse, Friedrich Christian August,* 1848.
*Haupt, Moritz,* 1874.
*Hermann, Gottfried,* 1848.
*Jacobs, Friedrich.* 1847.
*Jahn, Otto,* 1869.
*Janitschek, Hubert.* 1893.
*Köhler, Reinhold,* 1892.
*Krehl, Ludolf,* 1901.

Digitized by Google

*Lange, Ludwig,* 1885.
*Marquardt, Carl Joachim,* 1882.
*Maurenbrecher, Wilhelm,* 1892.
*Miaskowski, August von,* 1899.
*Michelsen, Andreas Ludwig Jacob,* 1881.
*Mommsen, Theodor,* 1903.
*Nipperdey, Carl,* 1875.
*Noorden, Carl von,* 1883.
*Overbeck, Johannes Adolf,* 1895.
*Pertsch, Wilhelm,* 1899.
*Peschel, Oscar Ferdinand,* 1875.
*Preller, Ludwig,* 1861.
*Ratzel, Friedrich,* 1904.
*Ribbeck, Otto,* 1898.
*Ritschl, Friedrich Wilhelm,* 1876.
*Rohde, Erwin,* 1898.
*Roscher, Wilhelm,* 1894.
*Ruge, Sophus,* 1903.
*Sauppe, Hermann,* 1893.
*Schleicher, August,* 1868.
*Seidler, August,* 1851.
*Seyffarth, Gustav,* 1885.
*Socin, Albert,* 1899.
*Springer, Anton,* 1891.
*Stark, Carl Bernhard,* 1879.
*Stobbe, Johann Ernst Otto,* 1887.
*Tuch, Friedrich,* 1867.
*Ukert, Friedrich August,* 1851.
*Voigt, Georg,* 1891.
*Wachsmuth, Wilhelm,* 1866.
*Wächter, Carl Georg von,* 1880.
*Westermann, Anton,* 1869.
*Zarncke, Friedrich,* 1891.

## Mathematisch-physische Klasse.

*d'Arrest, Heinrich,* 1875.
*Baltzer, Heinrich Richard,* 1887.
*Bezold, Ludwig Albert Wilhelm von,* 1868.
*Braune, Christian Wilhelm,* 1892.
*Bruhns, Carl,* 1881.
*Carus, Carl Gustav,* 1869.
*Carus, Julius Victor,* 1903.
*Cohnheim, Julius,* 1884.
*Döbereiner, Johann Wolfgang,* 1849.
*Drobisch, Moritz Wilhelm,* 1896.
*Erdmann, Otto Linné,* 1869.
*Fechner, Gustav Theodor,* 1887.
*Funke, Otto,* 1879.
*Gegenbaur, Carl,* 1903.
*Geinitz, Hans Bruno,* 1900.
*Hankel, Wilhelm Gottlieb,* 1899.
*Hansen, Peter Andreas,* 1874.
*Harnack, Axel,* 1888.
*His, Wilhelm,* 1904.
*Hofmeister, Wilhelm,* 1877.
*Huschke, Emil,* 1858.
*Knop, Johann August Ludwig Wilhelm,* 1891.
*Kolbe, Hermann,* 1884.
*Krüger, Adalbert,* 1896.
*Kunze, Gustav,* 1851.
*Lehmann, Carl Gotthelf,* 1863.
*Leuckart, Rudolph,* 1898.
*Lie, Sophus,* 1899.
*Lindenau, Bernhard August von,* 1854.
*Ludwig, Carl,* 1895.
*Marchand, Richard Felix,* 1850.
*Mettenius, Georg,* 1866.
*Möbius, August Ferdinand,* 1868.
*Naumann, Carl Friedrich,* 1873.
*Pöppig, Eduard,* 1868.
*Reich, Ferdinand,* 1882.

Digitized by Google

*Scheerer, Theodor*, 1875.
*Schenk, August*, 1891.
*Schleiden, Matthias Jacob*, 1881.
*Schlömilch, Oscar*, 1901.
*Schmitt, Rudolf Wilhelm*, 1898.
*Schwägrichen, Christian Friedrich*, 1853.
*Seebeck, Ludwig Friedrich Wilhelm August*, 1849.
*Stein, Samuel Friedrich Nathanael von*, 1885.
*Stohmann, Friedrich*, 1897.
*Volkmann, Alfred Wilhelm*, 1877.
*Weber, Eduard Friedrich*, 1871.
*Weber, Ernst Heinrich*, 1878.
*Weber, Wilhelm*, 1891.
*Wiedemann, Gustav*, 1899.
*Winkler, Clemens*, 1904.
*Wislicenus, Johannes*, 1902.
*Zöllner, Johann Carl Friedrich*, 1882.

Leipzig, am 31. Dezember 1904.

Digitized by Google

# Verzeichnis

## der bei der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften im Jahre 1904 eingegangenen Schriften.

---

### 1. Von gelehrten Gesellschaften, Universitäten und öffentlichen Behörden herausgegebene und periodische Schriften.

Deutschland.

Abhandlungen der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus d. J. 1903. Berlin d. J.

Sitzungsberichte der Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1903, No. 41—53. 1904, No. 1—40. Berlin d. J.

Politische Korrespondenz Friedrichs d. Gr. Bd. 29. Berlin 1904.

Acta Borussica. Denkmäler der preußischen Staatsverwaltung im 18. Jahrh. Herausg. von der Königl. Akademie der Wissenschaften: Das preußische Münzwesen im 18. Jahrh. Münzgeschichtlicher Teil. Bd. 1. Beschreibender Teil. H. 2. Berlin 1904.

*Brueckner, Alfr.*, Anakalypteria. 64. Programm zum Winckelmannsfeste der Archäologischen Gesellschaft zu Berlin. Berlin 1904.

Berichte der deutschen chemischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 36, No. 18. Jahrg. 37, No. 1—17. Berlin 1903. 04.

Die Fortschritte der Physik im J. 1903. Dargestellt von der Physikalischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 59. Abt. 1—3. Braunschweig 1904.

Verhandlungen der deutschen physikalischen Gesellschaft. Jahrg. 5, No. 24. Jahrg. 6, No. 3—9. Berlin 1903. 04.

Centralblatt für Physiologie. Unter Mitwirkung der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin herausgegeben. Bd. 17 (Jahrg. 1903), No. 20—26. Bd. 18 (Jahrg. 1903), No. 1—19. Berlin d. J.

Verhandlungen der Physiologischen Gesellschaft zu Berlin. Jahrg. 27 (1902/03), No. 15—17. Jahrg. 28 (1903/04) No. 5—16. Berlin d. J.

Abhandlungen der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt N. F. H. 39—42. Berlin 1903. 04.

*Potonié, H.*, Abbildungen und Beschreibungen fossiler Pflanzenreste der paläozoischen und mesozoischen Formationen. Herausg. von der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt. Lief. 2. Berlin 1904.

Jahrbuch der Kgl. Preuß. geolog. Landesanstalt und Berg-Akademie zu Berlin. Bd. 22 (1901). Berlin 1904.

Digitized by Google

Die Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt im Jahre 1903. S.-A. Berlin d. J. — Die bisherige Tätigkeit der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt. Braunschweig 1904.

*Hettner, G.*, Alte mathematische Probleme und ihre Klärung im 19. Jahrh. Rede in der Halle der Kgl. Technischen Hochschule. Berlin 1904.

9. und 13. Jahresbericht des Vereins für Naturwissenschaft zu Braunschweig für die Vereinsjahre 1893/95, 1901/03. Braunschweig 1903. 04.

Einundachtzigster Jahresbericht der Schlesischen Gesellschaft für vaterländische Kultur. Enthält den Generalbericht über die Arbeiten und Veränderungen der Gesellschaft im J. 1903. — Die Schlesische Gesellschaft für vaterländische Kultur. I. Die Hundertjahrfeier. II. Geschichte der Gesellschaft. Breslau 1903. 04.

Jahrbuch des Königl. Sächs. meteorologischen Instituts [in Chemnitz]. Jahrg. 18. Chemnitz 1903. — Dekaden-Monatsberichte. Jahrg. 5. 6 (1902. 03).

Zeitschrift des k. sächsischen statistischen Bureaus. Jahrg. 49, No. 1—4. Beilage. Jahrg. 50 (1902), No. 1. 2. Dresden 1904.

Jahresbericht der Gesellschaft für Natur- und Heilkunde in Dresden. Sitzungsber. 1902/03. München 1904.

Sitzungsberichte und Abhandlungen der naturwissenschaftlichen Gesellschaft Isis in Dresden. Jahrg. 1903. 1904, Jan.—Jun. Dresden d. J.

Verzeichnis der Vorlesungen und Übungen an der Kgl. Sächs. Technischen Hochschule f. d. Sommersem. 1904 u. Wintersem. 1904/05. — Personalverzeichnis der Kgl. Sächs. Techn. Hochschule f. d. Sommersem. 1904 u. Wintersem. 1904/05.

Mitteilungen der Pollichia, eines naturwissenschaftlichen Vereins der Rheinpfalz. No. 18. 19. Jahrg. 60. Dürkheim a. d. H. 1904.

Jahrbuch des Düsseldorfer Geschichtsvereins. Bd. 18. Beiträge zur Geschichte des Niederrheins. Düsseldorf 1903.

Sitzungsberichte der physikal.-medizinischen Societät in Erlangen. H. 35 (1903). Erlangen 1904.

Jahresbericht des Physikalischen Vereins zu Frankfurt a. M. f. das Rechnungsjahr 1902/03. Frankfurt 1904.

Helios. Abhandlungen und monatliche Mitteilungen aus dem Gesamtgebiete der Naturwissenschaften. Organ des Naturwissensch. Vereins des Reg.-Bezirks Frankfurt. Jahrg. 21. Berlin 1904.

Jahrbuch f. d. Berg- und Hüttenwesen im Königreich Sachsen auf d. Jahr 1904. Freiberg d. J.

Programm der Kgl. Sächs. Bergakademie zu Freiberg f. d. J. 1904/05. Freiberg 1904.

Verzeichnis der Vorlesungen auf der Großherzogl. Hessischen Ludwigs-Univers. zu Gießen. Sommer 1904, Winter 1904/05; Personalbestand W. 1903/04, S. 1904. — Satzungen der Universität Gießen. Teil 1. 2. — *Brauns, Reinhard*, Entwicklung des mineralogischen Unterrichts an der Universität Gießen (Festrede).. — *Sauer, Bruno*, Der Weber-Laborde'sche Kopf und die Giebelgruppen des Parthenon (Progr.). — 124 Dissertationen aus den Jahren 1903/04.

Neues Lausitzisches Magazin. Im Auftrag d. Oberlausitz. Gesellsch. d. Wissensch. herausg. von *R. Jecht*. Bd. 79. 80. Görlitz 1903. 04.

Digitized by Google

Codex diplomaticus Lusatiae superioris. Bd. 2. H. 4. 5. Görlitz 1903. 04.

Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. N. F. Philologisch-historische Klasse. Bd. 5. No. 5. Bd 7. No. 4. 5. Bd. 8. No. 1. 2. Math.-phys. Klasse. Bd. 3. No. 1 u. 5. Göttingen 1903. 04.

Nachrichten von der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1903, No. 6. 1904, No. 1—5. Philol.-hist. Kl. 1903, No. 6. 1904, No. 1—3. Geschäftliche Mitteilungen. 1903, H. 2. 1904, H. 1. Göttingen d. J.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Grimma über d. Schuljahr 1903/04. Grimma 1904.

Leopoldina. Amtl. Org. d. Kais. Leopoldinisch-Carolinisch deutschen Akad. der Naturforscher. H. 39, No. 12. H. 40, No. 1—11. Halle 1903. 04.

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Organ des naturwiss. Vereins für Sachsen und Thüringen. Bd. 76. H. 3—6. Bd. 77. H. 1. 2. Stuttgart 1904.

Mitteilungen der mathematischen Gesellschaft in Hamburg. Bd. 4. H. 4. Leipzig 1904.

Neue Heidelberger Jahrbücher. Herausg. vom Histor.-philosophischen Vereine zu Heidelberg. Jahrg. 12, Heft 2. Jahrg. 13. H. 1. Heidelberg 1903. 04.

Mitteilungen der Großh. Sternwarte zu Heidelberg. Herausg. von *W. Valentiner*. IV. Karlsruhe 1904.

Berichte über Land- und Forstwirtschaft in Deutsch-Ostafrika. Herausg. vom Kaiserl. Gouvernement von Deutsch-Ostafrika Dar-es-Salâm. Bd. 1. H. 7. Bd. 2. H. 1—3. Heidelberg 1903. 04.

Verhandlungen des naturhistorisch-medizinischen Vereins zu Heidelberg. N. F. Bd. 7. H. 3—5. Heidelberg 1904.

10 Dissertationen der Großherzogl. Badnischen Technischen Hochschule zu Karlsruhe a. d. J. 1903. 04. Karlsruhe 1904.

Chronik d. Universität zu Kiel f. d. J. 1903/4. — Verzeichnis der Vorlesungen. Winter 1903/04, Sommer 1904. — *Kauffmann, Friedrich*, Römisch-Germanische Forschung (Rektoratsrede). — *Martius, Götz*, Kant. Zum Gedächtnis seines 100jährigen Todestages (Rede). — *Schloßmann, Siegmund*, De iure cessio und Mancipatio (Progr.). — *Siemerling, Ernst*, Psychiatrie im Wandel der Zeiten (Rede). — 171 Dissertationen a. d. J. 1903/04. Kiel 1904.

Wissenschaftliche Meeresuntersuchungen. Herausg. von der Kommission zur wissenschaftl. Untersuchung der deutschen Meere in Kiel und der Biologischen Anstalt auf Helgoland. Im Auftrage des Königl. Minist. für Landwirtschaft, Domänen usw. N. F. Abteilung Helgoland. Bd. 5. H. 2. Bd. 6. H 1. 2. Kiel und Leipzig 1904.

Schriften der physikalisch-ökonomischen Gesellschaft zu Königsberg. Jahrg. 44 (1903). Königsberg 1903.

Sitzungsberichte der naturforschenden Gesellschaft zu Leipzig. Jahrg. 28. 29 (1901/02). Leipzig 1903.

10. Jahresbericht des Instituts für rumänische Sprache. — *Weigand, Gust.*, Linguistischer Atlas des dakorumänischen Sprachgebietes. Lief. 5. Leipzig 1904.

Digitized by Google

Jahresbericht des Nikolaigymnasiums in Leipzig. 1904.

Jahresbericht und Abhandlungen des naturwissenschaftlichen Vereins zu Magdeburg. 1902—04. Magdeburg 1904.

Festschrift zur Feier des 50jährigen Bestehens des Römisch-Germanischen Zentralmuseums zu Mainz. Mainz 1902.

Jahresbericht der Fürsten- und Landesschule zu Meißen von Juli 1903 bis Juli 1904. Meißen 1904.

Abhandlungen der histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bd. 23, Abt. 1. München 1903.

Sitzungsberichte der mathem.-phys. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1903, H. 4. 5. 1904, H. 1. 2. München d. J.

Sitzungsberichte der philos.-philol. u. histor. Kl. der k. bayer. Akad. d. Wiss. zu München. 1903, H. 4. 1904, H. 1—3. München d. J.

45. Plenarversammlung der histor. Kommission bei der k. bayer. Akad. d. Wiss. Bericht des Sekretariats. München 1904.

Sitzungsberichte der Gesellschaft für Morphologie und Physiologie in München. Bd. 19. H. 1. 2. München 1904.

Veröffentlichungen des erdmagnetischen Observatoriums bei der Kgl. Sternwarte in München. H. 1. München 1904.

Anzeiger des Germanischen Nationalmuseums. Jahrg. 1903. Hft. 1—4. — *Bredt, E. W.*, Katalog der mittelalterlichen Miniaturen des Germanischen Nationalmuseums. Nürnberg 1903.

Mitteilungen des Altertumsvereins zu Plauen i. V. 16. Jahresschrift a. d. J. 1903/04 nebst Beilage. Plauen 1904.

Historische Monatsblätter für die Provinz Posen. Jahrg. 4, No. 1—12. Posen 1903.

Zeitschrift der Historischen Gesellschaft für die Provinz Posen. Jahrg. 18, H. 1. 2. Posen 1903.

Veröffentlichung des Kgl. Preuß. Geodätischen Instituts (in Potsdam). N. Folge No. 14—17. — Zentralbureau der internationalen Erdmessung. N. F. der Veröffentlichungen. No. 10. Berlin 1904.

Publikationen des Astrophysikalischen Observatoriums zu Potsdam. — Photographische Himmelskarte. Berichtigungen zu Bd. 1—3. Potsdam 1904.

Annalen der Kais. Universitätssternwarte zu Straßburg. Bd. 3. Annex A—C. Karlsruhe 1904.

Württembergische Vierteljahrsschrift für Landesgeschichte. Herausg. von der Württembergischen Kommission f. Landesgeschichte. N. F. Jahrg. 13 (1904). Stuttgart d. J.

Tharander forstliches Jahrbuch. Bd. 54, 1—3. Dresden 1904.

Katalog des Gewerbemuseums der Stadt Ulm. Ulm 1904.

Jahrbücher des Nassauischen Vereins f. Naturkunde. Jahrg. 57. Wiesbaden 1904.

Sitzungsberichte der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg Jahrg. 1903, No. 1—8. Jahrg. 1904, No. 1—3. Würzburg d. J.

Verhandlungen der physikal.-medizin. Gesellschaft zu Würzburg. N. F Bd. 35, No. 8. Bd. 36. 37, No. 1. 2. Würzburg 1903. 04.

Digitized by Google

## Österreich-Ungarn.

Ljetopis Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti (Agram). Svez. 18. 1903. U Zagrebu 1904.

Monumenta historico-iuridica slavorum meridionalium. Vol. 9. Zagrebiae 1904.

Rad Jugoslavenske Akademije znanosti i umjetnosti. Kń. 153—156. U Zagrebu 1903. 04.

Rječnik hrvatskoga ili srpskoga jezika. Izd. Jugoslav. Akad. znanosti i umjetnosti. Svez. 23. U Zagrebu 1903.

Vjestnik kr. hrvatsko-slavonsko-dalmatinskog zemaljskog arkiva. God. 6, Svez. 3, I. 4. U Zagrebu 1904.

Vjesnik hrvatskoga arheološkoga društva. Sevez. 7, I. II. U Zagrebu 1903. 04.

Zbornik za narodni život i običaje južnih Slavena. Kń. 8, Svez. 2, Kń. 9, Svez. 1. U Zagrebu 1903.

Zeitschrift des Mährischen Landesmuseums. Herausg. von der Mährischen Museumsgesellschaft (Deutsche Sektion). Bd. 4, H. 2. — Časopis Moravského musea zemského. Roč. 4. Brünn 1904.

Magyar. tudom. Akadémiai Almanach 1904. Budapest d. J.

Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Mit Unterstützung der Ungar. Akademie d. Wissenschaften. Bd. 19 (1901). Budapest 1904.

Értekezések a nyelv-és-széptudományok Köréből. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 18, Sz. 6—8. Budapest 1904.

Értekezések a Társadalmi Tudományok Köréből. Köt. 12, Sz. 10. Köt. 13, Sz. 1. 2. Budapest 1904.

Értekezések a Történeti Tudományok Köréből. Köt. 19, Sz. 10. Budapest 1903.

Archaeologiai Értesitő. A Magyar. tudom. Akad. arch. bizottságának és av Orsz. Régészeti s emb. Társulatnak Közlönye. Köt. 23, Sz. 3—5. Köt. 24, Sz. 1. 2. Budapest 1903. 04.

Mathematikai és természettudományi Értesitő. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 21, Füz. 3—5. Köt. 22, Füz. 1. 2. Budapest 1903. 04.

Mathematikai és természettudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 28, Sz. 2. Budapest 1904.

Nyelvtudományi Közlemények. Kiadja a Magyar tudom. Akad. Köt. 33, Füz. 2—4. Köt. 34, Füz. 1. Budapest 1903. 04.

Rapport sur l'activité de l'Académie Hongroise des sciences en 1903. Budapest 1904.

Analecta nova ad historiam renascentium in Hungaria litterarum spectantia. Budapest 1903.

Értekezések a Bölcseleti Tudom. Köreből. Köt. 3, Sz. 5. Budapest 1904.

*Csoma Józcet,* A Magyar Nemzetségek a XIV század közepeig. Budapest 1903.

Verzeichnis d. öffentl. Vorlesungen an der k. k. Franz-Josefs-Universität zu Czernowitz im Sommer-Sem. 1904. — Übersicht der akademischen Behörden im Studienjahre 1904/05. — Die feierliche Inauguration des Rektors f. d. Studienjahr 1903/04.

Digitized by Google

Mitteilungen des naturhistorischen Vereins für Steiermark. H. 40 (1903). Graz 1904.

*Zamponi, Ludwig,* Zur Frage der Einführung einer internationalen Verkehrssprache. Zusammengestellt im Auftrage des Weltsprachen-Zentralvereines für Steiermark. Graz 1904.

Berichte des naturwissenschaftlich-medizinischen Vereins in Innsbruck. Jahrg. 27. 28. Innsbruck 1902. 03.

Zeitschrift des Ferdinandeums für Tirol und Vorarlberg. 3. Flge. H. 46. 47. Innsbruck 1902. 03.

Anzeiger der Akademie d. Wissenschaften in Krakau. Math.-naturw. Cl. 1903, No. 8—10. 1904, No. 1—7. Philol. Cl. 1903, No. 8—10. 1904, No. 1—7. Krakau d. J.

Archivum do dziejów literatury i oświaty w Polsce. Wydanictwo Akad. umiejętn. w Krakowie. T. 10. Kraków 1904.

Bibliografia historyi polskiej (Wydan. Akad. umiej. w Krakowie) cz. 3, zesz. 1. 2. Kraków 1904.

Biblioteka pisarzów polskich (Wydanictwa Akad. umiej. w Krakowie). No. 47—49. W Krakowie 1903.

Collectanea ex Archivio Collegii historici (Archivum komisyi historycznej). Tom. 8. Kraków 1898.

Katalog literatury naukowej polskiej. Tom 3 (1903), zesz. 2. 3. Krakow 1903.

Ubiory ludu polskiejo. Zesz. 1. Kraków s. a.

Materiały antropologiczno-archeologiczne i etnograficzne wydawane staraniem komisyi antropologicznej Akad. umiejętn. w Krakowie. Tom 7. W Krakowie 1904.

Materiały i prace komisyi językowej Akad. umiejętn. w Krakowie. Tom 1, zesz. 3. W. Krakowie 1904.

Rocznik akademii umiejętności w Krakowie. Rok 1902/03. 1903/04. W Krakowie 1903. 04.

Rozprawy Akademii umiejętności. — Wydział filologiczny. T. 36. 38. 39. (Ser. II. T. 21. 23. 24). — Wydział historyczno-filozoficzny. T. 45. 46. (Ser. II. T. 20. 21). — Wydział matemat.-przyrodniczy. T. 43. (Ser. III. T. 3. A. B.). W Krakowie 1903.

Sprawozdanie komisyi fizyograficznéj. Tom 37. Kraków 1903.

*Karłowicz, Jan,* Słownik gwar polskich. Tom 3. L—O. Kraków 1903.

Mitteilungen des Musealvereines für Krain. Jahrg. 16, 1—6. 17, 1. 2. Laibach 1903. 04.

Izvestija Muzejskega društva za Kranjsko Letnik 13. V Ljubljani 1903.

Chronik der ukrainischen (ruthenischen) Ševčenko-Gesellschaft der Wissenschaften. H. 15—18. Lemberg 1903. 04.

Lud, Organ towarzystwa ludoznawczego we Lwowie. T. 9, zesz. 4. T. 10, zesz. 1—3. We Lwowie 1903. 04.

Almanach České Akademie Císaře Františka Josefa. Ročn. 14. 1904. V Praze d. J.

Historický Archiv. Čisl. 22. 23. V Praze 1903.

Bulletin international. Médecine. Sciences mathématiques et naturelles. Prague 1903. 04.

Digitized by Google

Bibliotéka klassiků řeckých a římských. Čisl. 6. 8. V Praze 1902.

Rozpravy České Akad. Cís. Františka Josefa. Tříd. I. Ročn. 11. Tříd. II. Ročn. 12. — Tříd. III. Čisl. 20. V Praze 1903.

Sbírka pramenů. Skup. 1. Rad. 1, čisl. 5. 6. Rad. 2, čisl. 6. Skup. II, čisl. 6. 7. Skup. III, čisl. 4. V Praze 1903.

Věstnik České Akad. Cís. Františka Josefa. Ročn. 12. V Praze 1903.

Jahresbericht der k. böhm. Gesellsch. d. Wissenschaften für das Jahr 1903. Prag 1904.

Sitzungsberichte der k. böhm. Gesellschaft d. Wissenschaften. Math.-naturw. Klasse. Jahrg. 1903. — Philos.-histor.-philolog. Klasse Jahrg. 1903. Prag 1904.

Jednota bratrská v proním vyhnanstoí (1548—61. 1561—72) sepsal *Jarosl. Bidlo.* Čast. 1. 2. — Soustava dlouhých Slabik koncových v staré germáništiné napsal *Josef Janko.* V Praze 1901—03.

Rechenschafts-Bericht über die Tätigkeit der Gesellschaft zur Förd. deutsch. Wissensch., Kunst u. Literat. in Böhmen. 1903. Bibliothek deutscher Schriftsteller aus Böhmen. Bd. 11. *Stifter, Adalbert,* Sämtliche Werke Bd. 1. Studien Bd. 1. Herausg. von *Aug. Sauer.* Bd. 14. *Mathesius, Joh.,* Ausgewählte Werke Bd. 4. Herausg. von *G. Löscher.* Prag 1901. 04.

55. Bericht der Lese- und Redehalle der deutschen Studenten in Prag über d. J. 1903. Prag 1904.

Magnetische und meteorologische Beobachtungen an der k. k. Sternwarte zu Prag im J. 1903. Jahrg. 64. Prag 1904.

Personenstand der k. k. Deutschen Carl-Ferdinands-Universität in Prag. 1904/05.

Mitteilungen des Vereins für Geschichte der Deutschen in Böhmen. Jahrg. 42, No. 1—4. Prag 1903. 04.

Sitzungsberichte des deutschen naturw.-medizin. Vereins für Böhmen „Lotos". N. F. Bd. 23. Prag 1903.

Verhandlungen des Vereins für Natur- und Heilkunde zu Preßburg. N. F. H. 15. Preßburg 1904.

Bullettino di archeologia e storia dalmata. Anno 26 (1903), No. 12. Anno 27 (1904), No. 1—8. Spalato 1903. 04.

Almanach der Kais. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 53. Wien 1903.

Anzeiger der Kais. Akademie der Wissenschaften. Math.-phys. Kl. 1903. No. 25—27. 1904. No. 1—24.

Archiv für österreichische Geschichte. Herausg. von der zur Pflege vaterländ. Geschichte aufgestellten Kommission der Kais. Akademie d. Wissensch. Bd. 92, II. 93, I. Wien 1903. 04.

Denkschriften der Kais. Akademie d. Wissensch. Mathem.-naturw. Kl. Bd. 74. Philol.-hist. Kl. Bd. 49. 50. Wien 1904.

Fontes rerum Austriacarum. Österreichische Geschichtsquellen, hrsg. von d. histor. Kommission der Kais. Akad. d. Wissensch. Abt. I. Scriptores. Bd. 9, I. Abt. II. Diplomata et Acta. Bd. 56. 57. Wien 1903. 04.

Mitteilungen der Erdbeben-Kommission der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften. N. Folge. No. 14—24. Wien 1903. 04.

Digitized by Google

Sitzungsberichte der Kaiserl. Akad. d. Wissensch. Math.-naturw. Kl Bd. 111 (1902) I, No. 10. Bd. 112 (1903), 113 (1904) I, No. 1—4. II$^a$, No. 1—7. II$^b$, No. 1—6. III, No. 1—5. — Philos.-histor. Kl Bd. 146—148 (1903. 04).

Abhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien. Bd. 2. H. 3. 4. Wien 1904.

Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien Bd. 53, H. 10. Bd. 54, H. 1—10. Wien 1903. 04.

Publikationen für die internationale Erdmessung. Die astronomisch-geodätischen Arbeiten des k. u. k. militärgeographischen Institutes in Wien. Bd. 20. Astronomische Arbeiten. Wien 1903.

Annalen des k. k. naturhistorischen Hofmuseums Bd. 18, No. 4. Bd. 19, No. 1. Wien 1903. 04.

Abhandlungen der k. k. geologischen Reichsanstalt. Bd. 17, H. 6. Bd. 19, H. 2. 3. Wien 1903. 04.

Jahrbuch d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 53 (1903), H. 2—4. Jahrg. 54 (1904), H. 1. Wien d. J.

Verhandlungen d. k. k. geologischen Reichsanstalt. Jahrg. 1903, No. 16—18. Jahrg. 1904, No. 1—12. Wien d. J.

Mitteilungen der Sektion f. Naturkunde des Österreichischen Touristen-Club. Jahrg. 15. Wien 1903.

Publikationen der v. Kuffer'schen Sternwarte. Herausg. von *Leo de Ball* Bd. 6, T. 2—4. — Über neue Refraktionstafeln. Zirkular der v. Kuffer'schen Sternwarte. Wien 1903. 04.

## Belgien.

Académie d'archéologie de Belgique. Bulletin. 1903, 4. 1904, 1. 2. Anvers d. J.

Paedologisch Jaarboek onder Redactie van *M. C. Schuyten*. Jaarg. 5. Antwerpen 1904.

Annuaire de l'Académie R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. 1904. (Année 70). Bruxelles d. J.

Académie Roy. de Belgique. Bulletin de la classe des sciences. 1903, No. 11. 12. 1904, No. 1—11. — Bulletin de la classe des lettres et des sciences morales et politiques et de la classe des beaux-arts. 1903, No. 11. 12. 1904, No. 1—11. Bruxelles d. J.

Mémoires de l'Académie Roy. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 54, Fasc. 6. Bruxelles 1904.

Mémoires couronnés et autres Mémoires publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique. T. 63, Fasc. 8. T. 64—66. Bruxelles 1903. 04.

Mémoires couronnés et Mémoires des savants étrangers publ. par l'Acad. R. des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique T. 62, Fasc. 5—7. Bruxelles 1904.

Annuaire astronomique de l'Observatoire Roy. de Belgique. 1901—05. Bruxelles.

Analecta Bollandiana. T. 23, Fasc. 1—3. Bruxelles 1904.

Annales de la Société entomologique de Belgique. T. 47. — Mémoires de la Société entomologique de Belgique 9—11. Bruxelles 1902. 03

Digitized by Google

La Cellule. Recueil de cytologie et d'histologie générale. T. 21, Fasc. 1. 2. Louvain 1903. 04.

## Dänemark.

Oversigt over det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Forhandlinger i aaret 1903, No. 6. 1904, No. 1—5. Kjøbenhavn d. J.

Det Kong. Danske Videnskabernes Selskabs Skrifter. Naturv. og math. Afd. 6. Række. T. 12, No. 4. 7. Række. T. 1, No. 1—3. T. 2, No. 1—3. Hist. og philos. Afd. 6. Række. T. 6, No. 2. Kjøbenhavn 1904.

Conseil permanent international pour l'exploration de la mer. Bulletin des resultats acquis pendant les courses périodiques, publ. par le Bureau du conseil. Année 1903/04. No. 1—4. — Publications de circonstance. No. 8—20. — Rapports et Procès-verbaux des réunions. Vol. 2. Copenhague 1903. 04.

## England.

Aberdeen University Studies. No. 8. 9. Aberdeen 1903.

Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 12, P. 4—6. Cambridge 1904.

Transactions of the Cambridge Philosophical Society. Vol. 19, P. 3. Cambridge 1904.

Proceedings of the R. Irish Academy. Vol. 24. Sect. A, P. 3. 4. Sect. B, P. 4. 5. Sect. C, P. 4. 5. Vol. 25. Sect. A, No. 1. 2. Sect. C, No. 1—4. Dublin 1903. 04.

The Transactions of the R. Irish Academy. Vol. 32, Sect. A, P. 7—10. Sect. B, P. 3. 4. Sect. C, P. 2. 3. Dublin 1903. 04.

The scientific Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 10, P. 1. Dublin 1903.

The scientific Transactions of the R. Dublin Society. Vol. 8, No. 2—5. Dublin 1903.

Economic Proceedings of the R. Dublin Society. Vol. 1, P. 4. Dublin 1903.

Proceedings of the R. Society of Edinburgh. Vol. 24, No. 6. Vol. 25, No. 1—4. Edinburgh 1904.

Proceedings of the R. Physical Society. Vol. 15 [P. 2]. Session 132 (1903/04). Edinburgh 1904.

Otia Merseiana. Vol. 4. Liverpool 1904.

Proceedings of the R. Society of London. Vol. 72—74, No. 486—502. — Yearbook of the Royal Society 1904. — Obitury Notices of fellows of the Royal Society. P. 1—3. London 1903. 04.

Transactions of the R. Society of London. Ser. A. Vol. 203, p. 1—100. 139—420. Vol. 204, p. 1—219. Ser. B. Vol. 196, p. 295—388. Vol. 197, p. 1—360. London 1903.

Memoirs of the London Astronomical Society. Vol. 54 (1899—1901) with Append. 1—5. Vol. 55 (1904) with Append. 1. London 1901—04.

Scientific Reports on the investigations of the Cancer research found. Under the direction of the Roy. College of Physicians of London and the Roy. College of Surgeons of England. No. 1. London 1904.

Digitized by Google

Proceedings of the London Mathematical Society. Ser. II. Vol. 1, P. 3—7. Vol. 2. P 1—4. London 1904.

Journal of the R. Microscopical Society, containing its Transactions and Proceedings. 1904, No. 1—6. London d. J.

Memoirs and Proceedings of the Literary and Philosophical Society of Manchester. Vol. 48, P. 1—3. Manchester 1903. 04.

Report of the Manchester Museum Owens College for 1903/04. — Notes from the Manchester Museum. No. 17—19. Museum Handbooks: *Hoyle, Will. E.*, Handy Guide to the Museum. 3. edit. — *Bolton, H.*, The Palaeontology of the Lancashire Coal measures. P. 1. — A brief Account of the Cosmo Melvill Herbarium. Manchester 1903. 04.

## Frankreich.

Mémoires des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. VI. Sér. T. 3. Paris et Bordeaux 1903.

Procès-verbaux de la Société des sciences physiques et naturelles de Bordeaux. Année 1902/03 Paris et Bordeaux 1903.

Observations pluviométriques et thermométriques faites dans le Département de la Gironde de Juin 1902 à Mai 1903. Note de *G. Rayet*. Bordeaux 1903.

Mémoires de la Société nationale des sciences naturelles et mathématiques de Cherbourg. T. 33 (Sér. IV, T. 3). Fasc. 2. Cherbourg 1903.

Mémoires de l'Académie des sciences, bell.-lettres et arts de Lyon. Classe des sciences et lettres. Sér. III. T. 7. Paris et Lyon 1903.

Annales de la Société Linnéenne de Lyon. N. Sér. T. 49. 50. Lyon et Paris 1903. 04.

Annales de l'Université de Lyon. N. S. Sciences. Médecine. Fasc. 12. Paris et Lyon 1903.

Académie des sciences et lettres de Montpellier. Mémoires de la section des lettres. Sér. II. T. 4, No. 2. — Mémoires de la section des sciences. Sér. II. T. 3, No. 3. Montpellier 1903.

Bulletin des séances de la société des sciences de Nancy. Sér. III. T. 4, Fasc. 2—4. T. 5, Fasc. 1. Paris et Nancy 1903. 04.

Oeuvres complètes d'Augustin Cauchy. Publ. sous la direction scientifique de l'Académie des sciences. Sér. II. T. 5. Paris 1903.

Bulletin du Muséum d'histoire naturelle. Année 1903, No. 1. 2. 5—8. 1904, No. 1—3. Paris d. J.

Annales de l'École normale supérieure. III. Sér. T. 20, No. 11. 12. T. 21, No. 1—11. — Table de matières cont. dans les Tomes 11—20. Paris 1903. 04.

Journal de l'École polytechnique. Ser. II. Cah. 9. Paris 1904.

Bulletin de la Société mathématique de France. T. 31, No. 4. T. 32, No. 1—3. Paris 1903. 04.

Bulletin de la Société scientifique et médicale de l'ouest. Tom. 12, No. 3. 4. T. 13, No. 1. 2. Rennes 1903. 04.

Mémoires de l'Académie des sciences, inscriptions et belles-lettres de Toulouse. Sér. X. T. 3. 4. Toulouse 1903. 04.

Digitized by Google

Annales du midi. Revue de la France méridionale, fondée sous les auspices de l'Université de Toulouse. Ann. 16 (No. 60—62). Toulouse 1903. 04.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse pour les sciences mathématiques et les sciences physiques. Sér. II. T. 5, Fasc. 3. 4. T. 6, Fasc. 1. Paris et Toulouse 1903. 04.

Bulletin de la Commission météorologique du Département de la Haute Garonne. T. I, fasc. 1. 2. Toulouse 1903.

Station de pisciculture et hydrobiologie de l'Université de Toulouse. No. 1. Bulletin pour l'année 1903. Paris et Toulouse 1904.

## Griechenland.

École française d'Athènes. Bulletin de correspondance hellénique [Athen]. Année 27. 28 Paris 1903. 04.

Mitteilungen des Kaiserl. Deutschen Archäologischen Instituts. Athenische Abteilung. Bd. 28, H. 3. 4. Bd. 29, H. 1. 2. Athen 1903. 04.

*Ἀθηνᾶ. Σύγγραμμα περιοδικὸν τῆς ἐν Ἀθήναις Ἐπιστημονικῆς Ἑταιρείας.* T. 15. No. 2—4. T. 16. No. 1. 2. Athen 1903. 04.

*Τὸ ἐν Ἀθήναις ἐθνικὸν Πανεπιστήμιον.* 2 Dissert. 1904.

## Holland.

Jaarboek van de Kon. Akad. v. Wetenschappen gevestigd te Amsterdam voor 1903. Amsterdam 1904.

Verhandelingen d. Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afdeel. Letterkunde. II. Reeks. Deel 4, No. 2. Deel 5, No. 4. 5. Afdeel. Natuurkunde. Sect. I. Deel 8, No. 6. 7. Sect. II. Deel 10, No. 1—6. Amsterdam 1903. 04.

Verslagen en mededeelingen der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Afd. Letterkunde. IV. Reeks. Deel 4. H. 3. Deel 6. Amsterdam 1901. 04.

Verslagen van de gewone vergaderingen der wis- en natuurkundige afdeeling der Kon. Akad. v. Wetenschappen. Deel 12. I. II. Amsterdam 1904.

Programma certaminis poetici ab Acad. Reg. discipl. Neerlandica ex legato Hoefftiano indicti in annum 1905. — *Pascoli, Joh.*, Paedagogium. Carmen in certamine poetico Hoefftiano praemio aureo ornatum. Acced. 4 poemata laudata. Amstelodami 1904.

Revue semestrelle des publications mathématiques. T. 12, P. 1. 2. Amsterdam 1904.

Nieuw Archief voor Wiskunde. Uitg. door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam. 2. Reeks. Deel 6. St. 2. 3. — Wiskundige Opgaven. N. R. Deel 9. St. 1. 2. Amsterdam 1902. 04.

Programma van jaarlijksche prijsvragen voor het j. 1904, ter beantwoording uitgeschreven door het Wiskundig Genootschap te Amsterdam.

Verslag van de 125e Algem. Vergaadering van het Wisk. Genootschap gehouden te Amsterdam 25. April 1904.

Bijdragen tot de dierkunde uitg. door het Kon. Zool. Genootschap te Amsterdam. Afl. 17. 18. Leiden 1893—1904.



Digitized by Google

Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles, publiées par la Société Hollandaise des sciences à Harlem. Ser. II. T. 9, Livr. 1—5. Harlem 1904.

Programma van de Hollandsche Maatschappij de wetenschappen te Haarlem voor het jaar 1904.

Archives du Musée Teyler. Sér. II. Vol. 8, P. 4. 5. Vol. 9. P. 1. 2. — Catalogue de la bibliothèque par *G. C. W. Bohnensieg*. T. 3. 1888—1903. Harlem 1903. 04.

Handelingen en mededeelingen van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden over het jaar 1903/04. Leiden 1904.

Levensberigten der afgestorvene medeleden van de Maatschappij der Nederlandsche Letterkunde te Leiden. Bijlage tot de Handelingen van 1903/4 Leiden 1904.

Tijdschrif voor Nederlandsche taal-en letterkunde. Uitgeg. vanwege de Maatschapp. d. Nederl. Letterkunde. Deel 22, Afd. 3. 4. Deel 23, Afd. 1. 2. Leiden 1903. 04.

Nederlandsch kruidkundig Archief. Verslagen en mededeelingen der Nederlandsche Botanische Vereeniging [Leiden]. Ser. III. Deel 2, Stuk 4. Suppl. Nijmegen 1903. — Prodromus Florae Batavae. Vol. 1, P. 3. Edit. altera. Nijmegen 1904.

Verslagen en mededeelingen der Nederl. botan. Vereeniging. — Recueil des travaux botaniques néerlandaises, publ. par la Société botanique néerlandaise. No. 1. Nijmegen 1904.

Programme de la Société Batave de Philosophie expérimentale de Rotterdam. 1904.

Bijdragen en Mededeelingen van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Deel 25. Amsterdam 1904.

Werken van het Historisch Genootschap gevestigd te Utrecht. Ser. III. No. 20. Amsterdam 1904.

Onderzoekingen gedaan in het Physiol. Laboratorium d. Utrechtsche Hoogeschool. 5. Reeks. V, Afl. 1. Utrecht 1904.

## Italien.

Bollettino delle pubblicazioni italiane ricevute per diritto di stampa. No. 36—38. 40—47. Firenze 1903. 04.

Atti e Rendiconti dell' Accademia di scienze, lettere ed arti di Acireale. N. S. Vol. 10 (1899/1900). [Rendiconti e] Memorie. Ser. III. Vol. 2. 1902/03. Classe di lettere e arti. Classe di scienze. Acireale 1903. 04.

Le Opere di Galileo Galilei. Ediz. nazionale sotti gli auspici di S. M. il Re d' Italia. Vol. 3, P. 1. Firenze 1892.

Opere matematiche di *Francesco Brioschi*. T. 3. Milano 1904.

Memorie del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Classe di scienze matematiche e naturali. Vol. 19, Fasc. 11—13. Vol. 20, Fasc. 2. Milano 1903. 04.

R. Istituto Lombardo di scienze e lettere. Rendiconti. Ser. II. Vol. 36. Fasc. 17—20. Vol. 37, Fasc. 1—16. Milano 1903. 04.

Digitized by Google

Società Reale di Napoli. Rendiconto della R. Accad. delle scienze fisiche e matematiche. Ser. III. Vol. 9 (Anno 42), Fasc. 8—12. Vol. 10 (Anno 43), Fasc. 1—7. Napoli 1903. 04.

Atti e Memorie della R. Accademia di scienze, lettere ed arti in Padova. N. S. Vol. 19. Padova 1905.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. T. 18 (1904), Fasc. 1—6. — Annuario. 1904. — Estratti dei Verbali della Adunanze (13. Dic. 1903. — Magg. 1904). Palermo d. J.

Giornale di scienze naturali ed economiche, pubbl. p. cura della Società di scienze naturali ed economiche di Palermo. Vol. 24. Palermo 1904.

Annali della R. Scuola normale superiore di Pisa. Scienze fisiche e matematiche Vol. 9. Pisa 1904.

Atti della Società Toscana di scienze naturali residente in Pisa. Memorie. Vol. 20. — Processi verbali. Vol. 13. Nov. 1903. — Lugl. 1904. Pisa 1904.

Atti della R. Accademia dei Lincei. Classe di scienze morali, storiche e filologiche. Ser. V, P. I. Memorie. Vol. 8—11, P. II (Notizie degli scavi), Vol. 11, 9—12. Notizie degli scavi. Vol. 1, Fasc. 1—3. — Rendiconti. Vol. 12 (1903), Fasc. 11. 12. Vol. 13 (1904), Fasc. 1—10. — Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali. Ser. V. Memorie. Vol. 4. Rendiconti. Vol. 12 (1903), II. Sem., Fasc. 12. Vol. 13 (1904) [I. Sem.], Fasc. 1—12. II. Sem., Fasc. 1—11. Rendiconto dell' adunanza solenne del 5. Giugn. 1904. Roma 1903. 04. — *Friderici Caesii* Phytosophicarum tabularum Pars I. Concilio et auctoritate R. Lynceorum Academiae iterum edita per *Romualdum Pirotta*. Mediolani [et Roma] 1904.

Mitteilungen des Kais. Deutschen Archäologischen Instituts. Römische Abtheilung (Bollettino dell' Imp. Istituto Archeologico Germanico. Sezione Romana). Bd. 18, H. 3. 4. Bd. 19, H. 1. 2. Roma 1904.

Atti della R. Accademia dei Fisiocritici di Siena. Ser. IV. Vol. 15, No. 7—10. Vol. 16, No. 1—10. Siena 1903. 04.

Atti della R. Accademia delle scienze di Torino. Vol. 39, Disp. 1—15. Torino 1904.

Memorie della R. Accademia delle scienze di Torino. Ser. II. T. 54. Torino 1904.

Osservazioni meteorologiche fatte nell' anno 1903 all' Osservatorio della R. Università di Torino. Torino 1904.

Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. 61. Ser. VIII. T. 4, Disp. 10. T. 62. Ser. VIII. T. 5, Disp. 1—10. Venezia 1901—03.

Memorie del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti. T. 27, No. 1. 2. Venezia 1902. 03.

## Luxemburg.

Publications de l'Institut Grand-Ducal de Luxembourg. Section des sciences naturelles et mathématiques. T. 27 (B). Luxembourg 1904.

Société des naturalistes Luxembourgeois (Fauna). Comptes rendus des séances. Année 13. Luxembourg 1903.



Digitized by Google

## Portugal.

*Teixeira, F. Gomes,* Obras sobre mathematica. Publ. por ordem do governo portugués. Vol. 1. Coimbra 1904.

Corrections aux ascensions droites de quelques étoiles du Berliner Jahrbuch observées à Lisbonne (Tapada) par *Campos Rodrigues.* S.-A. Kiel 1902. — Observations d'éclipse de Lune à l'Observatoire Roy. de Lisbonne (Tapada) par *Campos Rodrigues, F. Oom* et *Teixeira Bastos.* S.-A. Kiel 1904.

## Rumänien.

Buletinul Societăţii de sciinţe fizice (Fizica, Chimia si Mineralogia) din Bucaresci-România. Anul 12, No. 5. 6. Anul 13, No. 1—4. Bucuresc 1903. 04.

## Rußland.

Acta societatis scientiarum Fennicae. T. 28—31. Helsingfors 1902. 03.

Meddelanden af Geografiska Föreningen i Finland. 6 (1901—03). Helsingfors 1903.

Bidrag tik Kännedom af Finlands Natur och Folk, utg. af Finska Vetensk.-Sociétet. H. 61. 62. Helsingfors 1902. 03.

Observations météorologiques publ. par l'Institut météorologique central de la Société des sciences de Finlande. Vol. 16. 17 (1897. 98). — Observations météorologiques faites à Helsingfors en 1897. 98. Helsingfors 1904. — Catalogue photographique du ciel. Zone de Helsingfors entre + 39° et 47°. Publ. par *Anders Donner.* Sér. I, T. 4. Helsingfors 1903. — État des glaces et des neiges en Finlande pendant l'hiver 1892—93. Exposé par *Axel Heinrichs.* Kuopio 1904.

Öfversigt at Finska Vetenskaps Societetens Förhandlingar. 44. 45. Helsingfors 1902. 03.

Bulletin de la Commission géologique de Finlande No. 14. — Geologiska Kommissionen. Geologisk Öfversiktskarta öfver Finland. Sect. D. 2. Helsingfors 1903. 04.

Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan. Ser. II. T. 13, No. 3. 4. T. 14, No. 1. Kasan 1903. 04.

Učenyja Zapiski Imp. Kasanskago Universiteta. T. 70, No. 12 T. 71, No. 1—11. Kasan 1903—04. — 5 Dissertationen a. d. J. 1903/04.

Universitetskija Izvěstija. God 43, No. 11. 12. God 44, No. 1—10. Kiev 1903. 04.

Bulletin de la Société Impér. des Naturalistes de Moscou. Année 1903, No. 2—4. 1904, No. 1. Moscou d. J.

Učenyja zapiski Imp. Moskovskago Universiteta. Otděl estestvenno-istor. Vyp. 19. 20. Otd. fisiko-mat. Vyp. 19—22. Otd. medic. Vyp. 9. Moskva 1904.

Mémoires de l'Académie de scienecs de St. Pétersbourg. Sér. VIII. Classe physico-mathématique. Vol. 13, No. 6. Vol. 14. 15. 16, No. 1—3. Classe historico-philologique. Tom. 6, No. 5. 6. St. Pétersbourg 1903. 04.

Annales de l'Observatoire physique central, publ. par *M. Rykatchew.* Année 1900. Suppl. 1902. I. II et Suppl. St. Pétersbourg 1902. 04.

Digitized by Google

Académie Imp. des sciences. Comptes rendus des séances de la Commission Sismique permanente. Livr. 3. St. Pétersbourg 1904.

Comité géologique. Bulletins. T. 22, 1—10. Mémoires. N. Sér. Livr. 5—13. Vol. 13, No. 4. Vol. 15, No. 1. Vol. 19, No. 2. S. Pétersbourg 1902. 03.

Acta Horti Petropolitani T. 23, Fasc. 1. 2. T. 22, Fasc. 2. — Scripta botanica Horti Universitatis Imp. Petropolitani Fasc. 19—21. S. Peterburg 1902—04.

Trudy Peterburgskago Obščestva Estestvoispytatelej. Travaux de la Société des naturalistes de St. Pétersbourg. T. 32, 2. T. 33, 3. 4. — Protokoly zasědanij. Vol. 34, Liv. 1, No. 2—7. Vol. 35, Liv. 1, No. 1. S. Pétersbourg 1903. 04.

Otčet Imp. publ. Biblioteki za 1899. S. Peterburg 1903.

Otčet o sostojanij i dějatelnosti Imp. S. Petersburgsk. Universita za 1903. S. Petersburg 1903.

Ličnyj Imp. S. Peterburgsk. Universiteta 1903.

Spisok knig priobrčennych bibliotekoju Imp. S. Peterburgsk Universiteta v. 1903 godn. S. Peterburg 1903.

Zapiski istoriko-filologičeskago Fakulteta Imp. S. Peterburgskago Universiteta. Čast 71—74. S. Peterburg 1904.

Vizantijskij Vremennik (*Βυζαντινά Χρονικά*), izdavaemyi pri Imp. Akad. nauk. T. 9, Vyp. 3. 4. T. 10, Vyp. 1—4. S. Petersburg 1902. 03.

Publications de l'Observatoire central Nicolas (Poulkova). Ser. II. Vol. 9, 3. 4. S. Petersburg 1903. 04.

Correspondenzblatt des Naturforscher-Vereins zu Riga. Jahrg. 47. Riga 1904.

Monatsberichte der Horizontal-Pendel-Station im Physikalischen Observatorium zu Tiflis im J. 1901, No. 4—12. 1902, No. 1—12. Tiflis. — Seismische Monatsberichte No. 2—6. ebd. 1904.

## Schweden und Norwegen.

Sveriges offentliga Bibliotek Stockholm, Upsala, Lund, Göteborg. Accessions-Katalog. 17. 1902. Stockholm 1904.

Bergens Museum. Aarbog for 1903, H. 3. 1904, H. 1. 2. — Aarsberetning for 1903. Bergen 1904.

*Sars, G. O.* An Account of the Crustacea of Norway. Vol. 5, P. 1—6. Bergen 1903. 04.

Archiv for Mathematik og Naturvidenskab. Bd. 25. Kristiania 1903.

Forhandlinger i Videnskabs-Selskabet i Christiania. Aar 1903. Christiania 1904.

Skrifter udgivne af Videnskabs-Selskabet i Christiania. Math.-naturvid. Kl. 1903. Hist.-filos. Kl. 1903. Kristiania 1904.

Jahrbuch des Norwegischen meteorologischen Instituts für 1900—02. Christiania 1901—03.

Nyt magazin for Naturvidenskaberne. Bd. 40. 41. Christiania 1902. 03.

Det Kong. Norske Frederiks Universitets Aarsberetning for 1900/01, 1901/02. Christiania 1902/03. — *Christensen, Hjalmar,* Af det Norske aandslivs historie i det 19de aarhundrede i Nicolai Wergeland. Bergen 1899. — *Gade, F. G.,* u. *Harbitz, Francis,* De pathologisk-anatomiske forandringer af neurotrofisk oprindelse.

Digitized by Google

Christiania 1900. — *Nielsen, Yngvar,* Lensgreve Johan Caspar Herman Wedel Jarlsberg 1779—1840. Del 1—3 (Univ. Pogr. 1900) ibd. 1901. — *Rych, O.,* Norske gaardnavne Bd. 4, II. 14. 15. ibd. 1901—03. — *Rych, O.,* Gamle personnavne i Norske stedsnavne (Univ.-Progr. 1899) ibd. 1901. — *Winge, Paul,* Der Norske sindssygelovgivning (Univ.-Progr. 1900) ibd. 1901.

Kung. Vetenskaps- och Vitterhets Samhälles Handlingar. 4. F. 5/6. Göteborg 1903.

Acta Universitatis Lundensis. Lunds Universitets Års-Skrift. T. 38 (1902) I. II.

Acta mathematica. Hsg. v. *G. Mittag-Leffler.* 28. 29, I. Stockholm 1904.

Arkiv för botanik, utg. af K. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 2. 3, H. 1—3. Stockholm 1904.

Arkiv för kemi, mineralogi och geologi, utg. af Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 1, H. 2. Stockholm 1904.

Arkiv för zoologi, utg. af Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 1, H. 3. 4. Stockholm 1904.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Årsbok för år 1904. Stockholm 1904.

Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademiens Handlingar. Ny Följd. Bd. 37, 4-8. 38, 1-5. Stockholm 1904.

*Retzius, Andr.,* Skrifter i skilda ämnen jämte några bref Utg. af *Gustav Retzius.* Stockholm 1902.

Meteorologiska Jakttagelser i Sverige utg. af Kongl. Svenska Vetenskaps-Akademien. Bd. 43—45 (Ser. II, Bd. 29—31). Aarg. 1900—03. Stockholm 1904.

Les prix Nobel en 1901. Stockholm 1904.

Sweden, its people and its industry. Historical and statistical Handbook publ. by order of the government. Edit. by *Gust. Sundbärg.* Stockholm 1904.

Kongl. Vitterhets Historie och Antiquitets Akademiens Månadsblad 27/28. 30/31. (1898—1902). Stockholm 1904.

Antiqvarisk Tidskrift för Sverige, utg. af Kongl. Vitterhets Historie och Antiqvitets Akademien. D. 17, H. 3. Stockholm s. a.

Meddelanden från Nordiska Museet. 1902. Stockholm 1904.

Entomologisk Tidskrift utg. af Entomologiska Föreningen i Stockholm. Årg. 24 (1903). Stockholm d. J.

Astronomiska Jakttagelser och Undersökningar anstälda på Stockholms Observatorium. Bd. 6, No. 1. Bd. 8. No. 1. Stockholm 1903. 04.

Det Kong. Norske Videnskabers Selskabs Skrifter. 1903. Trondhjem 1904.

Nova Acta reg. Societatis scientiarum Upsaliensis. Ser. III. Vol. 20, 2. Upsala 1904.

Bulletin mensuel de l'Observatoire météorologique de l'Université d'Upsal. Vol. 35 (1903). Upsal 1903. 04.

Skrifter utgifn af Kongl. Humanistiska Vetenskaps-samfundet. Bd. 8. 9, 1. Upsala, Leipzig 1902—04.

Eranos. Acta philologica Suecana. Ed. *Vil. Lundström.* Vol 4, Fasc. 2—4. Vol. 5, Fasc. 3/4. Upsala 1900—04.

Digitized by Google

Results of the Swedish Zoological Expedition to Egypt and the White Nile 1901 under the direction of L. A. Jägerskiöld. P. 1. — Nordiska Studier tillegnade Adolf Noreen på hans 50-årsdag den 13 Mars 1904 Upsala 1904. — *Cleve, P. T. A.,* Treatise on the Phytoplankton of the Atlantic and its tributaries. ibd. 1897.

## Schweiz.

Jahresverzeichnis der Schweizerischen Universitätsschriften 1903/04. Basel 1904.

Neue Denkschriften der Allgem. Schweiz. Gesellschaft für die ges. Naturwissenschaften. Bd. 39, I. II. Basel 1903. 04.

Verhandlungen der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft zu Locarno (1903). Zurigo 1904.

Compte rendu de la Société helvétique des sciences naturelles. Session 86. Genève 1903.

Argovia. Jahresschrift der historischen Gesellschaft des Kantons Aargau. Bd. 30. Aargau 1903.

Baseler Zeitschrift für Geschichte und Altertumskunde. Hrsg. von der Histor. u. Antiquar. Gesellschaft in Basel. Bd 3, H. 2. Bd 4, H. 1. Basel 1904.

Verhandlungen der Naturforschenden Gesellschaft in Basel. Bd. 15, H. 2. 3. Basel 1904.

Mitteilungen der Naturforschenden Gesellschaft in Bern aus dem J. 1903 (No. 1551—1564). Bern 1904.

Jahresbericht der naturforschenden Gesellschaft Graubündens. Bd. 46. Chur 1904.

Universität Freiburg. Bericht über das Studienjahr 1902/03. — Behörden, Dozenten, Studierende. W. S. 1903/04. S. S. 1904. — Verzeichnis der Vorlesungen. S. S. 1904. W. S. 1904/05. — *Oser, Hugo,* Der Einfluß des Schweizerischen Zivilgesetzbuches auf das Studium des Privatrechtes (Rede). Freiburg 1904.

Mémoires de la Société de physique et d'histoire naturelle de Genève T. 29, P. 2. T. 32, P. 2. T. 34, P. 4. Genève 1886—1903.

Anzeiger für Schweizerische Alterthumskunde. Hrsg. vom Schweizerischen Landesmuseum. N. F. Bd. 5, No. 2—4. Bd. 6, No. 1. Zürich 1903. 04.

Schweizerisches Landesmuseum. 12. Jahresbericht (1903). Zürich 1904.

Jahrbuch für Schweizerische Geschichte. Bd. 29. Zürich 1904.

Beiträge zur geologischen Karte der Schweiz (Matériaux pour la Carte géologique de la Suisse). N. F. Lief. 14. — Geotechnische Serie. Lief. 2. 3. Bern 1904 [Polytechnikum Zürich].

Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich. Jahrg. 48, H. 3. 4. Jahrg. 49, H. 1. 2. Zürich 1904.

## Serbien.

Srpska kralj. Akademija. Glas. 67. 68. — Godišnjak. 17 (1903). — *Cvijić, J.,* Geološki Atlas Makedonije i Stare Srbije. Beograd 1903. — *Jovan Skerlic,* Jakob Ignjatovic. — Srbija i srpski pokret n južnoj Ugarskoj 1848 i 49. Drag. M. Pavlovic. Beograd 1904.

Digitized by Google

## Afrika.

Transactions of the South African Philosophical Society. Vol. 1, 2. 4. 8, P. 1. Vol. 9—12. 13, p. 1—293. Vol. 14. 15. Cape Town 1878—1904.

## Nordamerika.

Annual Report of the American Historical Association for the year 1902. Vol. 1. 2. Washington 1903.

Transactions and Proceedings of the American Philological Association. Vol. 34 (1903). Boston d. J.

Journal of the American Oriental Society. Vol. 24, No. 2. Vol. 25, No. 1. 2. New Haven 1903. 04.

Bulletin of the Geological Society of America. Vol. 14. Rochester 1903.

Miscellaneous scientific Papers of the Alleghany Observatory. N. Ser. No. 15—17. Chicago, London etc. s. a.

Johns Hopkins University Circulars. No. 165. Baltimore 1904.

American Journal of Mathematics pure and applied. Publ. under the auspices of the Johns Hopkins University. Vol. 25, No. 2—4. Baltimore 1903.

American Journal of Philology. Vol. 24, No. 1—3. Baltimore 1903.

American chemical Journal. Vol. 29, No. 3—6. Vol. 30, 31, No. 1—3. Baltimore 1903. 04.

Johns Hopkins University Studies in historical and political science. Ser. 21, No. 1—12. Baltimore 1903.

Memoirs of the American Academy of arts and sciences. [Boston]. Vol. 13, No. 1. Cambridge 1904.

Proceedings of the American Academy of arts and sciences. Vol. 39, No. 5—24. Vol. 40, No. 1—7. Boston 1903. 04.

The Museum of the Brooklyn Institute of arts and sciences. Science. Memoirs of natural sciences. Vol. 1, No. 1. New York 1904.

Bulletin of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 39, No. 9. Vol. 41, No. 2. Vol. 42, No. 5. Vol. 43, No. 1—3. Vol. 44. 45, No. 1—3. Vol. 46, No. 1. Cambridge, Mass. 1903. 04.

Memoirs of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge, Mass. Vol. 29. 30, No. 1. Cambridge, Mass. 1903. 04.

Annual Report of the Keepers of the Museum of comparative Zoology, at Harvard College, Cambridge. 1902/03. 1903/04. Cambridge, Mass. 1903. 04.

The John Crerar Library. 9. Annual Report for 1903. Chicago 1904.

Field Columbian Museum. Publications. No. 75. 77—87. 88—92. 95, I. II. Chicago 1902. 03.

The Astrophysical Journal. Vol. 19, No. 1—3. Chicago 1904.

The Botanical Gazette. Vol. 37, No. 6. Vol. 38, No. 2—5. Chicago 1904.

The University of Chicago. The decennial publications. — *Price, H. M.*, Literary Remains of Rim-Sin (Arioch), King of Larsa. Chicago 1904.

Colorado College Studies. Language Series. No. 15—17. — Science Series. No. 30—32. Colorado Springs 1904.

Digitized by Google

The University of Missouri Studies. Vol. 2, No. 2—5. Columbia, Miss. 1903. 04.

Bulletin of the University of Missouri. Vol. 5, No. 4. — Catalogue 1903/04. — A Bulletin on the condition of the County Almshouses of Missouri by *Charl. A. Ellwood.* — The state of Missouri. Edit. by *Walter Williams* (Missouri Commission, Louisiana Purchase Exposition). Columbia, Miss. 1904.

Iowa Geological Survey. Vol. 13. Annual Report 1902. Des Moines 1903.

The Journal of comparative Neurology. Ed. by *C. L. Herrick.* Vol. 13, No. 4. Vol. 14, No. 1—3. Granville 1904.

Proceedings of the Indiana Academy of sciences. 1902. Indianapolis 1903.

Bulletin of the American Mathematical Society. Ser. II. Vol. 10, No. 4—10. Vol. 11, No. 1—3. General Index 1891—1904. Lancaster 1903. — Annual Register. New York 1904.

Transactions of the American Mathematical Society. Vol. 5, No. 1—4. Lancaster and New York 1904.

The Kansas University Quarterly. — Science Bulletin. Vol. 2, No. 1—15. Lawrence 1903. 04.

Publications of the Washburn Observatory of the University of Wisconsin. Vol. 13, II. 14, I. Madison 1902. 03.

Parergones del Istituto geológico de México. T. 1. No. 2. México 1904.

Memorias de la Sociedad científica „Antonio Alzate". T. 13, Cuad. 7. 8. T. 19, Cuad. 6—10. T. 20, Cuad. 1 - 10. Calendario cronológico del Siglo XX por *C. R. Orudas.* México 1902.

Bulletin of the Wisconsin Natural History Society. Vol. 3, No. 1—3. 21. and 22. Annual Report. Milwaukee 1903. 04.

Lick Observatory, University of California. [Mount Hamilton.] Bulletin. No. 49—64. Sacramento 1903. 04.

Annals of the New York Academy of sciences. Vol. 14, P. 3. 4. Vol. 15, P. 2. New York 1903.

American Museum of Natural History. Bulletin. Vol. 18, P. 2. Vol. 19. — Memoirs. Vol. 1. P. 8. — Annual Report for 1903. New York 1903. 04.

The American Museum Journal. Vol. 1—3. 4, No. 1—4. New York 1900—1904.

Bulletin of the American Geographical Society. Vol. 35, No. 5. Vol. 36, No. 1—5. 7—11. New York 1903. 04.

Bulletin of the New York Garden. Vol. 3, No. 9. New York 1903.

American Journal of Archaeology. N. S. Vol. 7, No. 4 and Suppl. Vol. 8, No. 1—3. Norwood Mass. 1903.

Oberlin College. The Wilson Bulletin. N. S. Vol. 10, No. 2—4. Vol. 11, No. 1. Oberlin, Ohio 1903. 04.

Proceedings and Transactions of the R. Society of Canada: Ser. II. Vol. 9. Ottawa 1903.

Geological Survey of Canada. Annual Report. N. S. Vol. 13. Maps. — Report of the Superintendent of mines. — *White, James,* Altitudes in the Dominion of Canada. Dictionary of altitudes in the Dominion of Canada. — Report on the Great Landslide at Frank, Alta. Ottawa 1903. 04.

Digitized by Google

Proceedings of the Academy of natural sciences of Philadelphia. Vol. 55, P. 2. 3. Vol. 56, P. 1. Philadelphia 1903. 04.

Proceedings of the American Philosophical Society, held at Philadelphia. No. 174—176. Philadelphia 1903. 04.

The American Association to promote the teaching of speech to the deaf. Circular of information, June 1904. Philadelphia.

The Transactions of the Academy of science of St. Louis. Vol. 12, No. 9—10. Vol. 13, No. 1—9. Vol. 14, No. 1—6. St. Louis 1902—04.

Proceedings of the Canadian Institute, N. S. Vol. 2, P. 6 (No. 12). Toronto 1904.

Transactions of the Canadian Institute. Vol. 7, P. 3 (No. 15). Toronto 1904.

University of Toronto Studies. History and Economics. Vol. 2, No. 2. — Physical Science Ser. No. 3. 4. — Physiological Science Ser. No. 3. 5. — Papers from the chem. Laboratories. No. 40—43. — Philological Ser. No. 1. — Review of Historical Publications relating to Canada 1903/04. Toronto 1903. 04.

Illinois State Laboratory [Urbana]. Bulletin. Vol. 1, No. 3. Vol. 6, Art. 2. Vol. 7, Art. 1—3. Urbana 1903. 04.

The 1900 Solar Eclipse Expedition of the Astrophysical Observatory of the Smithsonian Institution, by *S. P. Langley*. Washington 1904.

Smithsonian Miscellaneous Collections. No. 1374. 1417. 1419. 1441. 1467. Washington 1903. 04.

Smithsonian Contributions to knowledge. No. 1413. 1438. Washington 1903. 04.

Smithsonian Institution. Bureau of American Ethnology. Annual Report. 20 (1898/99). Report of the U. S. National Museum. 1900/01. 1901/02. Washington 1903. 04.

Publications of the U. S. Naval Observatory. 2. Ser. Vol. 5. — Report of the Superintendent for 1902/03. 1903/04. Washington 1903. 04.

Report of the Superintendent of the U. S. Coast and Geodetic Survey, showing the progress of the work from July 1, 1902, to June 30, 1903. Washington 1904.

Department of the Interior. U. S. Geological Survey. — Professional Papers. No. 9—28. Washington 1903. 04.

Bulletin of the U. S. Geological Survey. No. 209—233. 241. — Water Supply and Irrigation Papers. No. 80—98. 101. 102. 104. Washington 1903. 04.

Annual Report of the U. S. Geological Survey to the Secretary of the Interior. 24. 1902/1903. Washington 1903.

Monographs of the U. S. Geological Survey. 44—46. Washington 1903. 04.

Mineral Resources of the U. S. 1902. Washington 1903.

Volta Bureau. Reprints of useful knowledge. No. 30. 39. Washington 1904.

## Südamerika.

Anales de la Sociedad científica Argentina. T. 56, Entr. 4—6. T. 57, Entr. 2. 3. 5. 6. T. 58, Entr. 1—3. Buenos Aires 1903. 04.

Boletin de la Academia nacional de ciencias de la Republica Argentina. T. 17, Entr. 2. 3. Cordoba 1902. 03.

Boletim del Cuerpo de Ingenieros de minas del Perú. No. 3. 4. 7. 8. 9. 11—14. Lima 1903. 04.

Digitized by Google

Anales del Museo nacional de Montevideo. Ser. II. Entr. 1. — Sección histórico-filosófica. T. 1. *Azara, Fel de,* Geografía física y esférica de la provincia del Paraguay y Misiones Guaranies. Montevideo 1904.

Annuario publicado pelo Observatorio do Rio de Janeiro para o anno de 1904. (Anno 20.) Rio de Janeiro 1904.

Boletim mensal do Observatorio do Rio de Janeiro de 1903, Avril—Dec. Rio de Janeiro 1903.

Actes de la Société scientifique du Chili. T. 12, Livr. 4. 5. T. 13, Livr. 1—3. Santiago 1903. 04.

Sociedade scientifica de S. Paulo. Relatorio da directoria 1903/04. São Paulo 1904.

## Asien.

Notulen van de algemeene en directie vergaderingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 41, Afl. 2—4. Deel 42, Afl. 1. 2. Batavia 1903. 04.

Tijdschrift voor Indische taal-, land- en volkenkunde, uitgeg. door het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 46, Afl. 5. 6. Deel 47, Afl. 1—5. Batavia 1903. 04.

Dagh-Register, gehouden int Casteel Batavia. Uitgeg. door het Batav. Genootsch. van kunsten en wetensch. Ann. 1647/48. 1677. 's Gravenhage, Batavia 1903. 04.

Verhandelingen van het Bataviaasch Genootschap van kunsten en wetenschappen. Deel 53. Deel 54, St. 3. Deel 56, St. 1. Batavia, 's Hage 1902. 03.

*Kersjes, B.* en *C. den Hamer,* De Tjandi Mĕndoet voor de restauratie. — *Stuart, H. N.,* Catalogus der munten en amuletten van China, Japan, Corea en Annam. Vevoorende tot de numismatische Verzameling van het Batav. Genootschap van kunsten en wetenschappen. — *Louw, P. J. F.,* De Java-Oorlog van 1825—30. Uitg. door het Batav. Genootsch. van k. en w. Batavia, 's Hage 1904.

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indie, uitgeg. door de Kon. Natuurkundige Vereeniging in Nederlandsch-Indie. Deel 63 (Ser. X, Deel 7). Weltevreden, Amsterdam 1904.

Observations made at the Magnetical and meteorological Observatory at Batavia. Publ. by order of the Government of Netherlands India. Vol. 25. 1902. Batavia 1904. — Regenwaarnemingen in Nederl. Indie. Jaarg. 24. 25. ib. 1903. 04.

Linguistic Survey of India. Vol. 3, P. 2. Vol. 5, P. 1. 2. Calcutta 1903.

Annual Report of the Board of scientific advise for India for the year 1902/03. Calcutta 1904.

Indian Museum. Annual Report. 1902/03. Calcutta 1904.

Publications of the Earthquake Investigation Committee. No. 15—18. Tōkyō 1903. 04.

The Journal of the College of science, Imp. University, Japan. Vol. 13, 3. 15, 1. 18, 5-8. 19, 2-4. 9. 11-20. 20, 1. 2. Tōkyō 1900—04.

Mitteilungen aus der medizinischen Fakultät der Kais. Japan. Universität. Bd. 6, No. 2. Tokio 1903.

Annotationes Zoologiae japonensis. Vol. 5, P. 1. 2. Tokyo 1903. 04.

Memoirs of the College of science and engineering, Kyōto Imp. University. Vol. 1, No. 1. Kyōto 1903.

Digitized by Google

Australien.

Proceedings of the R. Society of Victoria. N. S. Vol. 16, P. 2. Vol. 17, P. 1. Melbourne 1904.

Report of the 9. Meeting of the Australian Association for the advancement of science. Hobart 1903.

---

## 2. Einzelne Schriften.

*Bailland, B.*, Application de la photométrie à coin à la détermination des grandeurs photographiques des Pléiades. S.-A. Paris 1902.

—— Climat de Toulouse. S.-A. Ib. 1902.

—— Comparaison des catalogues méridiens de Toulouse et Leipzig. Ib. 1902.

*Berlanga, R. de*, Catálogo del Museo Loringiano. Málaga 1903.

*Conwentz, H.*, Die Gefährdung der Naturdenkmäler und Vorschläge zu ihrer Erhaltung. Denkschrift, dem Herrn Minister der geistlichen, Unterrichts- und Medizinal-Angelegenheiten überreicht. Berlin 1904.

*Guhl, G.*, Lücken-Quadrate. Rechen-Aufgaben zur Übung des Scharfsinns. Zürich o. J.

*Hallock-Greenewalt, Mary*, Pulse an rhytm. S.-A. 1903.

*Hell, Camillo*, Ideale Planimetrie. Eine Botschaft vom Gesetze der Kreise. Wien 1904.

*Helmert, F. R.*, Zur Ableitung der Formel von C. F. Gauß für den mittleren Beobachtungsfehler und ihrer Genauigkeit. S.-A. Berlin 1904.

*Kalecsinsky, Alex. v.*, Über die Akkumulatoren der Sonnenwärme in verschiedenen Flüssigkeiten. S.-A. Leipzig 1904.

*Kramář, Ph. C. Karl*, Über die sumerisch-grazinische Spracheinheit. S.-A. Prag 1904.

*Lesage, Pierre*, Contribution à l'étude des Mycoses dans les voies respiratoires. S.-A. Paris 1904.

*Le Vavasseur*, Énumération des groupes d'opérations d'ordre donné. Paris et Toulouse s. a.

*Levi, Ugo*, I monumenti del dialetto di Lio Mazor. Venezia 1904.

*Nicolas, A.*, Spokil, Langue internationale. Angers 1904.

*Pacher, Paul*, Der klägliche Versuch, Eugen Dühring totzuschweigen. Salzburg 1904.

*Pettinelli, Parisino*, Saggio di una teoria generale dei fenomeni naturali. Savona 1904.

*Poggendorff, J. C.*, Biographisch-literarisches Handwörterbuch zur Geschichte der exakten Wissenschaften. Bd. 4. Herausgegeben von *A. J. v. Oettingen*. Leipzig 1904.

*Ramirez de Arellano, Rafael*, La banda real de Castilla. Cordoba 1899.

*Vogel, H. C.*, Untersuchungen über das spektroskopische Doppelsternsystem $\beta$ Aurigae. S.-A. Berlin 1904.

*Wiśniewski, Feliks*, Wyprostowanie okręgu i kwadratura koła. Warszawa 1904.

---

Digitized by Google

Digitized by Google

# INHALT.


Seite

*F. Zirkel*, Zur Erinnerung an Leibniz . . . . . 298

*Franz Etzold*, Fünfter Bericht der Erdbebenstation Leipzig. 51° 20′ 6″ nördl. Br., 49m 34s östlich von Greenwich. I. Die in Leipzig vom 1. Mai bis 31. Oktober 1904 registrierten Erdbeben und Pulsationen. II. Über die Aufzeichnung der infolge des Läutens der Kirchenglocken zu Leipzig erzeugten Bodenschwingungen. (Mit einer Tafel und zwei Tabellen.) . . . . 302

*W. Scheibner*, Zusatz zu Art. 10* S. 163 dieses Bandes. . . . . 311

*F. Marchand*, Nekrolog auf Wilhelm His . . . . . 323

*Ernst Beckmann*, Nekrolog auf Clemens Winkler . . . . . 341

---

Verzeichnis der Mitglieder der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften . . . . . I

Verzeichnis der eingegangenen Schriften . . . . . VI


---


Druck von B. G. Teubner in Leipzig.



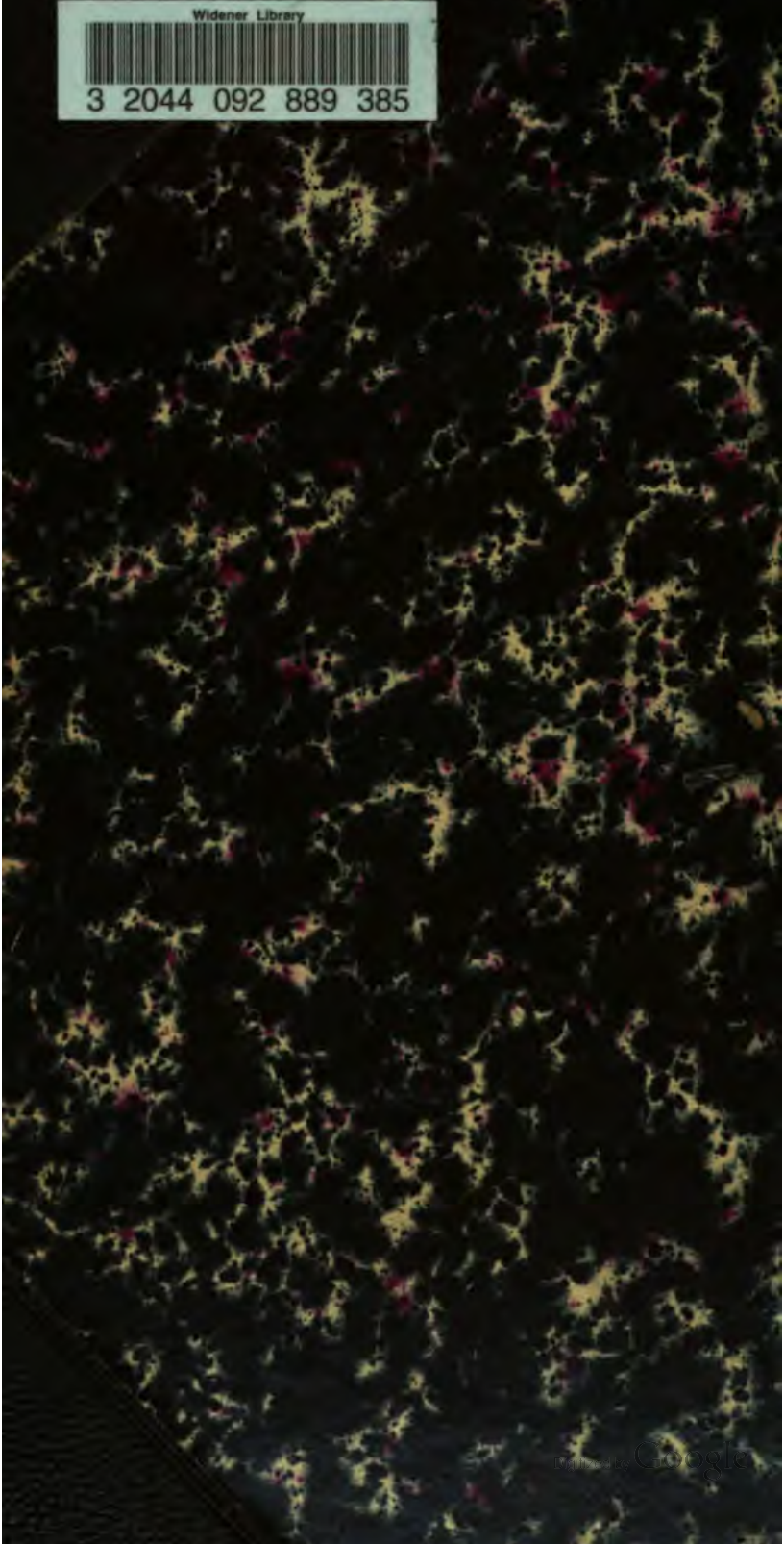
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Widener Library
3 2044 092 889 385